УДК 517.946

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С. Д. Махортов (Воронеж)

При исследовании вырождающихся дифференциальных уравнений возникает необходимость во введении специальных пространств основных и обобщенных функций, учитывающих наличие в этих уравнениях "весового" множителя $\alpha(t)$, заданного на вещественной оси $t\in R_1$ и обращающегося в нуль при $t\leq 0$. Для функций, заданных на полуоси $t>0$, такие построения были проведены в работе В.П. Глушко [1]. В этой же работе были изучены свойства "весовых" производных $\mathcal{D}_{\alpha,t}$ и "весового" преобразования Фурье F_α, построенных с помощью указанной функции $\alpha(t)$. Однако для исследования вырождающихся дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений во всем пространстве R_n (см., например, [2]) построения, проведенные в [1], оказались недостаточными. В настоящей работе основное внимание уделяется изучению свойств функций, заданных во всем пространстве R_n и принадлежащих "весовым" пространствам основных и обобщенных функций. Одновременно изучается ряд непрерывных операций в этих пространствах, необходимых при исследовании вырождающихся уравнений в R_n. Несколько лемм, приведенных без доказательства в начале работы, хорошо известны и включены в текст лишь для полноты изложения.

Автор выражает благодарность профессору В.П. Глушко за помощь, оказанную при написании данной работы.

1. Непрерывные операции в весовых пространствах основных функций. Пусть $y=(t,x)$ - точки евклидова пространства R_n $(t\in R_1,\ x\in R_{n-1})$. Как обычно, через $S(R_n)$ (короче, S) обозначается пространство бесконечно дифференцируемых в R_n и достаточно быстро убывающих при $|y|\to\infty$ функций $\varphi(y)$, топология в котором задается счетной системой норм

$$|[\varphi]|_p=\sup_{\substack{t\in R_1\\ x\in R_{n-1}}}\left(1+|t|+|x|\right)^p\sum_{j+|\beta|\leq p}|\mathcal{D}_t^j\mathcal{D}_x^\beta\varphi(t,x)|,\quad p=0,1,\dots \tag{1.1}$$

Известно [3], что в S можно ввести эквивалентную систему норм по формулам

$$|[\varphi]|_p = |[F_{t\to\eta}[\varphi])]|_p , \quad p=0,1,\dots , \tag{I.2}$$

где $F_{t\to\eta}$ - преобразование Фурье по переменной t.

В дальнейшем под $R_n^{\pm}$ будем понимать множества:

$$R_n^+ = \{(t,x): t\in(0,+\infty), x\in R_{n-1}\}; \ R_n^- = \{(t,x): t\in(-\infty,0), x\in R_{n-1}\}.$$

Для функции $\varphi(t,x)$, заданной на $R_n^{\pm}$, определим продолжение $\varphi_0(t,x)$ на R_n, полагая $\varphi_0(t,x)=0$ на $R_n^{\mp}$.

Определение I.I. Функция $\varphi(t,x)$, $(t,x)\in R_n^{\pm}$ принадлежит пространству $S^{\pm}$, если продолжение $\varphi_0(t,x)$ этой функции на R_n принадлежит $S(R_n)$. Топология в $S^{\pm}$ задается системой норм

$$|[\varphi(t,x)]|_p^{\pm} = |[\varphi_0(t,x)]|_p , \quad p=0,1,\dots \tag{I.3}$$

Введем непрерывные операции в пространстве $S^{\pm}$.

I.° Дифференцирование. Операция дифференцирования $\mathcal{D}_t^j\mathcal{D}_x^{\beta}$ $(j=0,1,\dots;\ |\beta|=0,1,\dots)$ линейна и непрерывна в $S^{\pm}$, причем $(\mathcal{D}_t^j\mathcal{D}_x^{\beta}\varphi)_0 = \mathcal{D}_t^j\mathcal{D}_x^{\beta}\varphi_0$.

2.° Умножение на функцию $a(t,x)$.

Определение I.2. Функция $a(t,x)\in C^{\infty}(R_n^{\pm})$ принадлежит классу $\theta_M^{\pm}$, если для любых $j=0,1,\dots$ и $|\beta|=0,1,\dots$ существуют неотрицательные числа $N_{j,\beta}$, $m_{j,\beta}$, $c_{j,\beta}$, не зависящие от t, x и такие, что

$$|t^{N_{j,\beta}}\mathcal{D}_t^j\mathcal{D}_x^{\beta}a(t,x)| \le c_{j,\beta}\,(1+|t|+|x|)^{m_{j,\beta}}$$

для любых $(t,x)\in R_n^{\pm}$.

Лемма I.I. Операция умножения на функцию $a(t,x)\in\theta_M^{\pm}$ линейна и непрерывна в $S^{\pm}$, причем

$$|[a\varphi]|_p^{\pm} \le C\,|[\varphi]|_{p_1}^{\pm} \tag{I.4}$$

для любых $p=0,1,\dots;\ p_1=p_1(p)$.

3°. Преобразование Фурье. Очевидно, частичное преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ отображает взаимно-однозначно и непрерывно $S^{\pm}$ на $S^{\pm}$.

Подмножество в S функций вида $\varphi_0(t,x)$, где $\varphi(t,x)\in S^{\pm}$, обозначим $S_0^{\pm}$.

Определение I.3. Функция $U(\eta,x)\in C^{\infty}(R_n)$ принадлежит пространству $\tilde{S}^{\pm}(R_n)$ (короче, $\tilde{S}^{\pm}$), если она аналитически продолжается по $z=\eta+i\gamma$ в полуплоскость $\pm \operatorname{Im} z>0$ и для $\forall p=0,1,\dots$ конечна норма

$$|[v(\eta,x)]|_p^{\pm}=\sup_{\substack{\operatorname{Re} z\in R_1\\ \operatorname{Im} z\in R_1^{\pm}\\ x\in R_{n-1}}}(1+|z|+|x|)^p\sum_{j+|\beta|\le p}|\mathcal{D}_z^j\mathcal{D}_x^\beta v(z,x)|. \tag{I.5}$$

Топология в $\tilde{S}^{\pm}$ задается системой норм (I.5).

Очевидно, $\tilde{S}^{\pm}$ - подпространство в S .

Лемма I.2. <u>Операция преобразования Фурье</u> $F_{t\to\eta}$ <u>линейна и непрерывна из</u> $S_0^{\pm}$ <u>в</u> $\tilde{S}^{\pm}$ <u>, причем</u>

$$|[(F_{t\to\eta}[\varphi_0(t,x)])]|_p^{\pm}\le c\,|[\varphi(t,x)]|_{p_1}^{\pm}, \tag{I.6}$$

<u>где</u> $\varphi\in S^{\pm}$, $p=0,1,\dots$, $p_1=p_1(p)$.

Лемма I.3. <u>Операция обратного преобразования Фурье</u> $F^{-1}_{\eta\to t}$ линейна и непрерывна из $\tilde{S}^{\pm}$ в $S_0^{\pm}$, причем

$$|[(F^{-1}_{\eta\to t}[v(\eta,x)])]|_p^{\pm}\le c\,|[v(\eta,x)]|_{p_1}, \tag{I.7}$$

где $v\in\tilde{S}^{\pm}$; $p=0,1,\dots$; $p_1=p_1(p)$.

Из лемм I.2 и I.3 вытекает

Теорема I.I. <u>Преобразование Фурье</u> $F_{t\to\eta}$ <u>взаимно-однозначно</u> и непрерывно отображает $S_0^{\pm}$ на $\tilde{S}^{\pm}$.

Перейдем далее к определению весовых пространств основных функций. В качестве веса будем использовать вещественную функцию $\alpha(t)$, $t\in R_1$, удовлетворяющую условиям:

1) $\alpha(t)\ge 0$; $\alpha(t)=0$, $t\le 0$; $\alpha(t)=const$, $t\ge d$ $(d\in R_1,\ d>0)$;

2) функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^\infty(R_1)$;

3) существует число $\gamma\in(0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\gamma}(t)|\le c$, где $t\in R_1^+$, постоянная c не зависит от t .

Введем функцию $\tau(t)$, $t\in R_1^+$ по формуле

$$\tau=\tau(t)=-\int_t^d\frac{ds}{\alpha(s)}. \tag{I.8}$$

Очевидно, существует обратная к $\tau(t)$ функция $t=\psi(\tau)$.
Таким образом, отображение $t\to\tau(t)$ переводит взаимно-однозначно R_1^+ на R_1 .

Л е м м а I . 4 . Из условий I)- 3) следует, что для функции $\frac{1}{\alpha(\psi(\tau))}$ справедливы оценки

$$|\mathcal{D}_\tau^j \frac{1}{\alpha(\psi(\tau))}| \le c_j (1+|\tau|)^{\frac{1}{\nu}}, \quad j=0,1,\ldots \quad , \tag{I.9}$$

где $c_j > 0$ не зависят от $\tau \in R_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Вначале докажем (I.9) при $j=0$. Пусть $\tau \in (-\infty, 0]$. Тогда $t=\psi(\tau) \in (0,d]$. По условию 3), $\alpha'(s)\alpha^{-\nu}(s) \le c$. Умножив обе части этого неравенства на $\alpha^{-1}(s)$ и проинтегрировав его по отрезку $[t,d]$, получим

$$\int_t^d \frac{\alpha' ds}{\alpha^{\nu+1}(s)} \le c \int_t^d \frac{ds}{\alpha(s)} = -c\tau(t) = c\,|\tau(t)|. \tag{I.10}$$

С другой стороны, имеем

$$\int_t^d \frac{\alpha' ds}{\alpha^{\nu+1}(s)} = \int_t^d \frac{d(\alpha(s))}{\alpha^{\nu+1}(s)} = \frac{1}{\nu\alpha^\nu(t)} - \frac{1}{\nu\alpha^\nu(d)} . \tag{I.11}$$

Объединяя (I.10) и (I.11), находим

$$\frac{1}{\alpha^\nu(t)} \le \nu c |\tau(t)| + \frac{1}{\alpha^\nu(d)} \le c_1 (1+|\tau(t)|),$$

или после замены $t=\psi(\tau)$

$$\frac{1}{\alpha(\psi(\tau))} \le c_1 (1+|\tau|)^{1/\nu} \qquad \text{при } \tau \in (-\infty, 0] . \tag{I.12}$$

Для $\tau \in (0,+\infty)$, по условию I), имеем

$$\frac{1}{\alpha(\psi(\tau))} = \frac{1}{c_2} = const.$$

Таким образом, при $j=0$ неравенство (I.9) доказано.

Пусть $j>0$. Заметим, что для функций $\mathcal{D}_\tau^j \frac{1}{\alpha(\psi(\tau))}$ и $\mathcal{D}_t^k \frac{1}{\alpha(t)}$ $(t>0)$ справедливы следующие представления, легко доказываемые по индукции с использованием условий I) - 2) и равенства (I.8):

$$\mathcal{D}_\tau^j \frac{1}{\alpha(\psi(\tau))} = \sum_{k=1}^{j} \chi_k^j(t)\alpha^k(t)\mathcal{D}_t^k \frac{1}{\alpha(t)}\Big|_{t=\psi(\tau)} ; \tag{I.13}$$

$$\mathcal{D}_t^k \frac{1}{\alpha(t)} = \frac{\Phi_k(t)}{\alpha^{k+1}(t)} ;$$

где функции χ_k^j и Φ_k зависят лишь от функции $\alpha(t)$ и ее производных порядка не выше j-го и являются ограниченными в R_1. Используя указанные представления, устанавливаем оценку

$$\left| \mathcal{D}_\tau^j \frac{1}{\alpha(\psi(\tau))} \right| \le c \frac{1}{\alpha(\psi(\tau))}, \tag{I.14}$$

которая завершает доказательство леммы.

Лемма доказана.

Следствие I.I. <u>Утверждение леммы I.4 остается справедливым, если функцию $\frac{1}{\alpha(\psi(\tau))}$ заменить на $\sqrt{\alpha(\psi(\tau))}$ или $\frac{1}{\sqrt{\alpha(\psi(\tau))}}$</u>.

Лемма I.5. <u>При выполнении условий I) – 3) функция $\mathcal{D}_t^j \varphi(t,x)|_{t=\psi(\tau)}$ $(j=0,1,\dots)$ может быть представлена в виде</u>

$$\mathcal{D}_t^j \varphi(t,x)\Big|_{t=\psi(\tau)} = \sum_{\ell=0}^{j} Q_\ell^j(\tau)\mathcal{D}_\tau^\ell \varphi(\psi(\tau),x), \tag{I.15}$$

<u>где функции $Q_\ell^j(\tau)$ и все их производные по τ имеют рост не выше степенного при $|\tau| \to \infty$</u>.

Доказательство леммы I.5 легко проводится с помощью индукции по j.

По функции $\varphi(t,x)$, заданной на R_n^+, определим функцию $\varphi_\alpha(\tau,x)$, $\tau \in R_1$, по формуле

$$\varphi_\alpha(\tau,x) = \sqrt{\alpha(t)}\ \ \varphi(t,x)\Big|_{t=\psi(\tau)}, \tag{I.16}$$

где $t=\psi(\tau)$ – функция, обратная к функции (I.8).

Определение I.4. Функция $\varphi(t,x)$, $(t,x)\in R_n^+$, принадлежит пространству $S_\alpha(R_n^+)$ (короче, S_α^+), если соответствующая функция $\varphi_\alpha(\tau,x)$ принадлежит S. Система норм, задающих топологию в S_α^+, имеет вид

$$\|[\varphi(t,x)]\|_{p,\alpha}^+ = \|[\varphi(\psi(\tau),x)]\|_p, \quad p=0,1,\dots \tag{I.17}$$

Если $\varphi(t,x)\in S_\alpha^+$, то, по следствию I.I, $\varphi(\psi(\tau),x)\in S$. Очевидно, формула (I.16) устанавливает непрерывный изоморфизм пространств S_α^+ и S.

Приведем примеры функций из S_α^+.

<u>Пример I.I</u>. Функция

$$\varphi(t,x) = \frac{e^{-\tau^2(t)}}{\sqrt{\alpha(t)}}, \quad t>0,$$

где $\tau(t)$ определена в (I.8), принадлежит S_α^+.

<u>Пример I.2</u>. Любая функция $\varphi(t,x)$ из S^+, носитель которой содержится в R_n^+, принадлежит S_α^+.

Лемма I.6. <u>Справедливо включение</u> $S_\alpha^+ \subset S^+$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t,x)\in S^+_\alpha$. Для доказательства соотношения $\varphi(t,x)\in S^+$ достаточно показать, что $\lim\limits_{t\to 0}\mathcal{D}^j_t\mathcal{D}^\beta_x\varphi(t,x)=0$ для любых $j, |\beta|=0,1,\ldots$. Это непосредственно вытекает из (I.I5). Пользуясь (I.I5) и легко доказываемой оценкой $t\le c(1+|\tau(t)|)$, $t\in R^+_1$, можно вывести неравенство

$$\|[\varphi]\|^+_p\le c\,|[\varphi]|^+_{p_1,\alpha}, \tag{I.I8}$$

где $p_1=p_1(p)$.

Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что S^+_α плотно в S^+. Если $\varphi(t,x)\in S^+$, то последовательность функций

$$\varphi_k(t,x)=\begin{cases}\varphi(t-\frac{1}{k},x), & t>\frac{1}{k},\\ 0 & , 0<t\le\frac{1}{k},\end{cases}$$

принадлежащих S^+_α, сходится в S^+ к функции $\varphi(t,x)$.

Лемма I.7. <u>Для любой функции</u> $\varphi(t,x)\in C^\infty(R^+_n)$ <u>справедлива оценка</u>

$$|[\varphi(t,x)]|^+_{p,\alpha}\le c\sum_{m=0}^{p}\sup_{\substack{t\in R^+_1\\ x\in R_{n-1}}}(1+t+|x|)^p\sum_{j+|\beta|\le p}|\mathcal{D}^j_t\mathcal{D}^\beta_x(\tau^m(t)\varphi(t,x))|. \tag{I.I9}$$

Доказывается несложными преобразованиями и оценками левой части (I.I9) с применением равенства вида (I.I3).

Введем непрерывные операции в пространстве S^+_α.

I°. <u>Дифференцирование</u>. Из леммы I.5 вытекает, что дифференцирование $\mathcal{D}^j_t\mathcal{D}^\beta_x$ $(j=0,1,\ldots;\ |\beta|=0,1,\ldots)$ является линейной и непрерывной операцией в S^+_α.

2°. <u>Умножение на функцию</u> $a(t,x)$.

Определение I.5. Функция $a(t,x)\in C^\infty(R^+_n)$ принадлежит классу $\theta^+_{M,\alpha}$, если функция $a(\psi(\tau),x)$, где $\psi(\tau)$ – функция, обратная к функции (I.8), и все ее производные $\mathcal{D}^j_\tau\mathcal{D}^\beta_x a(\psi(\tau),x)$ имеют рост не выше степенного при $|\tau|+|x|\to\infty$.

Из леммы I.4 вытекает, что функции $\frac{1}{\alpha(t)},\sqrt{\alpha(t)},\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}$ $(t>0)$ принадлежат $\theta^+_{M,\alpha}$. Применяя равенство вида (I.I3), можно доказать включение $\theta^+_M\subset\theta^+_{M,\alpha}$.

Умножение на функцию $a(t,x)\in\theta^+_{M,\alpha}$ является линейной и непрерывной операцией в S^+_α.

3^0. Весовое дифференцирование. Для функции $\varphi(t,x)\in S^+_\alpha$ определим весовую производную $\mathcal{D}_{\alpha,t}$ по переменной t :

$$\mathcal{D}_{\alpha,t}\,\varphi(t,x)=\sqrt{\alpha(t)}\,\mathcal{D}_t\left(\sqrt{\alpha(t)}\,\varphi(t,x)\right),\quad t>0.$$

Эта операция линейна и непрерывна в S^+_α как суперпозиция двух предыдущих операций. Кроме того, легко проверить справедливость равенства

$$\left(\mathcal{D}^j_{\alpha,t}\,\varphi(t,x)\right)_\alpha=\mathcal{D}^j_\tau\,\varphi_\alpha(\tau,x),\quad \varphi(t,x)\in S^+_\alpha. \qquad (I.20)$$

4^0. Преобразование Фурье. Очевидно, частичное преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ отображает взаимно-однозначно и непрерывно S^+_α на S^+_α .

Подмножество в S функций вида $\varphi_0(t,x)$, где $\varphi(t,x)\in S^+_\alpha$, обозначим $S^+_{\alpha 0}$.

Введем оператор K^j , определенный на достаточно гладких функциях $v(\eta)$, $\eta\in R_1$ по формуле

$$K^j v(\eta)=F_{t\to\eta}\left[\tau^j_0(t)\,F^{-1}_{\eta\to t}[v(\eta)]\right],$$

где j - неотрицательное число;

$$\tau_0(t)=\begin{cases}\tau(t), & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}.$$

Определение I. 6. Функция $v(\eta,x)\in C^\infty(R_n)$ принадлежит пространству $\tilde{S}^+_\alpha(R_n)$ (короче, $\tilde{S}^+_\alpha$), если при всех $j=0,1,\ldots$ функции $K^j v$ принадлежат $\tilde{S}^+$. Топология в $\tilde{S}^+_\alpha$ задается системой норм

$$\|[v(\eta,x)]\|^+_{p,\alpha}=\sum_{j=0}^{p}\|[K^j v]\|^+_p\,,\quad p=0,1,\ldots \qquad (I.21)$$

Очевидно, $\tilde{S}^+_\alpha\subset\tilde{S}^+$.

Лемма I.8. Преобразование Фурье $F_{t\to\eta}$ является линейным и непрерывным отображением $S^+_{\alpha 0}$ в $\tilde{S}^+_\alpha$.

Доказательство. С использованием лемм I.2 и I.6 легко выводится неравенство

$$\|[(F_{t\to\eta}[\varphi])]\|^+_{p,\alpha}\le c_p\,|[\varphi]|^+_{p_1,\alpha}, \qquad (I.22)$$

где $\varphi(t,x)\in S^+_\alpha$; $p=0,1,\ldots$, $p_1=p_1(p)$, из которого вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма I.9. Операция обратного преобразования Фурье $F^{-1}_{\eta\to t}$

линейна и непрерывна из $\tilde{S}^+_\alpha$ в $S^+_{\alpha 0}$.

Доказательство. Пусть $v(\eta,x)\in\tilde{S}^+_\alpha$. В этом случае для $\forall j$ $K^j v\in\tilde{S}^+$, и, по лемме I.3, функции $F^{-1}_{\eta\to t}[K^j v]=\tau_0^j F^{-1}_{\eta\to t}[v]$ принадлежат S^+_0 . Применяя (I.19) и (I. 7), легко выводим оценки

$$\left|\left[\left(F^{-1}_{\eta\to t}[v(\eta,x)]\right)\right]\right|_{p,\alpha}\le C_p\,|[v(\eta,x)]|^+_{p_1,\alpha} \qquad (I.23)$$

при любых $p=0,1,\dots$, $p_1=p_1(p)$. Из неравенства (I.23) вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Из лемм I.8 и I.9 следует

Теорема I.2. <u>Операция $F_{t\to\eta}$ взаимно-однозначно и непрерывно отображает $S^+_{\alpha 0}$ на $\tilde{S}^+_\alpha$</u> .

5°. <u>Весовое преобразование Фурье.</u> На функциях $\varphi(t,x)\in S^+_\alpha$ определим весовое преобразование Фурье F_α (по переменной t) с помощью формулы (см. [I]):

$$F_\alpha[\varphi(t,x)](\eta,x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t,x)\exp\left(-i\eta\right)\int_t^d\frac{ds}{\alpha(s)}\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (I.24)$$

где $\eta\in R_1$, $\alpha(t)$ - вес.

Очевидно, $F_\alpha[\varphi(t,x)]=F_{\tau\to\eta}[\varphi_\alpha(\tau,x)]$ (I.25)

($\varphi_\alpha(\tau,x)\in S$, см. (I.16)).

Из (I.25) выводится формула обращения преобразования F_α :

$$\varphi(t,x)=F_\alpha^{-1}[v(\eta,x)](t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int_{-\infty}^{+\infty}v(\eta,x)\exp\left(i\eta\int_t^d\frac{ds}{\alpha(s)}\right)d\eta,\ t>0.$$

Преобразование F_α отображает взаимно-однозначно и непрерывно S^+_α на S , из (I.25) и (I.20) вытекают равенства

$$F_\alpha[\mathcal{D}^j_{\alpha,t}\varphi]=\eta^j F_\alpha[\varphi];\ \mathcal{D}^j_\eta F_\alpha[\varphi]=F_\alpha[\tau^j(t)\varphi],\ j=0,1,\dots;\varphi\in S^+_\alpha, \qquad (I.26)$$

откуда для любой $v(\eta,x)\in S$ (с учетом $v=F_\alpha[\varphi]$) получаем

$$\mathcal{D}^j_{\alpha,t}F_\alpha^{-1}[v(\eta,x)]=F_\alpha^{-1}[\eta^j v(\eta,x)];\ F_\alpha^{-1}[\mathcal{D}^j_\eta v(\eta,x)]=\tau^j(t)F_\alpha^{-1}[v(\eta,x)]. \qquad (I.27)$$

Из (I.25) и (I.20) выводится аналог равенства Парсеваля для весового преобразования Фурье F_α :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F_\alpha[\varphi]|^2 d\eta = 2\pi\int_0^{-\infty}|\varphi|^2 dt, \quad \varphi\in S_\alpha^+,$$

что позволяет расширить F_α до непрерывного преобразования $\mathcal{L}_2(R_n^+)$ на $\mathcal{L}_2(R_n)$.

Определение I.7. Функция $\varphi(t,x), t\in R_1, x\in R_{n-1}$, принадлежит пространству $S_\alpha(R_n)$ (короче, S_α), если сужение $\varphi|_{R_n^+} = \varphi^+(t,x)$ принадлежит S_α^+ , а сужение $\varphi|_{R_n^-} = \varphi^-(t,x)$ принадлежит S^- . Топология в S_α задается системой норм

$$\|[\varphi(t,x)]\|_{p,\alpha} = \|[\varphi^+(t,x)]\|^+_{p,\alpha} + \|[\varphi^-(t,x)]\|^-_p, \quad p=0,1,\dots \tag{I.28}$$

Из свойств пространств S_α^+ и S^- нетрудно установить, что каждая функция $\varphi(t,x)\in S_\alpha$ может быть представлена в виде суммы

$$\varphi(t,x) = \varphi_0^+(t,x) + \varphi_0^-(t,x), \tag{I.29}$$

где $\varphi_0^+\in S_{\alpha 0}^+$, $\varphi_0^-\in S_0^-$, $S_{\alpha 0}^+\subset S$, $S_0^-\subset S$.

Введем непрерывные операции в S_α . Поскольку пространство S_α определяется на основе рассмотренных выше пространств S_α^+ и S^- , нет необходимости в детальном обосновании следующих утверждений.

1°. Операция дифференцирования - линейная и непрерывная операция в S_α .

2°. Операция умножения на функцию $a(t,x)$.

Определение I.8. Функция $a(t,x), (t,x)\in R_n$, принадлежит классу $\theta_{M,\alpha}$, если сужение $a|_{R_n^+} = a^+(t,x)$ принадлежит $\theta^+_{M,\alpha}$, а сужение $a|_{R_n^-} = a^-(t,x)$ принадлежит θ_M^- .

Операция умножения на функцию $a(t,x)\in\theta_{M,\alpha}$ линейна и непрерывна в S_α .

3°. Операция весового дифференцирования - линейная и непрерывная операция в S_α .

4°. Операция преобразования Фурье. Операция $F_{x\to\xi}$ является линейной и непрерывной из S_α на S_α .

Определение I.9. Функция $v(\eta,x)\in C^\infty(R_n)$ принадлежит пространству $\tilde S_\alpha(R_n)$ (короче, $\tilde S_\alpha$), если она представима в виде суммы

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{где } v_1\in\tilde S_\alpha^+;\ v_2\in\tilde S^-. \tag{I.30}$$

Топология в $\tilde S_\alpha$ задается системой норм

$$\|[\sigma(\eta,x)]\|_{p,\alpha} = \inf_{\substack{\sigma=\sigma_1+\sigma_2 \\ \sigma_1\in\tilde{S}^+_\alpha \\ \sigma_2\in\tilde{S}^-}} \left\{ \|[\sigma_1(\eta,x)]\|^+_{p,\alpha} + \|[\sigma_2(\eta,x)]\|^-_p \right\}. \qquad (I.31)$$

Очевидно, $\tilde{S}_\alpha \subset S$. Преобразование Фурье $F_{t\to\eta}$ является линейной и непрерывной операцией из S_α на $\tilde{S}_\alpha$.

2. <u>Непрерывные операции в весовых пространствах обобщенных функций</u>.

Определение 2.I. Пространство обобщенных функций $S'(S'^+_\alpha, S'^-, S'_\alpha, \tilde{S}'_\alpha)$ определим как совокупность линейных непрерывных функционалов над пространством основных функций S (соответственно $S^+_\alpha, S^-, S_\alpha, \tilde{S}_\alpha$). Топологию определим как слабую сходимость функционалов.

Действие функционала $f(t,x)\in S'(S'^+_\alpha, S'^-, S'_\alpha, \tilde{S}'^+_\alpha)$ на функцию $\varphi(t,x)\in S(S^+_\alpha, S^-, S_\alpha, \tilde{S}_\alpha)$ будем обозначать в виде (f,φ) (соответственно $(f,\varphi)^+_\alpha, (f,\varphi)^-, (f,\varphi)_\alpha, (f,\varphi)_{\tilde{\alpha}}$). Приведем пример функции из S'_α.

<u>Пример 2.I.</u> Введем функцию $f(t,x)$ по формуле

$$f(t,x) = \begin{cases} f_1(t,x), & t>0, \\ f_2(t,x), & t<0, \end{cases}$$

где $f_1\in C(R^+_1)$; $f_2\in C(R^-_1)$; $|f_1(t,x)|\le C_1(1+|\tau(t)|+|x|)^{N_1}, t>0$;

$$|f_2(t,x)|\le C_2\frac{1}{|t|^{N_2}}(1+|t|+|x|)^{N_3}, \ t<0,$$

N_1, N_2, N_3 - любые вещественные числа, C_1 и C_2 - положительные константы, $\tau(t)$ определена в (I.8). Тогда функция $f(t,x)$ порождает функционал $f\in S'_\alpha$ по формуле

$$(f,\varphi)_\alpha = \int_{R_{n-1}}\int_{R_1} f(t,x)\varphi(t,x)\,dt\,dx, \quad \varphi\in S_\alpha.$$

Определение 2.2. Обобщенная функция $f\in S'^+_\alpha$ называется регулярной, если она порождается локально интегрируемой в R^+_n функцией $f(t,x)$ такой, что для некоторого $m\ge 0$

$$\int_{R_{n-1}}\int_{R^+_1} |f|(1+\tau(t)+|x|)^{-m}\,dt\,dx<\infty.$$

Тогда для любой $\varphi(t,x)\in S^+_\alpha$

$$(f,\varphi)^+_\alpha = \int_{R_{n-1}}\int_{R^+_1} f(t,x)\varphi(t,x)\,dt\,dx.$$

Нетрудно также дать определение регулярных обобщенных функций в $S'^-, S'_\alpha, \tilde{S}'_\alpha$.

Л е м м а 2.1. Для того чтобы линейный функционал f принадлежал $S_\alpha'^{+}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $f_\alpha \in S'$ такой, что

$$(f,\varphi)_\alpha^+ = (f_\alpha, \varphi_\alpha) \tag{2.1}$$

для любой $\varphi \in S_\alpha^+$. В представлении (2.1) каждому $f \in S_\alpha'^{+}$ соответствует единственный функционал $f_\alpha \in S'$.

Доказательство леммы легко проводится с помощью (2.1).

Таким образом, установлен непрерывный изоморфизм пространств $S_\alpha'^{+}$ и S' (ср. (1.16)).

Если $f \in S_\alpha'^{+}$ – регулярная обобщенная функция, то, очевидно, соответствующий ей регулярный функционал f_α строится по формуле

$$f_\alpha(\tau,x) = \sqrt{\alpha(t)}\; f(t,x)\Big|_{t=\psi(\tau)} . \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Сужением на R_n^+ для функционала $f \in S_\alpha'$ будем называть обобщенную функцию f^+, действующую на $\varphi^+(t,x) = \varphi\big|_{R_n^+}$, $\varphi \in S_\alpha$, по формуле $(f^+,\varphi^+)_\alpha^+ = (f,\varphi_0^+)_\alpha$. Сужением $f \in S_\alpha'$ на R_n^- назовем функционал f^-, действующий на $\varphi^-(t,x) = \varphi\big|_{R_n^-}$, $\varphi \in S_\alpha$, по формуле $(f^-,\varphi^-)^- = (f,\varphi_0^-)_\alpha$. Отметим, что в силу (1.29) определение 2.3 корректно. При этом, очевидно, $f^+ \in S_\alpha'^{+}$, $f^- \in S'^{-}$. С другой стороны, каждая пара обобщенных функций f^+, f^- $(f^+ \in S_\alpha'^{+}, f^- \in S'^{-})$ определяет функционал $f \in S_\alpha'$ по формуле

$$(f,\varphi)_\alpha = (f^+,\varphi^+)_\alpha^+ + (f^-,\varphi^-)^- . \tag{2.3}$$

Переходя к определению непрерывных операций в пространствах обобщенных функций, замечаем, что стандартный аксиоматический подход к определению этих операций основан на непрерывности соответствующих операций в пространствах основных функций.

Непрерывные операции в $S_\alpha'^{+}$. Для $f \in S_\alpha'^{+}$ определим с помощью следующих тождеств:

1) производную $\mathcal{D}_t^j \mathcal{D}_x^\beta f \in S_\alpha'^{+}$:

$$(\mathcal{D}_t^j \mathcal{D}_x^\beta f, \varphi)_\alpha^+ = (f, \mathcal{D}_x^\beta \mathcal{D}_t^j \varphi)_\alpha^+, \quad \forall \varphi(t,x) \in S_\alpha^+;$$

2) произведение $a(t,x) f \in S_\alpha'^{+}$ при $a(t,x) \in \theta_{M,\alpha}^+$:

$$(a(t,x)f,\varphi)_\alpha^+ = (f, a(t,x)\varphi)_\alpha^+, \quad \forall \varphi(t,x) \in S_\alpha^+;$$

3) весовую производную $\mathcal{D}^{j}_{\alpha,t,f} \in S'^{+}_{\alpha}$:

$$(\mathcal{D}^{j}_{\alpha,t} f, \varphi)^{+}_{\alpha} = (f, \mathcal{D}^{j}_{\alpha,t} \varphi)^{+}_{\alpha}, \quad \forall \varphi(t,x) \in S^{+}_{\alpha};$$

4) прямое $F_{x\to\xi}$ и обратное $F^{-1}_{\xi\to x}$ преобразования Фурье:

$$(F_{x\to\xi}[f], \tilde{\varphi}(t,\xi))^{+}_{\alpha} = (f, F^{-1}_{\xi\to x}[\tilde{\varphi}(t,\xi)])^{+}_{\alpha}, \quad \forall \tilde{\varphi} \in S^{+}_{\alpha};$$

$$(F^{-1}_{\xi\to x}[f], \varphi(t,x))^{+}_{\alpha} = (f, F_{x\to\xi}[\varphi(t,x)])^{+}_{\alpha}, \quad \forall \varphi \in S^{+}_{\alpha};$$

взаимно-однозначно отображающие S'^{+}_{α} на S'^{+}_{α}, причем

$$F_{x\to\xi}[\mathcal{D}^{\beta}_{x} f] = \xi^{\beta} F_{x\to\xi}[f]; \quad \mathcal{D}^{\beta}_{\xi} F_{x\to\xi}[f] = F_{x\to\xi}[x^{\beta} f];$$

5) весовое преобразование Фурье F_{α} и обратное ему F^{-1}_{α}:

$$(F_{\alpha}[f], v) = (f, F^{-1}_{\alpha}[v])^{+}_{\alpha}, \quad \forall v \in S; \quad F_{\alpha}[f] \in S';$$

$$(F^{-1}_{\alpha}[g], \varphi)^{+}_{\alpha} = (g, F_{\alpha}[\varphi]), \quad \forall \varphi \in S^{+}_{\alpha}; \quad g \in S'; \quad F^{-1}_{\alpha}[g] \in S'^{+}_{\alpha}.$$

Преобразование F_{α} (F^{-1}_{α}) взаимно-однозначно отображает $S'^{+}_{\alpha}(S')$ на $S'(S'^{+}_{\alpha})$, причем

$$F_{\alpha}[\mathcal{D}^{j}_{\alpha,t} f] = \eta^{j} F_{\alpha}[f]; \quad \mathcal{D}^{j}_{\eta} F_{\alpha}[f] = F_{\alpha}[\tau^{j}(t) f].$$

Нетрудно установить следующие свойства операций $\mathcal{D}_{\alpha,t}$ и F_{α}:

$$\mathcal{D}^{j}_{\tau} f_{\alpha} = (\mathcal{D}^{j}_{\alpha,t} f)_{\alpha}; \quad F_{\alpha}[f] = F_{\tau\to\eta}[f_{\alpha}]; \quad \forall f \in S'^{+}_{\alpha}.$$

Аналогично вводятся непрерывные операции в S'^{-}:

I) дифференцирование;

2) умножение на функцию класса θ^{-}_{M};

3) преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$ и $F^{-1}_{\xi\to x}$; непрерывные операции в S'_{α}:

I) дифференцирование;

2) весовое дифференцирование;

3) преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$ и $F^{-1}_{\xi\to x}$;

4) преобразования Фурье $F_{t\to\eta}$ и $F^{-1}_{\eta\to t}$.

С использованием свойств основных функций легко доказывается

Т е о р е м а 2.I. Преобразование Фурье $F_{t\to\eta}$ отображает взаимно-однозначно и непрерывно S'_{α} на $\tilde{S}'_{\alpha}$.

В заключение отметим следующие очевидные свойства введенных выше операций:

$$(\mathcal{D}^{j}_{t} \mathcal{D}^{\beta}_{x} f)^{+} = \mathcal{D}^{j}_{t} \mathcal{D}^{\beta}_{x} f^{+}; \quad (\mathcal{D}^{j}_{t} \mathcal{D}^{\beta}_{x} f)^{-} = \mathcal{D}^{j}_{t} \mathcal{D}^{\beta}_{x} f^{-};$$

$$(af)^+ = a^+ f^+; \qquad (af)^- = a^- f^-;$$

$$(\mathcal{D}^{j_1}_{\alpha,t} f)^+ = \mathcal{D}^{j_1}_{\alpha,t} f^+; \qquad (\mathcal{D}^{j_1}_{\alpha,t} f)^- = 0,$$

где $f \in S'_\alpha$; $j, |\beta| = 0, 1, \ldots$; $j_1 = 1, 2, \ldots$; $a(t,x) \in \theta_{M,\alpha}$.

Литература

1. Глушко В.П. Пространства функций с дробными весовыми производными и граничные задачи переменного порядка.- В сб.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск, 1981, с. 46-53.
2. Глушко В.П., Глушанкова Л.Я. Об одном псевдодифференциальном уравнении, порожденном граничной задачей переменного порядка.- Деп. ВИНИТИ № 4684-80. Деп.- 67 с.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979.- 280 с.