Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ "МИНОРАНТНОЙ" ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В СЛУЧАЕ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В.И.Болдырев

В данной заметке приводится теорема существования решения "минорантной" игры, определенной ниже. Эта теорема является обобщением теоремы [I].

Пусть дана система n -го порядка:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)\cdot u+g(x,t)\cdot v+h(x,t) \qquad /I/$$

с начальными условиями

$$x(0)=x_0\ , \qquad /2/$$

которая решается на отрезке $[0,T]$.

На правую часть системы /I/ наложены следующие условия:

I/ управления $u(t)\in D_1,\ v(t)\in D_2$, где D_1 и D_2 - классы измеримых ограниченных управлений, причем при $0\leq t\leq T$ $u(t)\in U,\ v(t)\in V$ /U,V - замкнутые, выпуклые, ограниченные многогранники/;

2/ функции $f(x,t),\ g(x,t),\ h(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x и t в области $X\times[0,T]$, где X - область изменения x - замкнутое, ограниченное множество.

Каждый из игроков I и II стремится максимизировать свой функционал соответственно:

$$R_1(u,v)=S\cdot X(T)\ , \qquad /3/$$

$$R_2(u,v)=C\cdot X(T)\ , \qquad /4/$$

где S и C - постоянные n -мерные векторы. Игрок II может выбрать управление $\tilde v(t)=v(t,u(t))$, которое при любом фиксированном $u(t)$ доставляет максимум функционалу:

$$R_2(u(t),\tilde v(t))=\max R_2(u(t),v),\ v(t)\in D_2\ , \qquad /5/$$

а игрок I - управление $\tilde u(t)=u(t,\tilde v(t))$, которое доставляет при фиксированном $\tilde v(t)$ максимум функционалу:

$$R_1(\tilde u(t),\tilde v(t))=\max R_1(u,\tilde v(t)),\ u(t)\in D_1\ . \qquad /6/$$

Игра /I/ - /6/ называется "минорантной". В этой игре выигрыши игроков будут соответственно:

$$\begin{aligned}\tilde W_1&=R_1(\tilde u(t),\tilde v(t)),\\ \tilde W_2&=R_2(\tilde u(t),\tilde v(t)).\end{aligned} \qquad /7/$$

Пара величин $\tilde W_1,\tilde W_2$, пара управлений $\tilde u(t),\tilde v(t)$ и соответствующая им траектория $\tilde x(t)$ называются решением "минорантной" игры. Нижеследующая теорема является обобщением теоремы [I] для случая "минорантной" игры с двумя функционалами.

ТЕОРЕМА. При условиях /I/ - /2/, наложенных на правую часть системы /I/, существует решение минорантной игры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выборе управлений согласно /5/-/7/ строятся

последовательности непрерывных управлений: $\{u^{(i)}(t)\}, \{v^{(i)}(t)\}, (i=1,2,\ldots)$

такие, что

$$R_2(u^{(i)}, v^{(i)}) = \operatorname{Sup} R_2(u^{(i)}, v), \ v(t) \in D_2 \ ,$$
$$\lim_{i \to \infty} R_1(u^{(i)}, v^{(i)}) = \operatorname{Sup} R_1(u, \tilde{v}), \ u(t) \in D_1 \ . \qquad /8/$$

Из последовательности $X^{(i)}(t)$ решений системы /I/, определенных для управлений $u^{(i)}(t), v^{(i)}(t)$, выбирается равномерно сходящаяся к $\tilde{X}(t)$ последовательность. Из последовательностей управлений $u^{(i)}(t), v^{(i)}(t)$ выбираются слабо сходящиеся соответственно к $\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)$ последовательности.

Найденное таким образом $\tilde{X}(t)$ является решением системы /I/ для управлений $\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)$. Методом от противного устанавливается, что при $\tilde{u}(t)$, определенном согласно /8/,

$$R_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = \operatorname{Sup} R_2(\tilde{u}, v), \ v(t) \in D_2 \ ,$$

откуда и следует утверждаемая теорема.

Поступила в редакцию 3.5.1968 г.

Литература

I. Ю.А. Кочетков. Применение метода Понтрягина к исследованию минимальных задач процессов управления. Изв. АН СССР, "Тех. кибернетика", Изд. "Наука", № 5, 1965.