Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

В.Н. Лагунов

0. В данной статье мы рассматриваем игру качества, понимая под захватом совпадение точек-объектов. Движение точек-объектов происходит в n -мерном евклидовом пространстве E^n, $n\geq 2$, в котором введена некоторая декартова система координат Ω. Предполагается, что движение объектов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\ddot{\bar r}_i + k_i(\dot r_i)\dot{\bar r}_i = \bar u_i, \quad u_i \leq w_i, \quad w_i > 0, \quad i=1,2, \qquad /0.1/$$

где $\bar r_i$ - радиус-вектор i -го объекта /при $i=1$ - преследуемого, а при $i=2$ - преследующего/ относительно координатной системы Ω,

$\dot r_i = |\dot{\bar r}_i| = \left|\frac{d\bar r_i}{dt}\right|$, / t - время, $t\geq 0$ /, $\bar u_i$ - управление i -го объекта, являющееся измеримой функцией, $k_i(\dot r_i)$ - измеримые ограниченные функции /аргумента $\dot r_i$ /:

$$0\leq k_i(\dot r_i)\leq c_i<\infty, \quad \dot r_i\geq 0; \qquad /0.2/$$

предполагается далее, что существуют наименьшие константы $v_i<\infty$, удовлетворяющие соотношениям:

$$k_i(v_i)\cdot v_i = w_i, \qquad /0.3/$$

причем в начальный момент времени $t=0$ выполняются неравенства:

$$\dot r_i(0)\leq v_i. \qquad /0.4/$$

Из /0.1/, /0.2/, /0.4/ видно, что v_i -максимум скорости объекта $\bar r_i$ Отсюда вытекает, что функцию k_i /коэффициент трения/ имеет смысл рассматривать лишь на отрезке $[0, v_i]$. Будем, кроме того, считать, что функция k_2 удовлетворяет еще такому условию

$$k_2(v_2)\geq k_2(\dot r_2), \quad 0\leq \dot r_2 < v_2. \qquad /0.5/$$

Введем обозначения:

$$\bar r = \bar r_2 - \bar r_1, \quad \Delta w = w_2 - w_1, \quad \Delta k = k_2 - k_1,$$

Ω' - координатная система, начало которой совпадает с объектом $\bar r_1$, а координатные оси имеют направление соответствующих координатных осей системы Ω.

Перечислим теперь условия, различные подмножества которых будут входить в формулировки теорем данной работы.

а/ В каждый момент времени $t_0\geq 0$ объектам известны векторы $\bar r_i(t_0)$, $\dot{\bar r}_i(t_0)$, $i=1,2$, однако поведение противника в будущем /т.е. векторы $\bar r_i(t), \dot{\bar r}_i(t)$ для $t>t_0$ / не предполагается известным.

б/ В каждый момент времени $t_0\geq 0$ объектам известны векторы $\ddot{\bar r}_i(t_0)$, $i=1,2$, однако в тот же момент времени векторы $\ddot{\bar r}_1(t), \ddot{\bar r}_2(t)$ для $t\geq t_0$ не предполагаются известными.

в/. $\Delta w > \sup\limits_{0\leq \dot r_i\leq v_i} |\Delta k|\cdot v_1,$

г/ $\inf\limits_{0\le \dot r_i \le v_i} \Delta k > 0$,

д/ $\dot r_2 \ge \dot r_2^{\circ} > 0, \quad t \ge 0$,

е/ $\frac{\dot r_i^{\circ}}{w_i} < \frac{r(0)}{v_1 + v_2}$,

ж/ $n \ge 3$; /n -размерность/.

Из /0.1/ видно, что при заданной функции k_i и выполнении условия а/ задание $\ddot{\bar r}_i(t_0)$ однозначно определяет $\bar u_i(t_0)$ и, наоборот, задание $\bar u_i(t_0)$ однозначно определяет $\ddot{\bar r}_i(t_0)$. По этой причине мы можем считать управлением i -го объекта функцию $\ddot{\bar r}_i(t)$, $t \ge 0$ /условие а/ будет входить во все теоремы данной работы/. Такая точка зрения позволит нам применить построения работ [3], [4]. В частности, допустимым управлением объекта $\bar r_i$ мы будем считать любую измеримую вектор-функцию $\ddot{\bar r}_i$, обладающую сверх того следующим свойством: если из центра O_i шара W_i радиуса w_i отложить вектор

$$\overline{O_i O} = k_i(\dot r_i)\dot{\bar r}_i\,, \quad t = t_0 \ge 0, \qquad /0.6/$$

то при совмещении начала вектора $\ddot{\bar r}_i(t_0)$ с точкой O его конец должен принадлежать шару W_i /подробности о таком определении класса допустимых управлений содержатся в работе [4], п.I, случай (α) /.

Скажем, что преследующее управление существует для начальных условий $\bar r_i(0), \dot{\bar r}_i(0), \ i = 1, 2$, если существует функция

$$\ddot{\bar r}_2(t) = \bar f_2(\ddot{\bar r}_1(t), \dot{\bar r}_i(t), \bar r_i(t), \dot{\bar r}_i(0), \bar r_i(0)), \quad t \ge 0, \qquad /0.7/$$

обладающая такими свойствами: во-первых, при любом допустимом управлении преследуемого объекта эта функция является допустимым управлением преследующего объекта; во-вторых, под воздействием любой пары допустимых управлений, из которых управление $\ddot{\bar r}_2$ определяется формулой /0.7/, объекты встречаются в некоторый конечный момент времени, то есть $\bar r_1(t^*) = \bar r_2(t^*), \ 0 < t^* < \infty$ /естественно, всегда предполагается, что $r(0) > 0$ /.

Скажем, что преследующего управления не существует для начальных условий $\dot{\bar r}_i(0), \bar r_i(0), \ i = 1, 2$, если существует функция

$$\ddot{\bar r}_1(t) = \bar f_1(\dot{\bar r}_i(t), \bar r_i(t), \dot{\bar r}_i(0), \bar r(0)), \ t \ge 0, \qquad /0.8/$$

обладающая следующими свойствами: во-первых, при любом допустимом управлении преследующего объекта эта функция является допустимым управлением преследуемого объекта; во-вторых, под воздействием любой пары допустимых управлений, из которых управление $\ddot{\bar r}_1$ определяется с помощью формулы /0.8/, объекты не встречаются ни в какой конечный момент времени.

Приведем теперь формулировки доказываемых ниже теорем.

ТЕОРЕМА А. Пусть выполнены условия а/, б/, в/. Тогда преследующее управление существует при любых начальных условиях.

ТЕОРЕМА Б. Пусть выполнены условия а/, б/, г/, д/, е/. Тогда найдется положительное число Δw такое, что при

$$\Delta w \le \Delta w_0 \quad (\Delta w_0 > 0) \qquad /0.9/$$

преследующего управления не существует.

ТЕОРЕМА В. Пусть выполнены условия а/, д/, ж/ и неравенство

$$\Delta W < 0. \qquad /0.10/$$

Тогда преследующего управления не существует ни при каких начальных условиях.

Сделаем некоторые замечания относительно приведенных выше условий и теорем. Учитывая связь между $\ddot{\bar{r}}_i$ и $\bar{u}_i$, приходим к выводу: выполнение условия а/ равносильно наличию полной информации, а дополнительное выполнение условия б/ равносильно наличию дискриминации. Однако ниже будет показано, что условие а/ в теоремах Б и В используется лишь частично. Если же разрешить определять $\ddot{\bar{r}}_i(t_0)$ по формуле $\ddot{\bar{r}}_i(t_0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\{[\dot{\bar{r}}_i(t_0)-\dot{\bar{r}}_i(t_0-\varepsilon)]\}\ \varepsilon>0,$ то из выполнения условия а/ будет следовать, что выполнено и условие б/, т.е. при таком соглашении и теоремы А и Б будут считаться доказанными без предположения о наличии дискриминации /но очевидно в предположении /для теоремы А/, что объект $\bar{r}_2$ в каждый момент $t_0>0$ "помнит" всю информацию, поступившую к нему за отрезок времени $[max(0,t_0-\varepsilon_0),t_0]$, где ε_0 - произвольное положительное число/.

Условие в/ теоремы А в частном случае, когда k_i - константы, превращается в достаточные условия существования преследующего управления, полученные в работах [1]/см. /1,6/ / и [2] одновременно с оптимальными по быстродействию преследующими управлениями и оценками минимума времени преследования. В самом деле из в/ имеем / см. /0.3/ /:

$$W_2-W_1>[k_2(v_2)-k_1(v_1)]v_1,\quad W_2>k_2(v_2)\frac{W_1}{k_1(v_1)},\ \frac{W_2}{k_2(v_2)}>\frac{W_1}{k_1(v_1)},\quad v_2>v_1, \qquad /0.11/$$

и мы получили при $k_i(v_i)=const=k_i$ второе из неравенств /1,6/ работы [1]. Первое же неравенство

$$\Delta W>0,\ W_2>W_1 \qquad /0.12/$$

следует из в/ очевидным образом. Следовательно, основное значение теоремы А/ состоит в обобщении на нелинейный случай достаточных условий существования преследующего управления, полученных для линейного примера в работах [1, 2]. Однако такое обобщение получено лишь для игры качества; при этом нами конкретно построено преследующее управление /0.7/ /как, впрочем, и управление /0.8/ в теоремах Б и В/.

1. Получим вспомогательное соотношение, предполагая, что $\dot{\bar{r}}(t_0)\neq 0$. Пусть $\bar{n}$ - орт, ортогональный $\dot{\bar{r}}(t_0)$, образующий не тупой угол с вектором $\dot{\bar{r}}_1(t_0)$ и лежащий в двумерной плоскости P, содержащей векторы $\dot{\bar{r}}_i(t_0)$, начало которых совпадает с точкой O /см.рис. 1 /. Векторы $\overline{O_iO}$ построены с помощью формулы /0.6/. Круги на рис. 1 изображают сечения шаров W_i с центрами в O_i плоскостью P. Имеем:

$$\overline{O_2O_1}=k_2(\dot{r}_2(t_0))\dot{\bar{r}}_2(t_0)-k_1(\dot{r}_1(t_0))\dot{\bar{r}}_1(t_0)=k_2\dot{\bar{r}}+\Delta k\dot{\bar{r}}_1, \qquad /1.1/$$

$$np_{\bar n}\,\overline{O_2O_1} = \Delta k\cdot \dot r_1 \sin\measuredangle \dot{\bar r}, \dot{\bar r}_1 , \qquad /1.2/$$

где $\measuredangle \dot{\bar r}, \dot{\bar r}_1$ - угол между векторами $\dot{\bar r}, \dot{\bar r}_1$.

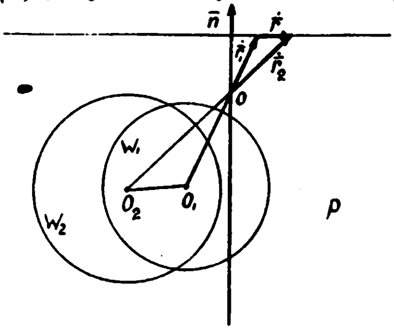

Рис I.

2. Сейчас мы проведем доказательство теоремы А построением функции /0.7/. Упомянутую функцию будем строить последовательно из кусков $\bar f_{(2,l)}$, $l=1,2,\ldots$, определенных **соответственно на некоторых множествах значений**

$$t: [0,t_1],\ (t_1,t_2],\ldots .$$

Для случая

$$\dot r_2(0) \neq \dot r_1(0) \qquad /2.1/$$

определим функцию

$$\bar f_{(2,1)} = \pm\, \bar m[W_2 \mp k_2(\dot r_2)\dot r_2],\quad t\in[0,t_1], \qquad /2.2/$$

где $\bar m = \frac{\dot{\bar r}_2(0)}{\dot r_2(0)}$, если $\dot r_2(0) > 0$, и $\bar m$ - произвольный фиксированный орт, если $\dot r_2(0)=0$; верхние /нижние/ знаки в формуле /2.2/ берутся, если $\dot r_2(0) < \dot r_1(0)$ /соответственно, если $\dot r_2(0) > \dot r_1(0)$ /; t_1 определяется как наименьший положительный корень уравнения $\dot r_2(t) = \dot r_1(t)$:

$$\dot r_2(t_1) = \dot r_1(t_1),\quad t_1 > 0. \qquad /2.3/$$

Упомянутый корень заведомо существует, так как функции $\dot r_i(t), t\geq 0$, непрерывны. Кроме того, этот корень конечен. Действительно, как нетрудно заметить, t_1 не превосходит времени t_1' , необходимого для разгона вспомогательного объекта $\bar r^*$, движение которого описывается линейным уравнением $\ddot{\bar r}^* + k_2(V_2)\dot{\bar r}^* = \bar u_2$, $u_2 \leq W_2$ /см. /0.1/, /0.5/ /, от скорости $\dot{\bar r}^*(0)=0$ до скорости $\dot r^*(t_1') = V_1 < V_2$ /см. /0.3/, /0.11/ / посредством управления типа /2.2/. Прямой подсчет показывает, что $t_1' < \infty$.

В случае $\dot r_2(0) = \dot r_1(0)$ положим в /2.2/ $t_1 = 0$ /т.е. функция $\bar f_{(2,1)}$ в последнем случае не понадобится/.

Легко видеть, что управление $\ddot{\bar r}_2 = \bar f_{(2,1)}$, $0\leq t\leq t_1$ является допустимым.

Введем параметр

$$\theta = \frac{1}{2}\min\{(\Delta w - \sup_{0\leq \dot r_1\leq V_1}|\Delta k|\cdot V_1),\ (V_2 - V_1)\}, \qquad /2.4/$$

и для случая

$$\dot r(t_1) > \frac{\theta}{2k_2(V_2)} \qquad /2.5/$$

определим функцию

$$\bar f_{(2,2)} = (\ddot{\bar r}_1, \frac{\dot{\bar r}_2}{\dot r_2})\frac{\dot{\bar r}_2}{\dot r_2} + \{\frac{1}{2}\theta + \sqrt{\ddot r_1^2 - (\ddot{\bar r}_1, \frac{\dot{\bar r}_1}{\dot r_1})^2}\}\bar e,\quad t\in(t_1,t_2], \qquad /2.6/$$

где орт $\bar e$ определяется следующим образом:

$$\bar e = e_1\dot{\bar r}_1 + e_2\dot{\bar r}_2,\ (\bar e, \dot{\bar r}_1)\geq 0,\ (\bar e, \dot{\bar r}_2) = 0,\ t\in(t_1,t_2], \qquad /2.7/$$

а $t_2 > t_1$ есть наименьшее число, удовлетворяющее равенству:

$$\dot{r}(t_2) = \frac{\theta}{2k_2(v_2)} ; \qquad /2.8/$$

/если случай /2.5/ не имеет места, полагаем $t_2 = t_1$, и, следовательно, функция /2.6/ не понадобится/. В случае, если векторы $\dot{\bar{r}}_i(t_1)$ имеют противоположное направление, условимся в качестве $\bar{e}(t_1)$ брать любой орт, удовлетворяющий равенству $(\bar{e}(t_1), \dot{\bar{r}}_2(t_1)) = 0$. При таком дополнительном условии соотношения /2.7/, как нетрудно проверить, однозначно определяют непрерывную вектор-функцию $\bar{e}$. Поскольку $\ddot{\bar{r}}_2 = \bar{f}_{(2,2)}$, $t \in (t_1, t_2]$, а $|\bar{f}_{(2,2)}| < 2w_1 + \frac{1}{2}\theta < \infty$ /см. /0.1/, /0.3//, то $\dot{\bar{r}}_2$ имеет на том же полуинтервале ограниченную производную. Но тогда из /2.6/ и свойств вектор-функций $\dot{\bar{r}}_i, \ddot{\bar{r}}_1, \bar{e}$ вытекает, что функция /2.6/ измерима. Кроме того, как видно из /2.6/, управление $\ddot{\bar{r}}_2 = \bar{f}_{(2,2)}$, $t \in (t_1, t_2]$ сохраняет равенство /2.3/ на всем отрезке $[t_1, t_2]$ /поскольку тангенциальные составляющие ускорений $\ddot{\bar{r}}_i$ одинаковы на указанном отрезке/.

Покажем теперь, что при совмещении начала вектора /2.6/ с точкой О /см. /0.6/ / его конец окажется принадлежащим шару W_2 / чем будет завершено доказательство того, что вектор-функция /2.6/ является допустимым управлением объекта $\bar{r}_2$ /. Поместим шары W_i во вспомогательное n -мерное пространство и совместим там точки О множеств W_i /построенные в соответствии с /0.6/ / и направления векторов $\dot{\bar{r}}_i$ /см. рис. 2/. Тогда, ввиду того, что имеет место равенство $\dot{r}_2(t) = \dot{r}_1(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, а значит, равенство $\dot{\bar{r}}(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$, во вспомогательном пространстве /поскольку направления векторов $\dot{\bar{r}}_i$ искусственно совмещены/из /1.1/ /см. также рис. 1/, в/ и /2.4/ следует, что

$$|\overline{O_1 O_2}| < \Delta w - \theta, \qquad /2.9/$$

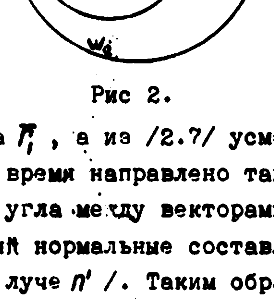

Рис 2.

а значит, шар W_1 помещается строго внутри шара W_2 /имеет место сильное включение $W_1 \Subset W_2$ в терминологии и обозначениях работы [3] /, причем расстояние между границами упомянутых шаров больше θ. Из /2.6/ видим, что нормальное ускорение объекта $\bar{r}_2$ по модулю на $\frac{\theta}{2}$ больше нормального ускорения объекта $\bar{r}_1$, а из /2.7/ усматриваем, что нормальное ускорение объекта $\bar{r}_2$ все время направлено таким образом, что при $t > t_1$ происходит уменьшение угла между векторами $\dot{\bar{r}}_i$ / на рис. 2 для удобства сравнения ускорений нормальные составляющие ускорений объектов $\bar{r}_i$ совмещены на одном луче n' /. Таким образом, если векторы $\ddot{\bar{r}}_1$ и $\ddot{\bar{r}}_2 = \bar{f}_{(2,2)}$ откладывать от точки О /см. рис. 2/, то конец вектора $\ddot{\bar{r}}_2$ отстоит от конца вектора $\ddot{\bar{r}}_1$ на расстояние $\frac{\theta}{2}$. Однако управление $\ddot{\bar{r}}_1$ допустимо, и конец вектора $\ddot{\bar{r}}_1$ принадлежит шару W_1, но тогда, принимая во внимание вышесказанное, убеждаемся, что конец вектора $\ddot{\bar{r}}_2(t)$, $t > t_1$ принадлежит ша-

ру W_2. Итак, управление /2.6/ допустимо и приводит к уменьшению угла $\angle \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2$. Поскольку, далее, векторы $\dot{\bar{r}}_i$ одинаковы по длине для $t \geq t_1$ и длины их ограничены, а нормальная составляющая ускорения $\ddot{\bar{r}}_2$ больше нормальной составляющей ускорения $\ddot{\bar{r}}_1$ на постоянную положительную величину $\frac{\theta}{2}$, то величина угла $\angle \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2$ будет, как легко видеть, уменьшаться со скоростью $\geq \Delta\omega > 0$, где $\Delta\omega$ - некоторая константа, а значит, число t_2 в соотношении /2.8/ существует и конечно, и мы вправе рассматривать функцию /2.6/ на полуинтервале $(t_1, t_2]$.

Если на рис. 2 мы искусственно совместили направления векторов $\dot{\bar{r}}_i$ и тем самым обеспечили сильное включение $W_1 \tilde{\subset} W_2$, то в момент t_2, как следует из /2.8/, /2.4/, /1.1/, такое включение будет и при сохранении имеющихся в этот момент направлений скоростей $\dot{\bar{r}}_i$ /то есть в основном пространстве E^n/, ибо /см. также /0.5/ /

$$|\overline{O_2 O_1}| \leq k_2 \frac{\theta}{2k_2(v_2)} + \sup_{0 \leq \dot{r}_i \leq v_i} |\Delta k| \cdot v_1 \leq \frac{\theta}{2} + (\Delta w - 2\theta) < \Delta w - \theta,$$

и мы снова пришли к неравенству /2.9/.

Определим, далее, функцию

$$\bar{f}_{(2,3)} = \ddot{\bar{r}}_1 + \frac{\theta}{2} \varphi \cdot \bar{m}, |\bar{m}| = 1, \quad t > t_2, \qquad /2.10/$$

где функция $\varphi(t)$ и орт $\bar{m}(t)$ будут подчинены указанным ниже требованиям.

Для случая

$$\dot{r}(t) < \frac{\theta}{2k_2(v_2)} \qquad /2.11/$$

положим на отрезке $[t_1, t_2']$, $\varphi = 1$, $\bar{m} = \frac{\dot{\bar{r}}(t_1)}{\dot{r}(t_1)}$, если $\dot{r}(t_1) > 0$, и возьмем в качестве $\bar{m}$ любой фиксированный орт, если $\dot{r}(t_1) = 0$. t_2' определим как наименьшее $t > t_1$, удовлетворяющее равенству /2.8/ /такое t_2', и притом конечное, как нетрудно установить с помощью /2.4/, найдется/. Под воздействием управления /2.10/ на отрезке $[t_1, t_2']$ точка $\bar{r}$ / в системе координат Ω' /см. п. 0/ / будет совершать прямолинейное равномерно-ускоренное движение с ускорением $\frac{\theta}{2}$. Управление /2.10/ на отрезке $[t_1, t_2']$ есть не что иное, как $\bar{m}$ -направленное управление /в терминологии работы [3] /; употребление такого управления законно во всяком случае до момента t_2' /когда при $t_1 = t_2'$ в /2.9/ наступит равенство/, поскольку, как было показано выше, из /2.8/ следует /2.9/, а следовательно, и сильное включение $W_1 \tilde{\subset} W_2$ /до момента $t = t_2'$, во всяком случае/. Итак, в любом из случаев/2.5/, /2.11/ и в случае, когда в упомянутых соотношениях имеет место равенство, к моменту $t = t_2$ /или $t = t_2'$ / выполняется равенство вида /2.8/. Для $t > t_2$ /соответственно для $t > t_2'$ / подчиним орт $\bar{m}$ условию:

$$(\bar{m}(t), \dot{\bar{r}}(t)) = 0, t > t_2 \ (t > t_2'), \qquad /2.12/$$

из которого вытекает, что $\dot{r}(t) = \dot{r}(t_2)$, а следовательно, что для $t > t_2 \ (t > t_2')$ выполнено неравенство /2.9/ и, как следствие, сильное включение $W_1 \tilde{\subset} W_2$ с расстоянием между границами шаров W_i, большим θ. Но тогда из /2.10/ видно, что функция $\bar{f}_{(2,3)}$ для $t > t_2 \ (t > t_2')$ является

допустимым управлением, если только функции $\varphi, \bar{m}$ /с наложенными на них вышеуказанными ограничениями/ измеримы. Легко видеть, что, распоряжаясь для $t>t_2$ $(t>t_2')$ функциями $\varphi, \bar{m}$ должным /и допустимым/ образом, мы можем с помощью /2.10/ получить и стабилизирующее / при $\varphi=0$/ и $\bar{m}$ -направленное /при $\varphi=1$ / управление. Применяя указанные управления так, как это описано в [3] /см. теорему 2.1.6/, мы в некоторый момент $t^*<\infty$ приведем точку $\bar{r}$ в начало координат O' системы Ω', чем и будет решена задача преследования. Траектория точки $\bar{r}(t)$, $t>t_2$ $(t>t_2')$ в системе координат Ω' будет при этом иметь вид, изображенный на рис.3 /прямолинейные участки траектории AB, CO' получаются при $\varphi=0$ а дуга окружности ВС получается при $\varphi=1$ и $\bar{m}$, лежащем в двумерной плоскости, содержащей O' /.

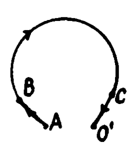

Рис. 3

Принимая во внимание /2.2/, /2.6/ и /2.10/, функцию /0.7/ в доказанной теореме можно записать так:

$$\bar{f}_2 = \begin{cases} \bar{f}_{(2,1)}, & t\in[0,t_1], \\ \bar{f}_{(2,2)}, & t\in(t_1,t_2] \text{ /если имеет место /2.5/ /,} \\ \bar{f}_{(2,3)}, & t\in(t_1,t_3] \text{ /если имеет место /2.11/ /.} \end{cases}$$

3. Если

$$\Delta w \leq \inf_{0<\bar{\eta}_i\leq v_i} \Delta k\cdot v_1, \qquad /3.1/$$

то, применяя преобразования, аналогичные тем, с помощью которых было получено неравенство /0.11/, можно получить неравенство

$$v_2 \leq v_1. \qquad /3.2/$$

Совершенно ясно, что в случае /3.1/ /а значит, и в случае, когда выполняется неравенство /3.2/ /, преследующего управления не существует для большой области G начальных условий /под такой областью мы будем понимать множество последовательностей $(\bar{r}_1(0), \bar{r}_2(0), \dot{\bar{r}}_1(0), \dot{\bar{r}}_2(0))$, для каждой из которых преследующего управления не существует /. Обозначим через G' область начальных условий, для которой объект $\bar{r}_1$ гарантирует себя от встречи с объектом $\bar{r}_2$, применяя $(-\bar{r})$ -отклоняющее управление /см. [3] , п. 1.3/ /т.е. такое управление , которое, грубо говоря, в каждый момент времени направлено в сторону, противоположную направлению на преследующий объект /от преследуемого объекта/ и имеет при этом максимальный возможный модуль/. Из доказательства теоремы Б, которое мы сейчас приведем, будет, в частности, видно, что область G шире области G'.

Следует также отметить, что если $\Delta k>0$ и требуется получить утверждения о существовании /несуществовании/ преследующего управления для линейного случая уравнений /0.1/, справедливые при любых начальных условиях, то требование в/ /разумеется, при выполнении условий а/ и б/ / становится не только достаточным, но и необходимым для существования преследующего управления. В самом деле, в отмеченном случае перед v_1 в условии в/ и /3.1/ стоит один и тот же множи-

тель.

4. Приступим к доказательству теоремы В, то есть к построению функции /0.8/, из кусков $\bar{f}_{(1,l)}$, $l=1,2,\dots$, причем сначала построение проведем для случая

$$\Delta w=0. \qquad /4.1/$$

Пусть $\dot{r}_1^o$ – достаточно малое число, удовлетворяющее требованию:

$$\dot{r}_1^o \in (0, \tfrac{1}{2}\min\{\dot{r}_2^o, v_1\}). \qquad /4.2/$$

Положим

$$\bar{f}_{(1,1)}=\bar{f}'_{(2,1)}, \quad t\in[0,t_1'], \qquad /4.3/$$

где функция $\bar{f}'_{(2,1)}$ получается из /2.2/ заменой $W_2, k_2, \dot{r}_2, t_1$ соответственно на $W_1, k_1, \dot{r}_1, t_1'$, где t_1' – наименьшее положительное t, удовлетворяющее соотношению:

$$\dot{r}_1(t_1')=\dot{r}_1^o \qquad /4.4/$$

/если $\dot{r}_1(0)=\dot{r}_1^o$, положим в /4.3/ $t_1'=0$, то есть функция $\bar{f}_{(1,1)}$ нам в таком случае не понадобится/. Нетрудно показать, принимая во внимание /0.1/, /0.2/, е/, что упомянутое t_1' существует и конечно и что, кроме того, ввиду достаточной малости $\dot{r}_1^o$ можно считать выполненным следующее неравенство:

$$\tilde{r}=\min_{0\le t\le t_1'} r(t)>0. \qquad /4.5/$$

Если векторы $\dot{\bar{r}}_i(t_1')$ не имеют одинакового направления, определим функцию

$$\bar{f}_{(1,2)}=\bar{e}'(t)\cdot\lambda, \ \lambda>0, \ t\in(t_1',t_2], \qquad /4.6/$$

где орт $\bar{e}'$ определяется, подобно орту $\bar{e}$ в /2.7/ с той лишь разницей, что неравенство и равенство в скалярных произведениях в /2.7/ нужно поменять местами; λ определяется, как величина наибольшего для объекта $\bar{r}_1$ ускорения, при условии, что оно совпадает с нормальным ускорением; t_2 определяется, как момент /первый!/ совпадения направлений векторов $\dot{\bar{r}}_i$:

$$\dot{\bar{r}}_1(t_2)\cdot\dot{r}_2(t_2)=\dot{\bar{r}}_2(t_2)\cdot\dot{r}_1(t). \qquad /4.7/$$

Легко показать, что, ввиду достаточной малости $\dot{r}_1^o$ /и, следовательно, сколь угодно близкого к W_1 значения λ в /4.6/ /, угловая скорость вращения вектора $\dot{r}_1(t)$, $t\in(t_1',t_2]$ будет превосходить максимальную угловую скорость вращения вектора $\dot{\bar{r}}_2(t)$ на сколь угодно большую величину. Вследствие этого разность (t_2-t_1') можно считать столь малой, что неравенство /4.5/ можно будет заменить таким неравенством

$$\min_{0\le t\le t_2} r(t)>0. \qquad /4.8/$$

Если же векторы $\dot{\bar{r}}_i(t_1')$ имеют одинаковое направление – функция /4.6/ не понадобится.

Определим, далее, функцию

$$\bar{f}_{(1,3)}=\frac{\dot{r}_1^o}{\dot{r}_2}\ddot{\bar{r}}_{2,n}, \quad t\in(t_2,t_3], \qquad /4.9/$$

где $\ddot{\bar{r}}_{2,n}$ – нормальная составляющая ускорения $\ddot{\bar{r}}_2$, а t_3 будет определено ниже. В силу д/, /4.2/ и достаточной малости $\dot{r}_1^o$, управление /4.9/ будет допустимым /формально для этого требуется выполнение и условия б/, однако, как будет пояснено ниже, можно в некотором смыс-

ле обойтись и без этого условия; по этой причине в /0.8/ опущено $\ddot{\bar{r}}_2$ /; оно сохранит совпадение направлений векторов $\dot{\bar{r}}_i$ на всем полуинтервале $(t_2, t_3]$ и, кроме того , не изменит на том же полуинтервале величины $\dot{r}_1$ /нетрудно показать, что из /4.9/ следует $(\dot{\bar{r}}_1(t), \bar{f}_{(1,3)}(t))=0, t\in(t_2,t_3]$ и соотношение /4.7/, если в /4.7/ положить $\dot{r}_1(t_2)=\dot{r}_1^{\circ}$, $t_2=t\in(t_2,t_3]$).

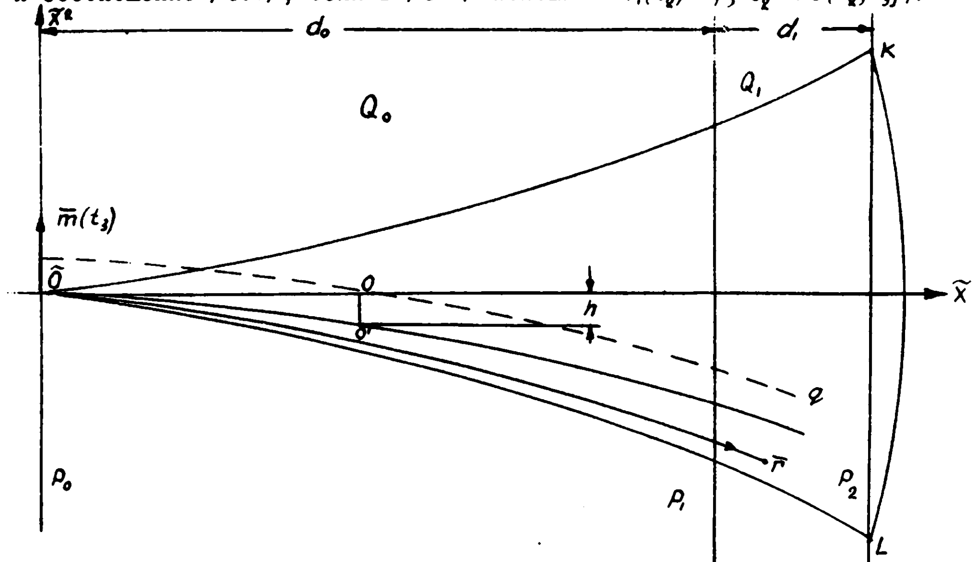

Рис. 4

Дальнейшие построения будут подобны проведенным в [3] в случае /2.3.7/ и будут опираться на множества $Y(t,t')$, $Z(t,t')$, рассмотренные в пп. I.8, I.9 работы [3]. Ввиду большого сходства с упомянутыми построениями, аналогичные построения данной работы мы опишем сжато, опуская мелкие детали. Для $t=t_3$ /t_3 будет отделено несколько ниже/ построим семейство множеств

$$Z(t,t_3),\quad t\in[t_3,\ t_3+(t'''-t')], \qquad /4.10/$$

где t', t''' определены в п. I.9 работы [3] . На рис. 4 изображено сечение теоретико-множественной суммы множеств семейства /4.10/ двумерной плоскостью, проходящей через точку $\tilde{O}=Z(t_3,t_3)$ и содержащей вектор $\bar{r}(t_3)$ /имеющий направление оси $\tilde{O}\tilde{X}'$ координатной системы $\mathcal{R}$; /указанное сечение на рис. 4 изображено криволинейным треугольником $\tilde{O}KL$ /. При этом будем считать выполненными следующие требования:

$v'=\frac{1}{2}\dot{r}_2^{\circ}$, $w=4w_1+2\Delta w'$, где $\Delta w'>0$ - произвольная константа.

Пусть P_l , $l=0,1,2$, - гиперплоскости, ортогональные $\tilde{O}\tilde{X}'$, d_0, d_1 - расстояния между соседними гиперплоскостями, Q_0, Q_1 - части пространства, заключенные соответственно между P_0 и P_1 , и т.д. Будем считать $(t'''-t')$ столь малым, что (d_0+d_1) меньше величины, стоящей в левой части неравенства /4.8/. Можно также считать d_0 и отношение d_0/d_1 столь малым, что нарушение условий

$$\dot{r}_1(t_3)=\dot{r}_1^{\circ},\quad \dot{\bar{r}}_1(t_3)\cdot\dot{\bar{r}}_2(t_3)=\dot{\bar{r}}_2(t_3)\,\dot{r}_1^{\circ},\quad r(t_3)>d_0, \qquad /4.11/$$

имевших место в момент t_3 , вследствие действия на объекты $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ ускорений $2w_1$ и $2w_1+2\Delta w'$ /произвольным образом/ при прохождении точки

через полосу Q_0, окажется настолько малым, что, применяя последовательно управления типа /4.3/, /4.6/, /4.9/ при прохождении $\bar{r}$ через Q_1, можно будет в момент t_4 пересечения точкой $\bar{r}$ гиперплоскости P_2 восстановить в этот момент условия типа /4.II/ /Поскольку в полосе Q_0 нам придется сделать ряд дополнительных построений, отношение d_0/d_1 на рис. 4 умышленно искажено/. Если к тому же объекту $\bar{r}_1$ /изображенному на рис. 4 точкой О, лежащей посередине между P_0 и P_1 / удастся избежать встречи с $\bar{r}$ /а следовательно, и с $\bar{r}_2$ / при прохождении $\bar{r}$ через полосу Q_0 при условии, что t_3 - первый критический момент /см. [3] , /2.3.5/ / для должным образом подобранного τ', то в момент t_4' будут выполняться и условия типа /4.II/ и неравенство типа /4.8/ /где вместо t_2 нужно будет поставить t_4'/. Таким образом, периодически повторяя свои действия, объекту $\bar{r}_1$ удалось бы гарантировать себя от встречи с объектом $\bar{r}_2$. Итак, нам остается показать, каким образом объект $\bar{r}_1$ может избежать встречи с объектом $\bar{r}_2$ в полосе Q_0, если в критический момент t_3 точка $\bar{r}(t_3)$ совпадает с $\tilde{O}$. Пусть Δt - максимум времени нахождения точки $\bar{r}(t)$ в полосе Q_0. Зададим на отрезке $[t_3, t_3+\Delta t]$ управление объекта $\bar{r}_1$ как $\bar{m}$ -отклоняющее управление $\bar{f}_{(1,2)}(\bar{m})$, где орт $\bar{m}(t)$ подчиним следующим условиям:

1/ $(\bar{m}(t_3), \overline{\tilde{O}O}) \geq 0;$

2/ $(\bar{m}(t), \dot{\bar{r}}(t)) = 0, \ t \in [t_3, t_3+\Delta t];$

3/ $\bar{m}(t), \ t \in [t_3, t_3+\Delta t]$, - непрерывная вектор-функция, причем вектор $\bar{m}(t)$ лежит в плоскости векторов $\dot{\bar{r}}(t_3), \bar{m}(t_3)$.

Указанные условия, как нетрудно убедиться, действительно определяют непрерывную функцию $\bar{m}(t)$, и притом однозначно. Принимая во внимание г/, /4.I/, /I.2/, /4.2/ и достаточную малость $\dot{r}_1^0$, легко сообразить, что вектор $\dot{\bar{r}}_1$ станет поворачиваться относительно вектора $\dot{\bar{r}}$ против часовой стрелки /см. рис. 4 и рис. I/, но так как d_0 достаточно мало, то можно считать, что за время Δt этот угол не успеет стать больше $\frac{\pi}{2}$. Но тогда в силу /I.2/ у вектора $\dot{\bar{r}}$ появится избыточное нормальное ускорение $\ddot{\bar{r}}$ величины $\ddot{r} \geq \inf_{0 \leq \dot{r}_1 \leq v_1} \Delta k \cdot \dot{r}_1^0 \cdot \sin \angle \dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}}_1$ и направленное для случая, изображенного на рис. 4 вниз /ибо $\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_2 - \ddot{\bar{r}}_1$!/, что вызовет вращение вектора $\dot{\bar{r}}$ по часовой стрелке и искривление траектории точки $\bar{r}$ /в полосе Q_0 / вниз. На рис. 4 линией q изображена кривая, соответствующая кривой $\eta(\bar{x}') = \bar{x}^2$ работы [3] /см. /I.8.8/ /. Заметим, что описанное изменение направления $\dot{\bar{r}}$ возможно лишь при выполнении условия г/. Таким образом, точка $\bar{r}$ пройдет под точкой О и теорема В для случая /4.I/ доказана.

Если же

$$\Delta W > 0, \qquad /4.12/$$

то точка $\bar{r}$ может пройти несколько выше линии q за счет того, что появится составляющая ускорения, направленная в худшем для $\bar{r}_1$ случае строго вверх. За время Δt относительное максимальное смещение точки $\bar{r}$ вверх под воздействием ускорения $\Delta \bar{W} = \bar{m}(t_3)\Delta W$ не превзойдет

величины $\frac{1}{2}\Delta W\cdot\Delta t^2$. Пусть h - длина вертикального отрезка OO_1, опущенного из точки O на линию q, тогда при $\Delta W_0 < \frac{2h}{\Delta t^2}$ точка $\bar{r}$ пойдет все еще ниже O /на рис. 4 пунктиром обозначена линия, полученная параллельным переносом вверх линии q на расстояние $\frac{1}{2}\Delta W_0\cdot\Delta t^2$ /. Итак, величина ΔW_0, упомянутая в теореме В, действительно существует /см. /0.9/ /, и теорема Б полностью доказана построением функции /0.8/, которая, как следует из вышесказанного, имеет следующий вид:

$$\bar{f}_1=\begin{cases}\bar{f}_{(1,1)}, & t\in[0,t_1],\\ \bar{f}_{(1,2)}, & t\in[t_1,t_2],\\ \bar{f}_{(1,3)}, & t\in(t_2,t_3],\\ \bar{f}_{(1,4)}(\bar{m}), & t\in(t_3,t_3+\Delta t],\\ \bar{f}_{(1,1)}, & t\in(t_3+\Delta t,t_3'],\\ \bar{f}_{(1,2)}, & t\in(t_3',t_3''],\\ \bar{f}_{(1,3)}, & t\in(t_3'',t_4],\\ \bar{f}_{(1,4)}(\bar{m}), & t\in[t_4,t_4+\Delta t]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases},$$

где $t_3, t_4\ldots$ -критические моменты $(t_4\leq t_4')$, а пунктирной фигурной скобкой выделена группа управлений, которая при $t\to\infty$ будет, вообще говоря, периодически повторяться.

В заключение покажем, что область G шире области G'' /см.п. 3/. В самом деле, для следующих начальных условий: $\dot{r}_1(0)=0, \dot{r}_2(0)=V_2, \bar{r}_2(0)r(0)=-\bar{r}(0)\dot{r}_2(0)$ при достаточно малом положительном $r(0)$ преследуемому объекту, очевидно, невозможно избежать встречи с преследующим объектом путем применения $(-\bar{r})$ -отклоняющего управления даже в случае /4.I/ и при условии, что $\bar{f}_2\equiv 0$; между тем все условия теоремы Б оказываются выполненными для вышеуказанных начальных условий, и, следовательно, преследующего управления не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Требование б/ в теореме Б можно опустить, если разрешить пользоваться управлением в форме первой производной /см. [3], введение/, так как тогда вместо функции /4.9/ можно будет взять зависимость между $\bar{r}_i$ /в форме условия их коллинеарности/. Функция же /4.9/ единственная, которая использует требование б/ в теореме Б.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Особенностью теоремы Б, выделяющей ее из группы других аналогичных теорем /рассматривающих случаи, когда преследующего управления не существует/, является доказательство возможности ухода преследуемого объекта и в случае, когда $\Delta W>0$ /см. /0.9//.

5. Доказательство теоремы В будет сейчас сравнительно просто сведено к доказательству теоремы 2 работы [4] . Пусть $\dot{r}_1^0>0$ -достаточно малый параметр. Если

$$\dot{r}_1(0)<\dot{r}_1^0, \qquad /5.I/$$

применим управление /2.2/, употребив в нем верхние знаки:

$$\bar{f}_{(1,1)}'=\bar{f}_{(2,1)},\quad t\in[0,t_1], \qquad /5.2/$$

где t_1 наименьшее положительное число, удовлетворяющее равенству:

$$\dot{r}_1(t_1) = \dot{r}_1^0. \qquad /5.3/$$

Поскольку $\dot{r}_1^0$ достаточно мало, можно, как легко видеть, считать выполненным соотношение

$$r(t) > 0, \ t \in [0, t_1]. \qquad /5.4/$$

Для $t > t_1$ вместо шара W_1 будем пользоваться $(n-1)$ -мерным кругом $W_1' \subset W_1$ радиуса w_1' :

$$w_1' \in (w_2, w_1), \qquad /5.5/$$

ортогональным $\dot{\bar{r}}_1(t), t > t_1$ центр которого совпадает с точкой O, построенной для шара W_1 в соответствии с формулой /0.6/ при $\dot{\bar{r}}_1$, удовлетворяющем соотношению /5.3/ /в качестве круга W_1' можно взять, например, сечение шара W_1 гиперплоскостью, ортогональной вектору $\dot{\bar{r}}_1(t)$ и проходящей через точку O/. Ввиду достаточной малости $\dot{r}_1^0$ и /0.2/ включение /5.5/ может быть обеспечено. Вследствие замены шара W_1 кругом W_1' будет, очевидно, выполняться следующее неравенство:

$$\dot{r}_1(t) \geq \dot{r}_1^0, \ t > t_1. \qquad /5.6/$$

Из /5.6/, /5.5/, очевидного неравенства $\ddot{r}_1(t) \leq 2w_1, \ t \geq 0$ и условий теоремы В следует, что с момента t_1 мы находимся в условиях теоремы 2. Отсюда и из /5.4/ вытекает справедливость теоремы В. Функция /0.8/ в случае последней теоремы будет состоять из функции /5.2/ и функции $\bar{f}_1$ теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сравнение условий теорем Б и В показывает, что переход от размерности 2 к размерности $\geq$ 3 позволяет исключить из условий теоремы начальные условия.

Поступила в редакцию 21.5.1968г.

Литература

1. Л.С. Понтрягин. К теории дифференциальных игр, УМН, 1966, т. XXI, вып. 4.

2. Б.Н. Пшеничный. Линейные дифференциальные игры, Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.

3. В.Н. Лагунов. Об условиях существования преследующего управления. Дискретный анализ, Новосибирск, 1967, 11.

4. В.Н. Лагунов. Об управлении преследуемого объекта. Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, 13.