Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

О ЧИСЛЕ 3-МЕРНЫХ МАТРИЦ С УСЛОВИЕМ МОНОТОННОСТИ НА МАКСИМИНЫ И МИНИМАКСЫ СЕЧЕНИЙ ДАННОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Г.А.Бекишев

В статье рассматривается задача о числе 3-мерных матриц данных размеров над конечным множеством, максимины /минимаксы/ сечений данной ориентации которых образуют монотонную последовательность. Дается приложение указанной комбинаторной задачи к оценке мощности некоторых классов переходных функций многошаговых процессов, обеспечивающих линейный по числу шагов перебор управлений [1].

§ 1. Число 3-мерных матриц с монотонной последовательностью максиминов или минимаксов

Пусть $\mathfrak{A} = \{A = (a_{kln})\}$ - множество 3-мерных матриц размеров $K\times L\times N$ с элементами $a_{kln} \in \mathfrak{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$. Очевидно, $|\mathfrak{A}| = M^{KLN}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ подмножество матриц $A = (a_{kln})$, удовлетворяющих условию

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_N , \qquad /1/$$

где

$$\mu_l = \max_{1\leq k\leq K} \min_{1\leq l\leq L} a_{kll}$$

-максимины сечений матрицы $A = (a_{kln})$ ориентации (N) /т.е.максимины 2-мерных матриц $A_l = (a_{kll})$, $k = 1, 2, \ldots, K$; $l = 1, 2, \ldots, L$/.

Поставим задачу найти и оценить число $|\mathfrak{B}|$ матриц множества $\mathfrak{B}$.

Укажем сначала точную формулу для $\mathfrak{B}$. Пусть $x_i = x_i(M)$ обозначает число 2-мерных матриц (b_{kl}), $k=1,2,\ldots M$; $l=1,2,\ldots,L$; $b_{kl} \in \mathfrak{M}$, максимин которых равен i $(i=1,2,\ldots,M)$. Тогда $|\mathfrak{B}|$ выразится,очевидно,формулой

$$|\mathfrak{B}| = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_M=N} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_M^{\alpha_M} , \qquad /2/$$

где сумма берется по множеству всех целых неотрицательных решений уравнения $\alpha_1 + \ldots + \alpha_M = N$.

Нетрудно далее подсчитать, что

$$x_i = \{M^L - (M-i)^L\}^K - \{M^L - (M-i+1)^L\}^K, \; (i=1,2,\ldots,M). \qquad /3/$$

Во многих случаях основной интерес представляет вопрос о доле множества $\mathfrak{B}$ в множестве $\mathfrak{A}$. Поэтому в дальнейшем нас будут интересовать оценки числа $|\mathfrak{B}|$. Остановимся сначала на оценках чисел x_i.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \{M^L - (M-x)^L\}^K .$$

Очевидно, $x_i = \varphi(i) - \varphi(i-1)$, $i=1,2,\ldots,M$. Применяя к $\varphi(x)$ теорему Лагранжа, получим

$$x_i = \varphi'(\xi) = \frac{M^{KL}}{M} KL\{1-(1-\frac{\xi}{M})^L\}^{K-1}(1-\frac{\xi}{M})^{L-1}, \quad i-1<\xi<i. \qquad /4/$$

Используя /4/, докажем неравенство

$$x_i \leq M^{KL}\left(\frac{L}{M}\right)^K K i^{K-1}, \quad (i=1,2,\ M), \qquad /5/$$

где знак равенства будет лишь при $K=L=1$.

Действительно, при $K=L=1$ /5/ будет равенством $1=1$. При $KL>1$ из /4/ следует, что

$$x_i \doteq \frac{M^{KL}}{M} KL\{1-(1-\frac{i}{M})^L\}^{K-1},$$

и для доказательства /5/ достаточно показать, что

$$M^{K-1}\{1-(1-\frac{i}{M})^L\}^{K-1} \leq L^{K-1} i^{K-1}, (i=1,2,\dots,M). \qquad /6/$$

Рассмотрим варианту $a_n^{(L)} = n\{1-(1-\frac{i}{n})^L\},\ n=1,2,\dots$. Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(L)} = L\cdot i$$

Индукцией по L легко показать, что

$$a_i^{(L)} \leq a_{i+1}^{(L)} \leq \dots,$$

причем при $L \geq 2$ эти неравенства будут строгими. Неравенство /6/ теперь становится очевидным.

Из /5/ следует, что

$$x^* = \max_{1\leq i\leq M} x_i \leq \frac{M^{KL}}{M} KL^K, \qquad /7/$$

причем /7/ будет строгим во всех случаях, кроме $K=L=1$. При $K=L$ можно доказать более сильное неравенство:

$$x^* \leq \frac{M^{K^2}}{M} K, \qquad /8/$$

где знак равенства достигается лишь при $K=1$.

Действительно, положим $\Psi(x) = \{M^K - (M-x)^K\}^K$. Очевидно,

$$x^* \leq \max_{0\leq x\leq M} \Psi'(x),$$

где $\Psi(x)$ вычисляется по формуле /4/ при $L=K$ и $\xi = x$. Легко убедиться, что $\Psi'(0) = \Psi'(M) = 0$, а единственный максимум $\Psi'(x)$ на $[0,M]$ достигается в точке $x = M(1-\frac{1}{\sqrt[K]{K+1}})$. Следовательно,

$$\max_{0\leq x\leq M} \Psi'(x) = \frac{M^{K^2}}{M} \sqrt[K]{K+1}\ \frac{K^{K+1}}{(K+1)^K}.$$

Поскольку же

$$\sqrt[K]{K+1}\left(\frac{K}{K+1}\right)^K \leq 1$$

/равенство лишь при $K=1$ /, то /8/ справедливо.

Рассмотрим еще поведение $x_i = x_i(M)$ при фиксированном i и $M\to\infty$. Запишем x_i в виде

$$x_i = M^{KL}\{(1-(1-\frac{i}{M})^L)^K - (1-(1-\frac{i-1}{M})^L)^K\}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{M\to\infty} M^K\{(1-(1-\frac{i}{M})^L)^K - (1-(1-\frac{i-1}{M})^L)^K\} = L^K\{i^K - (i-1)^K\}.$$

Следовательно,

$$x_i = x_i(M) \sim M^{KL}\left(\frac{L}{M}\right)^K\{i^K - (i-1)^K\} \quad (M\to\infty). \qquad /9/$$

Перейдем теперь к оценкам числа $|\mathcal{B}|$. Начнем с нижних оценок.

Таких оценок мы укажем несколько и сравним их. Наиболее просто оценка $|\mathcal{B}|$ снизу получается в результате оценки класса $\mathcal{C}$ матриц $A=(a_{KLn})\in\mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию

$$a_{KL1}\leq a_{KL2}\leq\ldots\leq a_{KLN}\quad (K=1,2,\ldots,K;\ L=1,2,\ldots L). \qquad /10/$$

Очевидно,

$$|\mathcal{C}| = \left(C_{M+N-1}^{N}\right)^{KL}. \qquad /11/$$

Оценим $|\mathcal{C}|$ в частном случае, когда $N=M$. Такая оценка нам понадобится в § 3. В этом случае мы имеем

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{KL}\left(M^{KLN}\right)^{\frac{4M-\log_2 M}{2M\log_2 M}} < |\mathcal{C}| = \left(\frac{1}{2}C_{2M}^{M}\right)^{KL} < \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{KL}\left(M^{KLM}\right)^{\frac{4M-\log_2 M}{2M\log_2 M}}. \qquad /12/$$

Действительно, известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{C_n^{[\frac{n}{2}]}}{2^n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Легко, однако, показать, что обе сходящиеся к $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ последовательности

$$\sqrt{2p}\cdot\frac{C_{2p}^{p}}{2^{2p}},\quad \sqrt{2p+1}\cdot\frac{C_{2p+1}^{p}}{2^{2p+1}},\ (p=0,1,2,\ldots)$$

являются строго монотонно возрастающими. Отсюда следует неравенство

$$C_n^{[\frac{n}{2}]}<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}}. \qquad /13/$$

Используя это неравенство, легко получаем верхнюю оценку /12/. С помощью известного неравенства

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2M}}{\sqrt{M}}<C_{2M}^{M}$$

аналогично получим нижнюю оценку /12/.

Отметим еще асимптотическую формулу для $|\mathcal{C}|$ при $N=M$:

$$|\mathcal{C}|\sim\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{KL}\left(M^{KLM}\right)^{\frac{4M-\log_2 M}{2M\log_2 M}}\quad (M\to\infty). \qquad /14/$$

Возвращаясь теперь к оценке числа $|\mathcal{B}|$ имеем $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$. Следовательно,

$$\left(C_{M+N-1}^{N}\right)^{KL}\leq|\mathcal{B}|. \qquad /15/$$

Наряду с /15/ укажем теперь следующую нижнюю оценку для $|\mathcal{B}|$.

Рассмотрим вещественную форму $N^{\underline{й}}$ степени от M переменных

$$(x_1+x_2+\ldots+x_M)^N=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_M=N}A_{\alpha_1\ldots\alpha_M}x_1^{\alpha_1}\ldots x_M^{\alpha_M},$$

где

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_M}=\frac{N!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_M!}.$$

Пусть

$$\bar{A}_{N,M}=\max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_M}A_{\alpha_1\ldots\alpha_M}=\frac{N!}{\left(\left[\frac{N}{M}\right]!\right)^M\left(\left[\frac{N}{M}\right]+1\right)^{N-M[\frac{N}{M}]}}. \qquad /16/$$

Очевидно, при $x_i\geq 0$ будет справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{M}x_i\right)^N\leq\bar{A}_{N,M}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_M=N}x_1^{\alpha_1}\ldots x_M^{\alpha_M}. \qquad /17/$$

Считая теперь, что x_i в /17/ определены по формулам /3/ и учитывая, что $\sum_{i=1}^{M}x_i=M^{KL}$, получаем /см. /2/ /

$$\frac{M^{KLN}}{\bar{A}_{N,M}}\leq|\mathcal{B}|. \qquad /18/$$

При $N,M \geq 2$ неравенство /18/ будет строгим. Заметим, что $\bar{A}_{N,M} \leq N!$, причем равенство имеет место лишь при $M \geq N$. Таким образом, во всех случаях доля $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ не менее чем $\frac{1}{N!}$.

Для вычисления $\bar{A}_{N,M}$, наряду с /16/, можно пользоваться рекуррентной формулой

$$\bar{A}_{N+1,M} = \bar{A}_{N,M} \cdot \frac{N+1}{\left[\frac{N}{M}\right]+1}. \qquad /19/$$

Эта формула непосредственно следует из формулы /16/, если ее переписать в виде

$$\bar{A}_{N,M} = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{N-1}\left(\left[\frac{i}{M}\right]+1\right)}, \qquad /20/$$

воспользовавшись для этого очевидным тождеством

$$\prod_{i=0}^{N-1}\left(\left[\frac{i}{M}\right]+1\right) = \left(\left[\frac{N}{M}\right]!\right)^M \left(\left[\frac{N}{M}\right]+1\right)^{N-M\left[\frac{N}{M}\right]}. \qquad /21/$$

Оценка /18/ сильнее оценки /15/, так как при $KL,N,M \geq 2$ /за исключением случая $KL=N=M=2$ / справедливо будет неравенство

$$\frac{M^{KLN}}{\bar{A}_{N,M}} > \left(C^N_{M+N-1}\right)^{KL}. \qquad /22/$$

Для доказательства /22/ достаточно, очевидно, доказать неравенство

$$\frac{M^{2N}}{\bar{A}_{N,M}} > \left(C^N_{N+M-1}\right)^2 \quad (N,M \geq 2,\ NM > 4). \qquad /23/$$

Непосредственная проверка показывает, что /23/ верно в точках $(2,M)$, $M \geq 3$. Далее с помощью /19/ можно показать, что, если /23/ выполняется в точке (N,M), $M \geq 3$, то оно будет выполняться и в точке $(N+1, M)$. Тем самым будет доказана справедливость /23/ при $N \geq 2$ и $M \geq 3$. При $M=2$ /23/ принимает вид

$$2^{2N} / C_N^{\left[\frac{N}{2}\right]} > \left(C^N_{N+1}\right)^2 = (N+1)^2. \qquad /24/$$

При $N=3$ это неравенство очевидно. При $N \geq 4$ мы имеем

$$\frac{2^N}{\sqrt{N}} < \frac{2^N}{\sqrt{N}} \cdot \frac{2^N\sqrt{N}}{(N+1)^2} = \frac{2^{2N}}{(N+1)^2},$$

и справедливость /24/ будет вытекать из /13/. Доказательство /23/ на этом заканчивается. Для полного доказательства неравенства /22/ остается проверить его в точках $(2,2,K,L)$ при $KL \geq 3$, для чего достаточно рассмотреть случай $KL=3$ Легко видеть, что /22/ выполняется в точках $(2,2,K,L)$, $KL=3$.

Заметим, что из приведенных выкладок вытекает следующая оценка для числа сочетаний:

$$\frac{M^N}{\bar{A}_{N,M}} < C^N_{M+N-1} < \frac{M^N}{\sqrt{\bar{A}_{N,M}}} \qquad /25/$$

/ $M,N \geq 2$, кроме случая $M=N=2$, при котором правая часть не выполняется /.

Чтобы получить более сильную, чем /18/ нижнюю, а заодно и верхнюю оценку для числа $|\mathfrak{B}|$, докажем следующую теорему для симметрических средних.

ТЕОРЕМА I. Для всех $x_i \geq 0$ имеют место неравенства

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{M} x_i}{M}\right)^N \leqslant \frac{\sum\limits_{\alpha_1+\ldots+\alpha_M=N} x_1^{\alpha_1}\ldots x_M^{\alpha_M}}{C^N_{M+N-1}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{M} x_i^N}{M} \;. \qquad /26/$$

При $N\geq 2$ неравенства /26/ будут строгими за исключением случая $x_1=x_2=\ldots=x_M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $N=1$ или $M=1$ теорема очевидна. Пусть $N,M\geq 2$. Докажем сначала левую часть /26/. Для этого мы покажем, что наименьшее значение m_* формы

$$\Phi_{N,M}(x_1,\ldots,x_M)=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_M=N} x_1^{\alpha_1}\ldots x_M^{\alpha_M}$$

на симплексе

$$\Omega_M:\ \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{M} x_i=D\\ x_i\geq 0\end{cases}$$

равно $m_*=\frac{C^N_{M+N-1}}{M^N}D^N$ и достигается в единственной точке $\left(\frac{D}{M},\frac{D}{M},\ldots,\frac{D}{M}\right)\in\Omega_M$.

Так как $\Phi_{N,M}$ - однородный многочлен, то в дальнейшем будем считать $D=1$. При $M=2$ и $N\geq 2$ имеем

$$\Phi_{N,2}(x,y)=\sum_{i=0}^{N} x^{N-i}y^i \;.$$

Очевидно,

$$\min_{\Omega_2}\Phi_{N,2}(x,y)=\min_{0\leq x\leq 1}\sum_{i=0}^{N} x^{N-i}(1-x)^i \;.$$

Рассмотрим на $[0,1]$ многочлен

$$g(x)=\sum_{i=0}^{N} x^{N-i}(1-x)^i .$$

Покажем, что

$$\min_{0\leq x\leq 1} g(x)=g\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{N+1}{2^N} \;, \qquad /27/$$

причем точка $x=\frac{1}{2}$ - единственная, в которой $g(x)$ принимает свое наименьшее значение.

Имеем

$$g'(x)=\sum_{i=0}^{N-1}(N-2i-1)\,x^{N-i-1}(1-x)^i .$$

Легко, далее, проверить, что $g'(\frac{1}{2})=0$. Покажем, что других корней на $[0,1]$ многочлен $g'(x)$ не имеет. Действительно,

$$g''(x)=\sum_{i=0}^{N-2}\{(N-2i-1)(N-i-1)-(i+1)(N-2i-3)\}\,x^{N-i-2}(1-x)^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-2}\{Ai^2+Bi+C\}x^{N-i-2}(1-x)^i \;,$$

где

$$A=4\;;\quad B=4+4(1-N);\quad C=(N-1)(N-2)+2 \;.$$

Так как $A>0$ и $B^2-4AC<0$, то $Ai^2+Bi+C>0$ $(i=0,1,\ldots,N-2)$, т.е. $g''(x)>0,\ x\in[0,1]$.

Равенство /27/ доказано.

Пусть наше утверждение о m_* доказано для $\Phi_{N,M-1}$, $M\geq 3$, и пусть $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_M)\in\Omega_M$ - некоторая точка, в которой $\Phi_{N,M}$ принимает свое наименьшее значение на Ω_M . Покажем, что $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_M=\frac{1}{M}$.

Запишем форму $\Phi_{N,M}$ в виде

$$\Phi_{N,M}(x_1,\dots,x_M)=\sum_{i=0}^{N} x_K^{N-i}\cdot\Phi_{i,M-1}(x_1,\dots,x_{K-1},x_{K+1},\dots,x_M) .$$

Следовательно,

$$m_*=\Phi_{N,M}(\xi_1,\dots,\xi_M)=\sum_{i=0}^{N}\xi_K^{N-i}\Phi_{i,M-1}(\xi_1,\dots,\xi_{K-1},\xi_{K+1},\dots,\xi_M) .$$

На основании предположения индукции можно утверждать, что

$$\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_{K-1}=\xi_{K+1}=\dots=\xi_M=\frac{1-\xi_K}{M-1} .$$

Аналогично для $j\neq k$ можно утверждать, что

$$\xi_1=\dots\xi_{j-1}=\xi_{j+1}=\dots=\xi_M=\frac{1-\xi_j}{M-1} .$$

Следовательно, при $l\neq k,\ l\neq j$ имеем

$$\xi_l=\frac{1-\xi_k}{M-1}=\frac{1-\xi_j}{M-1} ,$$

откуда следует, что $\xi_k=\xi_j$.

Итак, точка $(\xi_1,\dots,\xi_M)$, в которой форма $\Phi_{N,M}$ принимает свое наименьшее значение m_* на Ω_M , единственная, причем легко проверить, что

$$\Phi_{N,M}\left(\frac{1}{M},\dots,\frac{1}{M}\right)=\frac{C^N_{M+N-1}}{M^N} .$$

Левая часть /26/ доказана.

Докажем теперь правую часть /26/. Обозначим через Σ_α сумму членов формы $\Phi_{N,M}$, имеющих с точностью до порядка одинаковую систему показателей $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_M)$ и введем средние

$$P_\alpha=\frac{\Sigma_\alpha}{|\Sigma_\alpha|} .$$

Правая часть /26/ может быть теперь записана в следующем виде:

$$\frac{\sum_\alpha P_\alpha|\Sigma_\alpha|}{C^N_{N+M-1}}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{M}x_i^N}{M}\equiv P_{\bar\alpha} , \qquad /28/$$

где $\bar\alpha=(N,0,\dots,0)$.

Средние P_α - это средние Мюрхеда, и на основании теоремы Мюрхеда[2] мы для любых $x_i>0$ имеем

$$P_{\bar\alpha}\geqslant P_\alpha ,$$

причем знак равенства имеет место лишь в случае, когда / с точностью до порядка координат / $\alpha=\bar\alpha$, или когда все x_i равны. Отсюда непосредственно вытекает /28/, а значит, правая часть /26/ при $x_i>0$.

Индукцией по числу переменных легко показать, что при $x_i\geqslant0$ правая часть /26/ также выполняется и притом строго, за исключением случая $x_1=x_2=\dots=x_M$. Теорема I доказана.

Из теоремы I вытекают следующие оценки для $|\mathfrak{X}|$. Пусть x_i в теореме I определены формулами /3/. Так как в этом случае $\sum_{i=1}^{M}x_i=M^{KL}$ и $\Phi_{N,M}(x_1,\dots,x_M)=|\mathfrak{X}|$, то на основании теоремы I получаем

$$\frac{C^N_{M+N-1}}{M^N}M^{KLN}\leqslant|\mathfrak{X}|\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{M}x_i^N}{M}C^N_{M+N-1} ; \qquad /29/$$

Неравенства /29/ будут строгими за исключением случаев: а/ $M=1$ б/ $N=1$, в/ $K=L=1$.

Из /17/ при $x_i = 1$ вытекает неравенство

$$\frac{M^N}{\overline{\overline{A}}_{N,M}} \leqslant C^N_{N+M-1} \ ,$$

где знак равенства будет лишь при $M=1$ или $N=1$. Отсюда мы заключаем, что нижняя оценка /29/ для $|\mathcal{L}|$ сильнее оценки /18/ и, таким образом, доля $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{A}$ не менее, чем $C^N_{N+M-1}\cdot\frac{1}{M^N}$. Естественно, что наряду с/29/ мы имеем для $|\mathcal{L}|$ еще и тривиальную оценку сверху: $|\mathcal{L}| \leqslant M^{KLN}$.

Мы подробно рассмотрели вопрос о числе матриц, удовлетворяющих условию /1/. Столько же будет матриц, удовлетворяющих условию $\mu_i \geqslant \mu_{i+1}$. Совершенно аналогично рассматривается задача о числе 3-мерных матриц с условием монотонности на минимаксы сечений данной ориентации. Здесь, вообще, уместно сделать следующее замечание.

Если A - произвольное конечное множество и $A_1,\dots,A_M$ -классы разбиения множества A, то при данном натуральном N мощность множества

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\alpha_1+\dots+\alpha_M=N} (A_1^{\alpha_1}\times A_2^{\alpha_2}\times\dots\times A_M^{\alpha_M})$$

/где $A_i^{\alpha_i} = \overbrace{A_i\times A_i\times\dots\times A_i}^{\alpha_i}$, $\times$ - знак прямого произведения/ может быть найдена по формуле /2/ при условии, что $|A_i| = x_i$. Оценки для $|\mathcal{L}|$, вытекающие из теоремы 1, имеют вид:

$$\frac{C^N_{N+M-1}}{M^N}|A|^N \leqslant |\mathcal{L}| \leqslant C^N_{N+M-1}\frac{\sum_{i=1}^{M}|A_i|^N}{M} .$$

§ 2. Оценка числа 3-мерных матриц с условием одновременной монотонности максиминов и минимаксов

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о числе 3-мерных матриц $A=(a_{kln})$, удовлетворяющих условию

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_N \ , \qquad /30/$$

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \dots \geqslant \nu_N \ , \qquad /31/$$

где μ_i и ν_i $(i=1,2,\dots,M)$ обозначают соответственно максимин и минимакс сечения $A=(a_{kli})$ 3-мерной матрицы $A=(a_{kln})$.

При изменении в одном из условий /30/ или /31/, или даже в обоих сразу, знаков неравенства на противоположные - результаты будут аналогичными.

Обозначим через ϑ - подмножество матриц $A=(a_{kln})\in\mathfrak{A}$, удовлетворяющих условиям /30/ и /31/. Пусть z_{ij}, $i,j=1,2,\dots,M$ означает число 2-мерных матриц (b_{kl}) размеров $K\times L$, $b_{kl}\in\mathfrak{M}$, максимин которых равен i, а минимакс - j. Легко понять, что $|\vartheta|$ выразится формулой

$$|\vartheta| = \sum_{\substack{i_1\geqslant\dots\geqslant i_N\\ j_1\geqslant\dots\geqslant j_N}} z_{i_1j_1} z_{i_2j_2}\dots z_{i_Nj_N} \ , \qquad /32/$$

где сумма берется по всем парам монотонно невозрастающих последовательностей $i_1,\dots,i_N$ и $j_1,\dots,j_N$, составленным из чисел множества $\mathfrak{M} = \{1,2,\dots,M\}$.

Очевидно, далее

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_M=N} z_{i1}^{\alpha_1}\ldots z_{iM}^{\alpha_M} < |\vartheta| \quad . \qquad /33/$$

Замечая теперь, что

$$\sum_{j=1}^{M} z_{ij} = x_i \quad i=1,2,\ldots,M$$

и применяя теорему I, получим из /33/:

$$\frac{C^N_{N+M-1}}{M^N}\sum_{i=1}^{M} x_i^N < |\vartheta| \quad . \qquad /34/$$

Воспользовавшись снова /26/, получим

$$\frac{C^N_{N+M-1}}{M^{2N-1}} M^{KLN} \leq \frac{1}{M^{N-1}}|\varkappa| < |\vartheta| \quad . \qquad /35/$$

Очевидной оценкой сверху будет $|\vartheta| < |\varkappa|$.

§ 3. Некоторые приложения

Рассмотрим в несколько упрощенной постановке следующую задачу динамического программирования, изучавшуюся в [I].

Пусть

$$m_i = f(k_i, l_i, m_{i-1}) \quad (i=1,2,\ldots) \qquad /36/$$

– многошаговый процесс с 2-мя управляющими параметрами $k\in Q_1=\{1,2,\ldots,K\}$; $l\in Q_2=\{1,2,\ldots L\}$ и конечным множеством $\mathfrak{M}=\{1,2,\ldots,M\}$ состояний m .

Пусть $T^{l_1\ldots l_n}_{k_1\ldots k_n}(m_0)$ – состояние, в которое переходит система /36/ за n шагов из начального состояния m_0 под воздействием управления $(k_1,l_1),\ldots,(k_n,l_n)$.

Пусть, далее,

$$D_n(m) = \max_{(k_1\ldots k_n)\in Q_1^n}\ \min_{(l_1\ldots l_n)\in Q_2^n} T^{l_1\ldots l_n}_{k_1\ldots k_n}(m) \quad ;$$

$$d_n(m) = \min_{(k_1\ldots k_n)\in Q_1^n}\ \max_{(l_1\ldots l_n)\in Q_2^n} T^{l_1\ldots l_n}_{k_1\ldots k_n}(m) \quad .$$

Требуется для фиксированных n и m_0 найти значение максимина $D_n(m)$ и такой процесс управления $(k_1^0,l_1^0),\ldots,(k_n^0,l_n^0)$ в результате которого система /36/ из начального состояния m_0 перейдет на n -м шаге в состояние $D_n(m)$.

Решение этой задачи требует в общем случае полного перебора управлений на n шагов, число которых будет равно $(KL)^n$. Из результатов [I] вытекает, что в случае монотонности функций $D_1(m)$ и $d_1(m)$ на $\mathfrak{M}$ максимин $D_n(m_0)$ может быть вычислен по одной из формул:

$$D_n(m_0) = \underbrace{D_1(D_1(\ldots D_1}_{n}(m_0)\ldots) \qquad /37/$$

/если $D_1(m+1)\geq D_1(m)$, $m\in\mathfrak{M}$ /;

$$D_n(m_0) = \underbrace{D_1(d_1(d_1(\ldots d_1}_{n}(m_0)\ldots) \qquad /38/$$

/если $D_1(m+1)\leq D_1(m)$ и $d_1(m+1)\geq d_1(m)$ /;

$$D_n(m_0) = \begin{cases} D_1(d_1(D_1(\ldots D_1(m_0)\ldots),\ n & \text{нечетно,} \\ D_1(d_1(D_1(\ldots d_1(m_0)\ldots),\ n & \text{четно} \end{cases} \qquad /39/$$

/если $D_1(m+1)\leq D_1(m)$ и $d_1(m+1)\leq d_1(m)$/,

и перебор управлений будет не более числа $n\cdot KL$.

В качестве примеров переходных функций $f(k,l,m)$, индуцирующих монотонные функции $D_1(m)$ и $d_1(m)$, можно назвать функции $\varphi(k,l)+\psi(m)$, $\varphi(k,l)\cdot\psi(m)$, где $\psi(m)$ – монотонная функция. И, вообще, имеет место следующая очевидная

ТЕОРЕМА 2. Пусть при любых фиксированных $k\in Q_1$ и $l\in Q_2$ функция $f(k,l,m)$ монотонно не убывает / не возрастает / на множестве $\mathfrak{M}$. Тогда обе функции $D_1(m)$ и $d_1(m)$ также монотонно не убывают / не возрастают / на $\mathfrak{M}$.

Оценим теперь число максиминных задач, решение которых может быть найдено по формулам /37/–/39/. Общее число таких задач, соответствующее числу различных переходных функций $f(k,l,m)((k,l,m)\in Q_1\times Q_2\times\mathfrak{M}$, $f(k,l,m)\in\mathfrak{M})$, равно M^{KLM}.

Каждой функции $f(k,l,m)$ взаимно однозначно соответствует 3-мерная матрица

$$A=(a_{klm}),\quad a_{klm}=f(k,l,m)\in\mathfrak{M}$$
$$(k=1,2,\dots,K;\ l=1,2,\dots,L;\ m=1,2,\dots,M).$$

В этой интерпретации $D_1(m_0)$ будет максимином сечения $A_{m_0}=(a_{klm_0})$ матрицы A, а $d_1(m_0)$ – минимаксом / в общепринятом смысле / транспонированной матрицы $A^T_{m_0}$.

Из результатов § I и § 2 вытекает теперь, что существует по меньшей мере $\frac{C^M_{2M-1}}{M^M}M^{KLM}$ максиминных задач, решение которых может быть получено по формуле /37/; $\frac{C^M_{2M-1}}{M^{2M-1}}M^{KLM}$ задач – по формуле /38/ и еще столько же – по формуле /39/. Число задач, удовлетворяющих теореме 2, будет оцениваться формулой /12/ из § I.

Поступила в редакцию 2.I.1968.

Литература

I. В.В.Леонов. О задаче динамического программирования для многошаговых процессов. "Дискретный анализ", вып. 2. Изд. ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1964. Стр. 48 –55.

2. Г.Г.Харди., Д.Е. Литтлвуд. Г. Пойа. Неравенства. ИЛ., М., 1948.