Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ БИДИХОТОМИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

В.В.Леонов, Л.Н.Крылова

Вводные замечания

Нахождение оптимального управления для процесса, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка, связано с затратой большого количества машинного времени и со значительными вычислительными трудностями. Более того, существует ряд процессов, для которых ранее предложенные вычислительные методы отыскания оптимального управления либо практически нереализуемы на современных ЭВМ, либо не позволяют получать оптимальное управление, причем с помощью подобных методов могут получены критические /"самые плохие"/ управления [2] .

В статье [2] был предложен метод динамической $(k_1,\ldots,k_s)$- хотомии, который является методом последовательного улучшения решений. В данной работе излагается вычислительная схема, основанная на методе динамической бидихотомии, то есть динамической /2,2/ -хотомии; приводится программа с инструкцией для решения задачи на ЭВМ "М-20" и указывается численный пример.

§ I. Постановка задачи. Множество V^*

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{m} b_{s,j}(x_1,\ldots,x_n,t)u_j + \varphi_s(x_1,\ldots,x_n,t) = f_s \quad (s=1,\ldots,n), \qquad /I.I/$$

где $b_{s,j}, \varphi_s$ - непрерывные функции от своих аргументов в области их определения, точки $(u_1,\ldots,u_m)=\bar{u}$ принадлежат m -мерной замкнутой области M , границей которой является выпуклый многогранник M .

Система /I.I/ решается при начальных условиях:

$$x_s(0) = x_{s,0} \quad (s=1,\ldots,n). \qquad /I.2/$$

Класс K допустимых [I] управлений [I] $\bar{u}_{t_1,t_2}$ на любом промежутке $[t_1,t_2] \leq [0,T]$ представляет собой класс таких измеримых управлений, что $\bar{u}(t) \in U$ при $t \in [t_1,t_2]$. Ясно, что решение $\bar{X}(t)$ системы /I.I/ в точке $t>0$ при начальных условиях /I.2/ зависит от управления $\bar{u}_{0,t} \in K$, то есть $\bar{X}(t)=\bar{g}(t,\bar{u}_{0,t})$ Считаем, что $\bar{g}(T,\bar{u}_{0,T})$ существует при всех $\bar{u}_{0,T} \in K$, причем $\bar{g}(t,\bar{u}_{0,t}) \in D$ для $\bar{u}_{0,t} \in K$, каково бы ни было $t \in [0,T]$.

Ставится следующая задача I: найти хотя бы одно $\bar{u}^0_{0,T} \in K$, удовлетворяющее условию:

$$\bar{c}\cdot\bar{g}(T,\bar{u}^0_{0,T}) = \max_{\bar{u}_{0,T}\in K} \bar{c}\cdot\bar{g}(T,\bar{u}_{0,T}). \qquad /I.3/$$

Известно [3] , что существует оптимальное управление $\bar{u}^o_{0T}(t)$, которое в каждый момент времени $t \in [0,T]$ доставляет максимум

$$\max_{u \in U} H(\bar{x}^o(t), \bar{\Phi}^o(t), \bar{u}, t) = \mathcal{H}(\bar{x}^o(t), \bar{\Phi}^o(t), t), \qquad /1.4/$$

где

$$H(\bar{x}, \Phi, \bar{u}, t) = \bar{\Phi} \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t),$$

причем $\bar{x}^o(t)$ и $\bar{\Phi}^o(t)$ являются решением системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^o}{dt} &= \bar{f}(\bar{x}^o, \bar{u}^o(t), t), \\ \frac{d\bar{\Phi}^o}{dt} &= -grad_{\bar{x}} H(\bar{x}^o, \bar{\Phi}^o, \bar{u}^o(t), t), \end{aligned}\right\} \qquad /1.5/$$

решаемой при краевых условиях:

$$\bar{x}^o(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{\Phi}^o(T) = -\bar{c}. \qquad /1.6/$$

Предполагаем, что $\bar{\Phi}^o(t) \in D_1$ при $t \in [0,T]$. Кроме того, считаем, что, каковы бы ни были $t \in [0,T]$, $\bar{x}^* \in D$, $\bar{\Phi}^* \in D$, найдется такое $\varepsilon(t_0, \bar{x}^*, \bar{\Phi}^*) > 0$, что решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}(t), t), \\ \frac{d\bar{\Phi}}{dt} &= -grad_{\bar{x}} H(\bar{x}, \bar{\Phi}, \bar{u}(t), t) \end{aligned}\right\} \qquad /1.5'/$$

при начальных условиях

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}^*, \quad \bar{\Phi}(t_0) = \bar{\Phi}^* \qquad /1.6'/$$

существует и единственно для $t \in [t_0, t_0 \; \varepsilon(t_0, \bar{x}^*, \bar{\Phi}^*)]$, каково бы ни было $\bar{u}_{t_0, t_0+\varepsilon(t_0, \bar{x}^*, \bar{\Phi}^*)} \in K$. Обозначим через $U'(\bar{x}, \bar{\Phi}, t)$ множество всех $\bar{u} \in U$, в случае которых достигается

$$\max_{\bar{u} \in U} H(\bar{x}, \bar{\Phi}, \bar{u}, t). \qquad /1.4'/$$

Так как в случае системы /1.1/ функция $H(\bar{x}, \bar{\Phi}, \bar{u}, t)$ при фиксированных $\bar{x}$ и $\bar{\Phi}$ является линейной функцией от $\{u_j\}$ с линейными ограничениями, налагаемыми на область задания $\bar{u}$, то максимум /1.4'/ достигается на гранях V_s $(s=1,\ldots,L)$, размерностей от нулевой до m -ой, многогранника U . Обозначим через $D_s^{t^o}$ $(s=1,\ldots,L)$ множество задания таких точек $(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in D \times D_1$, для которых

$U'(\bar{x}, \bar{\Phi}, t^o) = V_s$.

Будем говорить, что конечное подмножество V^* множества U при $t \in [0,T]$ обладает свойством A для системы /1.1/, если для этой системы выполняются следующие условия:

1/ $\quad V^* = \bigcup_{s=1}^{L} V_s^*, \qquad V_s^* = \{\bar{u}_1^s, \ldots, \bar{u}_{K_s}^s\} \in V_s$;

2/ для каждого $\bar{u}_j^s$ $(s=1,\ldots,L;\ j=1,\ldots,K_s)$ найдутся такая пара $t_0^o,\ t' \in [0,T],\ t^o < t'$, и такая точка $(x_1^*,\ldots,x_n^*,\varphi_1^*,\ldots,\varphi_n^*) \in D_s^{t^o}$, что решение $\bar{x}(t)$, $\bar{\Phi}(t)$ системы /1.5'/ при начальных условиях /1.6'/ принадлежит D_s^t для $t \in [t^o, t']$, если $\bar{u}(t) \equiv u_j^s$ при $t \in [t^o, t']$;

3/ каковы бы ни были $t^o \in [0,T]$ и точка $(x_1^*,\ldots,x_n^*,\varphi_1^*,\ldots,\varphi_n^*) \in D_s^{t^o}$, найдется такое $t' \in [t^o, T]$, что для любого $\bar{u}_{t^o, t'} \in K$, удовлетворяющего условию

$$\mu(\{t: t\in[t_s^0, t']; \bar{u}(t)\in V_s^*\})=0,$$

где $\mu(G)$ - мера Лебега линейного множества G, решение системы /I.5 / при начальных условиях /I.6 / обладает свойством:

$$\mu(\{t: t\in[t_s^0,t']; (x_1(t),\dots,x_n(t),\psi_1(t),\dots,\psi_n(t))\in D_s^t\})=0.$$

Из I/-3/ следует, что если конечное подмножество V^* множества U при $t\in[0,T]$ обладает свойством A для системы /I.I/, то существует такое оптимальное управление на $[0,T]$, что $\bar{u}(t)\in V^*$ для всех $t\in[0,T]$.

§ 2. Операция max^*

Прежде чем формулировать вычислительную схему для приближенного отыскания оптимального управления, введем в рассмотрение следующую операцию "взятия максимума со звездочкой".

Пусть задана некоторая функция $\varphi(u_1,\dots, u_m,\bar{a})$, где $\bar{a}$ - вектор параметров. Обозначим через $\max\limits_{\bar{u}}{}^*\varphi(\bar{u},\bar{a})$, $\bar{u}_\varphi^*(\bar{a})$ соответственно некоторую величину и вектор, получаемые в результате следующей процедуры, осуществляемой за конечное число шагов работы нижеизлагаемого алгоритма.

Начнем с изложения первого шага. Сначала на этом шаге ищем

$$\max_{1<j<m}\ \max_{\substack{u_1=\dots=u_j=\nu_1\\ u_{j+1}=\dots=u_m=\nu_2\\ \nu_1,\nu_2=-1,0,1}} \varphi(u_1,\dots,u_m,\bar{a}). \qquad /2.I/$$

Пусть максимум /2.I/ достигается при $j=j_1'$, $\nu_1=\nu_1'$, $\nu_2=\nu_2'$. Обозначим через $(u_{1,1},\dots,u_{m,1})$ вектор, удовлетворяющий условиям:

$$u_{l,1}=\begin{cases}\nu_1' & \text{при } 1\le l\le j_1',\\ \nu_2' & \text{при } j_1'+1\le l\le m.\end{cases}$$

После того, как мы нашли j_1', ν_1', ν_2', переходим ко второму этапу первого шага.

Ищем

$$\max_{1<j\le j_1'}\ \max_{\nu=-1,0,1}\ \varphi(\overbrace{\nu,\dots,\nu}^{j\ \text{раз}}, u_{j+1,1},\dots,u_{m,1},\bar{a}).$$

Пусть этот максимум достигается при $\nu=\nu_1$, $j=j$. Обозначим

$$\varphi_1(u_{j_1+1},\dots,u_m,\bar{a})=\varphi_0(\underbrace{\nu',\dots,\nu'}_{(j_1-j_0)\ \text{раз}}, u_{j_1+1},\dots,u_m,\bar{a}),$$

где $j_0=0$, $\varphi_0(u_1,\dots,u_m,\bar{a})=\varphi(u_1,\dots,u_m,\bar{a})$.

Предположим, что мы проделали k шагов работы алгоритма, где $k\ge 1$, причем определили $j=0$, $j_1,\dots,j_k$, $\nu',\dots,\nu^k$, где $j_0<j_1<\dots<j_k<m$. Если $j_k=m-1$, то процесс прекращается и полагается $\bar{u}_\varphi^*(\bar{a})=(u_1^*,\dots,u_m^*)$,

$$\max_{\bar{u}}{}^*\varphi(\bar{u},\bar{a})=\varphi_k(\nu_2^k,\bar{a})=\varphi(\bar{u}_\varphi^*(\bar{a}),\bar{a}),$$

где

$$u_l^*=\begin{cases}\nu^p & \text{при } j_{p-1}+1\le l\le j_p\quad (p=1,\dots,k),\\ \nu_2^k & \text{при } l=m.\end{cases}$$

Если $j_k < m-1$, то переходим к $(k+1)$ -му шагу. На $(k+1)$ -ом шаге сначала находим

$$\max_{j_k<j<m} \max_{\substack{u_{j_k+1}=\ldots=u_j=\nu_1\\ u_{j+1}=\ldots=u_m=\nu_2\\ \nu_1\nu_2=-1,0,1}} \varphi_k(u_{j_k+1},\ldots,u_m,\bar{a}),$$

где

$$\varphi_k(u_{j_k+1},\ldots,u_m,\bar{a})=\varphi_{k-1}(\overbrace{\nu^k,\ldots,\nu^k}^{(j_k-j_{k-1})\,раз},u_{j_k+1},u\,.u_m,\bar{a}).$$

Пусть этот максимум достигается при

$$j=j'_{k+1},\ \nu_1=\nu_1^{k+1},\ \ \nu_2=\nu_2^{k+1}.$$

Обозначим через $(u_{j_k+1,\,k+1},\ldots,u_{m,k+1})$ вектор размерности $(m-j_k)$, удовлетворяющий условиям:

$$u_{l,k+1}=\begin{cases}\nu_1^{k+1} & \text{при } j_k+1\le l\le j'_{k+1},\\ \nu_2^{k+1} & \text{при } j'_{k+1}+1\le l\le m.\end{cases}$$

На втором этапе $(k+1)$ -го шага ищется

$$\max_{j_k<j\le j'_k}\ \max_{\nu=-1,0,1} \varphi_k(\overbrace{\nu,\ldots,\nu}^{(j-j_k)\,раз},u_{j+1,k+1},\ldots,u_{m,k+1}).$$

Пусть этот максимум достигается при $j=j_{k+1}$, $\nu=\nu^{k+1}$. После $(k+1)$ -го шага запоминаются: $j_0,j_1,\ldots,j_k,j_{k+1}$; $\nu^1;\nu^2,\ldots,\nu^{k+1},\nu_2^{k+1}$.
Если $j_{k+1}=m-1$, то итерационный процесс прекращается и формируется по вышеуказанному правилу $\max\limits_{\bar{u}}{}^{*}\varphi(\bar{u},\bar{a})$ и $\bar{u}_\varphi^*(\bar{a})$. Если же $j_{k+1}<m-1$, то переходим к $(k+2)$ -му шагу и т.д.

Процесс обязательно обрывается на некотором k^* -ом шаге, причем $1\le k^*\le m-1$. После того, как мы определили процедуру взятия максимума со звездочкой, легко строится процедура взятия повторного максимума со звездочкой.

Выражение

$$\max_{\bar{u}_1}{}^{*}\max_{\bar{u}_2}{}^{*}\varphi(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{a}) \qquad /2.2/$$

означает, что ищется

$$\max_{\bar{u}_1}{}^{*}\tilde{\varphi}(\bar{u}_1,\bar{a}), \qquad /2.2'/$$

где

$$\tilde{\varphi}(\bar{u}_1,\bar{a})=\max_{\bar{u}_2}{}^{*}\varphi(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{a})=\varphi(\bar{u}_1,\bar{u}_\varphi^*(\bar{u}_1,\bar{a}),\bar{a}), \qquad /2.3/$$

причем $\bar{u}_\varphi^*(\bar{u}_1,\bar{a})$ представляет собой то $\bar{u}_2$ $\bar{u}_\varphi^*(\bar{u}_1,\bar{a})$, которое получается при взятии максимума со звездочкой от $\varphi(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{a})$ при фиксированных $\bar{u}_1$ и $\bar{a}$, согласно определению. Получаемые в результате $\bar{u}_1=\bar{u}_{\tilde{\varphi}}^*(\bar{a})$, при котором достигается /2.2'/ и соответствующий этому $\bar{u}_1$ вектор $\bar{u}_2=\bar{u}_\varphi^*(\bar{u}_1,\bar{a})=\bar{u}_\varphi^*(\bar{u}_{\tilde{\varphi}}^*(\bar{a}),\bar{a})$, доставляют повторный максимум со звездочкой от φ.

§ 3. Формулировка алгоритма динамической бидихотомии

Пусть дан процесс:

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{m} b_{s,j}(x_1,\dots,x_n)u_j+\varphi_s(x_1,\dots,x_n)=f_s(\bar{x},\bar{u})\ (s=1,\dots,n), \qquad /3.1/$$

в случае которого множество $U=\{\bar{u}:|u_i|\leq 1\ (i=1,\dots,m)\}$, причем система /3.1/ решается при начальных условиях /1.2/. Ставится следующая задача II: найти хотя бы одно управление $\bar{u}^{o}_{0,T}\in K$, удовлетворяющее условию:

$$R(\bar{g}(T,\bar{u}^{o}_{0,T}))=\max_{\bar{u}_{0,T}\in K} R(\bar{g}(T,\bar{u}_{0,T})), \qquad /3.2/$$

где $R(\bar{x})$ - наперед заданная непрерывно дифференцируемая функция от $\bar{x}$, причем $\bar{g}(T,u_{0,T})$ имеет ранее указанный смысл.

Очевидно, что задача II для системы /3.1/ эквивалентна задаче I для расширенной системы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt}&=f_s(\bar{x},\bar{u})\quad (s=1,\dots,n),\\ \frac{dz}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{dR}{dx_i}\bar{f}_i(\bar{x},\bar{u}),\end{aligned}\right\} \qquad /3.1'/$$

которая решается при начальных условиях:

$$x_s(0)=x_{s,0}\quad (s=1,\dots,n),\ z(0)=R(\bar{x}_0), \qquad /1.2'/$$

причем условие /1.3/ имеет вид:

$$z(T,\bar{u}^{o}_{0,T})=\max_{\bar{u}_{0,T}\in K} z(T,\bar{u}_{0,T}). \qquad /1.3'/$$

Будем в дальнейшем считать, что в случае вышеуказанной задачи I для системы /3.1'/ множество

$$V^{*}=\{\bar{u}:u_i\in\{-1,0,1\}\}.^{*/}$$

Изложим теперь алгоритм динамической бидихотомии приближенного решения задачи II для системы /3.1/ при указанных предположениях.

Зададимся некоторым достаточно большим N. В дальнейшем предполагаем, что $m\leq 10$, $n\leq 10$, $10\leq N<100$. Обозначим через $F(\bar{x}^{*},\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,t_1,t_2,t^{*})$ получаемое в точке $t=t^{*}$ решение системы /3.1/ при начальных условиях $\bar{x}(0)=\bar{x}^{*}$ и управлении

$$\bar{u}(t)=\begin{cases}\bar{u}_1 & \text{при } t\in[0,t_1],\\ \bar{u}_2 & \text{при } t\in[0,t_2],\\ \bar{u}_3 & \text{при } t\in[t_2,t^{*}],\end{cases}$$

где $\bar{u}_l\equiv const\ (l=1,2,3)$.

Кроме того, обозначим:

$$F_1(\bar{x}^{*},\bar{u}_1,\bar{u}_2,t_1,t^{*})=F(\bar{x}^{*},\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_2,t_1,t^{*},t^{*}),$$

$$F_2(\bar{x}^{*},u_1,t^{*})=F_1(\bar{x}^{*},\bar{u}_1,\bar{u}_1,t^{*},t^{*}).$$

Алгоритм реализуется за конечное число шагов, причем каждый шаг выполняется в два этапа.

---

*/ Мы считаем, что V^{*} соответствует $U=\{\bar{u}:|u_i|\leq 1\}$.

Приступим к первому шагу. Сначала находится

$$R_1' = \max_{0<k<N} \ \max_{\bar{u}_1}{}^* \max_{\bar{u}_2}{}^* R(\bar{F}_1(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, t_k, T)), \qquad /3.3_{\mathrm{I}}/$$

где $t_k = \frac{T}{N} k$. Запоминаем R_1', а также те $k = k_1'$, $\bar{u}_1 = u_1'$, $\bar{u}_2 = u_2'$, при которых достигается $/3.3_{\mathrm{I}}/$.

На втором этапе первого шага ищем

$$R_1 = \max_{0<k\leq k_1'} \ \max_{\bar{u}}{}^* R(\bar{F}(\bar{x}_0, \bar{u}, \bar{u}_1', \bar{u}_2', t_k, t_{k_1'}, T)). \qquad /3.4_{\mathrm{I}}/$$

Пусть этот максимум достигается при $k = k_1$, $\bar{u} = \bar{u}^1$. Запоминаем k_1, k_1', $\bar{u}_1, \bar{u}_1', \bar{u}_2'$, а также R_1, $\bar{x}_1 = \bar{F}_2(\bar{x}_0, \bar{u}_1, t_{k_1})$, $T_1 = T - T_{k_1}$. На этом первый шаг алгоритма заканчивается.

Предположим теперь, что мы проделали уже p шагов алгоритма, $p \geq 1$, причем определили

$$R_p, k_1, \ldots, k_p, \ k_p', \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \ \bar{u}_1^p, \ \bar{u}_2^p, \bar{x}_p = F_2(x_{p-1}, \bar{u}_p, t_{k_p}),$$
$$T_p = T_{p-1} - t_{k_p}, \ N_p = N_{p-1} - k_p. \text{*}/$$

Если $T_p \leq \frac{T}{N}$, то выдаем на печать R_p и две последовательности:

$$\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^p, \ \bar{u}_1^p, \ \bar{u}_2^p; \quad \tau_1, \ldots, \tau_p, \ \tau_{p+1},$$

где

$$\tau_l = \sum_{j=1}^{l} t_{k_j} \quad \text{при} \quad 1 \leq l \leq p,$$
$$\tau_{p+1} = \sum_{j=1}^{p} t_{k_j} + t_{k_p'},$$

причем каждое τ_i представляет собой i -й момент переключения с одного постоянного управления на другое. Если же, наоборот, $T_p > \frac{T}{N}$, то переходим к $(p+1)$ -му шагу. На $(p+1)$ -м шаге ищем сначала

$$R_{p+1}' = \max_{0<k\leq N_p} \ \max_{\bar{u}_1}{}^* \max_{\bar{u}_2}{}^* R(F_1(\bar{x}_p, \bar{u}_1, \bar{u}_2, t_k, T_p)). \qquad /3.3_{p+\mathrm{I}}/$$

Пусть $/3.3_{p+\mathrm{I}}/$ достигается при $k = k_{p+1}'$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2^{p+1}$, $\bar{u}_2 = \bar{u}_2^{p+1}$. На втором этапе /p+I/ -го шага находим

$$R_{p+1} = \max_{0<k\leq k_{p+1}'} \ \max_{\bar{u}}{}^* R(\bar{F}(x_p, \bar{u}, u_1^{p+1}, \bar{u}_2^{p+1}, t_k, t_{k_{p+1}'}, T)). \qquad /3.4_{p+\mathrm{I}}/$$

Предположим, что максимум $/3.4_{p+\mathrm{I}}/$ достигается при $k = k_{p+1}$, $\bar{u} = \bar{u}^{p+1}$. После /p+I/ -го шага запоминаем:

$$R_{p+1}, k_1, \ldots, k_p, \ k_{p+1}, k_{p+1}', \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^{p+1}, u_1^{p+1}, \bar{u}_2^{p+1},$$
$$\bar{x}_{p+1} = F_2(\bar{x}_p, \bar{u}_{p+1}, t_{k_{p+1}}), T_{p+1} \ \ T_p \ \ t_{k_{p+1}}, N_{p+1} \ \ N_p \ \ K_{p+1}.$$

Процесс заканчивается после некоторого p^* -го шага, где $1 \leq p^* \leq N-1$.

Количество времени, необходимое для решения задачи с помощью данного алгоритма, не превосходит $c(n) N^2 m^2$, где $c(n)$ зависит от размерности n системы /3.I/ и сложности программы.

В приложении II содержится пример программы для М-20 для отыскания аппроксимации оптимального управления в случае системы

---

*/ $T_0 = T$, $N_0 = N$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\nu=1}^{8} a_{s\nu} x_\nu + a_s u_1 + b_s u_2 \quad (s=1,\ldots,8), \\ \frac{dx_9}{dt} &= \sum_{\nu=1}^{8} \alpha_\nu, x_\nu , \end{aligned}\right\} \qquad /3.5/$$

где $\alpha_s = s,\quad a_s = \frac{1}{s},\quad b_s = \frac{s-1}{s} \quad (s=1,\ldots,8);$

$a_{1,1}=1,\ a_{1,2}=0{,}1,\ a_{1,3}=2,\ a_{1,4}=0{,}3,\ a_{1,5}=3,$

$a_{1,6}=0{,}5,\ a_{1,7}=4,\ a_{1,8}=0{,}7;$

$a_{s,1}=a_{s-1,s} \quad (s=2,\ldots,8);$

$a_{s,\nu}=a_{s-1,\nu-1} \quad (s=2,\ldots,8,\ \nu=2,\ldots,8),$

причем система /3.5/ решается при начальных условиях:

$$x_s(0)=0 \qquad (s=1,\ldots,9),$$

и ищется максимум

$$R(\bar{x}(1)) = -x_9(1). \qquad /3.6/$$

Для системы /3.5/ с помощью прилагаемой программы были найдены оптимальное управление и оптимальное значение функционала/3.6/. Ввиду громоздкости выдачи мы приводим лишь часть ответа:

$$p^*=4;\ R_4=-0{,}3218046;\ u_1^{p^*}=u_2^{p^*}=u_{1,1}^{p^*}=u_{2,1}^{p^*}=0;$$

$$u_{1,2}^{p^*}=u_{2,2}^{p^*}=1;\ j_1^{p^*}=j_2^{p^*}=j_{2,10}^{p^*}=1;\ k^{p^*}=1,\ k^{p^*}=4,$$

Чтобы указанную программу можно было использовать для нахождения оптимального управления не только для системы /3.5/, в приложении Iсодержится инструкция к этой программе. В инструкции указывается, как нужно видоизменить программу, чтобы найти оптимальное управление для произвольных системы /3.I/ и функционала $R(\bar{x}(T))$. При этом следует учитывать, что размерности n и m соответственно векторов $\bar{x}$ и $\bar{u}$ не должны превосходить IO. Естественно, что в каждом конкретном случае необходимо отдельно программировать вычисление правых частей системы /3.I/, а также функционала $R(\bar{x})$.

Приложение I. Инструкция к программе

В дальнейшем используются следующие обозначения:

n – размерность системы /3.I/ ;

m – размерность вектора управления;

T – продолжительность процесса, для которого ищется максимум /3.2/ ;

N – целое число, определяющее последовательность узловых точек $t_k=\frac{k}{N}T \ (k=1,\ldots,N)$, в которых возможно переключение управления;

ε – точность вычисления решения системы /3.I/ с помощью метода Эйлера /СПО I3I/;

$h=\frac{T}{N}$.

Исходные данные распределяются в следующем порядке. Прежде всего заносятся в ячейки с адресами I05I – I053 следующие команды:

Адрес	Код команды				
I05I	0	00	0000	n	0000
I052	0	00	0000	n	0000
I053	0	00	0000	$n+2$	0000

Затем задаются числа в следующих ячейках

Адрес	Вводимое число	Адрес	Вводимое число
I054	ε	I060	h
I055	$N-1$	I06I	h
I057	$m-2$	I035	T

Остальной массив памяти распределяется следующим образом.

I/ Ячейки с номерами I000 - I034 отводятся для записи чисел, необходимых для написания подпрограммы вычисления правых частей системы /3.I/.

2/ Групповой перевод чисел в двоичную систему осуществляется в ячейках 0033 - 0036.

3/ Ячейки 0072 - 0267 используются для подпрограммы вычисления коэффициентов $\{b_{s,j}(x_1,\ldots,x_n)\}$ системы /3.I/. При этом конечные результаты вычислений засылаются по столбцам в ячейки I60I - I670.

4/ В ячейках 0270 - 0277 вычисляются $\{\sum_{j=1}^{m} b_{s,j}(x_1,\ldots,x_n)u_j(t)\}$. Результаты заносятся в адреса I60I и далее.

5/ Адреса ячеек 0300 - 0377 используются для счета $\{\varphi_s(x_1,\ldots,x_n)\}$ и правых частей $\{f_s\}$ системы /3.I/. Конечные результаты вычислений засылаются в ячейки IIII - II40, причем адреса I420 - I507 можно использовать для засылки промежуточных результатов.

6/ В адресах 0435 - 0457 содержится подпрограмма вычисления $R(\bar{x})$. Конечный результат счета засылается в ячейку I263. Для промежуточных результатов можно использовать ячейки II40 - II70.

Программа выдает на печать три массива чисел:

а/ первый массив чисел представляет собой $R_{p^*}(\bar{x})$, $\bar{u}_2^{p^*}, j_2^{p^*}$ и выдается из ячейки с номерами I303 и больше;

б/ вторым массивом являются $\bar{u}_1^{p^*}, j_1^{p^*}, k_1^{p^*}$, содержащиеся в адресе I27I и следующих за ним адресах;

в/ наконец, последним массивом являются $\bar{u}^l, j_l, k^l$ $(l=1,\ldots,p)$, находящиеся в соответствующих ячейках.

П р о г р а м м а

					КА	I
		000I				
0	50	00I3		7767		
0	70	7500	000I			
0	56	Z	003I			

0030			003I			КА 2
	0	50	0500		0730	
	0	70	0033			
	0	I6	0034	750I	76I0	
	0	52	I024	0042	I036	
	0	I6	0036	750I	76I0	
	0	52	I054	0042	I073	
	0	I6	0040	0705	07I5	
0040	0	00	0000	0000	0000	
	0	00	0000		I2I3	
	0	02	I055	776I	I2I2	
	0	00	776I		I277	

	0	00	0000		I745	3
	0	00	776I		I2II	
	0	00	776I		I223	
	0	00	776I		I224	
0050	0	00	0000		I225	
	0	0I	I055	776I	I3I4	
	0	00	I057		I2I0	
	0	00	I05I		I260	
	0	00	I052		I26I	
	0	00	0000	0000	0000	
	0	00	7762		I204	
	0	56	7762	0742	I205	

0060	0	72		I050		4
	3	02	7762	7760	I2I6	
	I	32	0002	006I	7777	
	0	72		I053		
	5	00	I060		I227	
	I	32	0002	0064	7777	
	0	04	I035	I3I4	I20I	
	0	00	I20I	0000	I753	
0070	0	56		0700		
	0	00				
	0	00			I500	
	0	52				

	0	0I	I500	776I	I500	5
	I	04	776I	I500	I60I	
	I	02	I500	776I	I6II	
	5	04	I6II	I500	I6II	
0I00	I	I2	0007	0074	000I	
	0	56		0270		
			0270			КА

без маркера

0270	0	72		I260		6
	5	05	I600	I2I7	I600	
	0	00	I2I7		I264	
	I	32	0002	027I	7777	
	0	72		I26I		
	5	05	I600	I22I	I600	
	0	00	I22I		I265	
	I	32	0002	0275	7777	
0300	0	52				
	7	0I	I60I	I6II	IIII	
	I	I2	0007	030I	000I	
	0	00			II2I	

7

	0	52			
	5	00	I024		I650
	I	I2	00I0	0305	000I
	0	00	7722		I665
03I0	0	00			I502
	0	52			
	6	05	I650	I063	I50I
	0	0I	I502	I50I	I502
	I	I2	0007	03I2	000I
	0	72		I665	
	5	0I	III0	I502	III0
	0	02	I660	776I	I660

8

0320	0	36	I657	0326	I507
	0	I3	I665	7722	I665
	0	52			
	5	00	I650		I65I
	I	I2	0006	0323	000I
	0	56	I507	03I0	I650
	0	00			I505
	0	52			
0330	0	0I	I505	776I	I505
	7	05	I063	I063	I666
	5	05	I666	I505	I666
	2	0I	II2I	I666	II2I

9

	I	I2	0007	0330	000I	
	0	56		0340		
			0340			КА

без маркера

10

0340	0	56		007I	
	0	72		I053	
	5	00	I357		I060
	I	32	0002	0342	7777
	0	56		0070	
	0	00	0000	0000	0000
	0	00			
	0	00			
0350	0	02	I753	I062	I75I
	0	02	I75I	I054	
	0	36		0356	
	0	02	I75I	I06I	

II

	0	76		0345	
	0	56	I75I	0345	I06I
	0	00	I060		I06I
	0	00	0000	0000	0000
0360	0	72		I053	
	5	00	I060		I357
	I	32	0002	036I	7777
	0	00	I040		0357
	0	56		04II	
	0	02	I223	776I	I223
	0	36		0407	
	0	56		0736	

0370	0	00	I26I		I706	I2
	0	00	I264		I7I0	
	0	00	I265		I7II	
	0	00	027I		I73I	
	0	00	0272		I732	
	0	00	0275		I733	
	0	00	0276		I734	
	0	00	I260		I705	
0400	0	00	I737		0272	
	0	00	I740		0275	
	0	00	I74I		0276	
	0	00	I275		I260	
	0	00	I276		I26I	I3
	0	00	I736		027I	
	0	56		0345		
	0	00	776I		I223	
04I0	0	00	I042		0364	
	0	02	I225	776I	I225	
	0	36		043I		
	0	00	I260		I700	
	0	00	I26I		I70I	
	0	00	I264		I702	
	0	00	I265		I703	
	0	00	027I		I724	
0420	0	00	0272		I725	I4
	0	00	0275		0726	
	0	00	0276		I727	
	0	00	I3I0		I260	
	0	00	I307		I26I	
	0	00	I720		027I	
	0	00	I72I		0272	
	0	00	I722		0275	
0430	0	00	I723		0276	
	0	02	I2II	776I	I2II	
	0	76	I035	0345	I753	
	0	00	0000	0000	00000	
	0	00	0000	0000	0000	I5
	0	02	0000	I073	I263	
	0	56		0460		
			0460 без маркера		КА	
0460	0	02	I263	I303		I6
	0	36		0533		
	0	00	I263		I303	
	0	00				
	0	00	I264		I304	
	0	00	I265		I305	
	0	I3	775I	I260	I306	
	0	0I	I306		I306	
0470	0	I3	775I	I05I	I5I4	
	0	0I	I5I4		I5I4	
	0	00	I260		I3I0	
	0	00	I26I		I307	

	0	00	027I		I720	I7
	0	00	0272		I72I	
	0	00	0275		I722	
	0	00	0276		I723	
0500	0	04	I306	I5I4	I306	
	0	56		0540		
	0	00	I702		I27I	
	0	00	I703		I272	
	0	I3	775I	I700	I273	
	0	0I	I273		I273	
	0	04	I273	I5I4	I273	
	0	00	I700		I275	
05I0	0	00	I70I		I276	I8
	0	00	027I		I736	
	0	00	0272		I737	
	0	00	0275		I740	
	0	00	0276		I74I	
	0	00	I303		I745	
	0	00	I277		I274	
	0	00	I277		I300	
0520	0	56		0534		
	0	72		0040		
	I	00	I7I0		2050	
	I	00	I7II		205I	
	I	I3	775I	I705	2052	I9
	5	0I	2052		2052	
	5	04	2052	I5I4	2052	
	I	00	I277		2053	
0530	0	72		I053		
	5	00	I357		I327	
	I	32	0002	053I	7777	
	0	56		0540		
	0	72		I053		
	5	00	I227		I357	
	I	32	0002	0535	7777	
	0	00	I2I4		I753	
0540	0	02	I204	776I	I204	20
	0	36		0545		
	0	33	0275	7722	0275	
	0	33	0276	7724	0276	
	0	56		034I		
	0	00	7762		I204	
	0	I3	0275	I206	0275	
	0	I3	0276	I207	0276	
0550	0	02	I205	776I	I205	
	0	36	I22I	0555	I265	
	0	I3	027I	7722	027I	
	0	I3	0272	7724	0272	
	0	56		034I		2I
	0	33	027I	I206	027I	
	0	33	0272	I207	0272	
	0	00	7762		I205	
0560	0	02	I2I0	776I	I2I0	
	0	36	I2I7	0567	I264	
	0	I3	I260	I05I	I260	
	0	33	I26I	I05I	I26I	
	0	I3	0275	II76	0275	
	0	I3	0275	II77	0275	
	0	56		034I		
	0	00	I5I7		0275	

0570	0	I6	057I	005I	0055	22
	0	00	0000	0000	0055	
	0	00	0000	0000	0000	
	0	02	I224	776I	I224	
	0	36		06I0		
	0	00	776I		I225	
	0	00	I046		0433	
	0	00	776I		I2II	
0600	0	00	0577		0434	
	0	00	I04I		0463	
	0	05	I20I	I277	I2I4	
	0	00	I2I4		I753	
0604	0	00	0000		0533	23
	0	02	I303	I745		
	0	36		0534		
	0	56		07I6		
	0	00	0000		0357	
	0	00	776I		I224	
	0	00			I225	
	0	00			0433	
	0	00			0434	
	0	00			0463	
	0	00	050I		0533	
	0	00				
0620	0	02	I2I2	776I	I2I2	24
	0	36		0626		
	0	0I	I277	776I	I277	
	0	05	I20I	I277	I2I4	
	0	00	I2I4		I753	
	0	56		034I		
	0	00			0364	
	0	00	776I		I225	
0630	0	00	I037		0433	
	0	00	0577		0434	
	0	I3	046I	0626	046I	
	0	00	I044		0463	
	0	00	06I0		0533	25
	0	00	I043		0572	
	0	00	7747		I303	
	0	02	I300	776I	I300	
0640	0	36		0646		
	0	0I	I2I3	776I	I2I3	
	0	00	I2I3		I277	
	0	05	I20I	I277	I2I4	
	0	00	I2I4		I753	
	0	56		034I		
	0	00	I045		0364	
	0	33	046I	0626	046I	
0650	0	00			0572	26
	0	I6	0652	06I0	06I7	
	0	00			06I7	
	0	72		0040		
	2	05	I20I	2053	I200	
	0	02	I035	I200	I035	
	2	02	I3I4	2053	I3I4	
	0	02	I3I4	776I	I055	
0660	0	02	I20I	I035		
	0	76		0667		
	0	72		I053		
	5	00	I327		I060	

	I	32	0002	0663	7777		27
	0	I3	0040	I520	0040		
	0	56	0000	0040	I062		
	0	I6	0670	750I	76I0		
0670	0	72	I303	0027	I306		
	0	I6	0672	750I	76I0		
	0	72	I27I	0027	I274		
	0	I4	0064	0040	I52I		
	0	I3	I047	I52I	0676		
	0	I6	0676	750I	76I0		
	0	00					
	0	I7					
			0700			КА	28
	0	52	7020		754I		
	0	52	7020		76I5		
	0	I6	0703	750I	76I0		
	0	II	III0	0I3I	I062		
	0	00	I054	0072	0346		
0705	0	I3	7722	7722	I206		
	0	I4	0II4	I206	I207		
	0	I4	0II4	I05I	II76		
	0	I4	0064	I05I	II77		
	0	I3	0275	II76	0275		
	0	I3	0275	II77	0275		
	0	00	0275		I5I7		29
	0	I3	I050	7722	I520		
	0	00					
	0	00	I260		I700		
	0	00	I26I		I70I		
	0	00	I264		I702		
	0	56	I265	0502	I703		
	0	00	I700		I260		
	0	00	I70I		I26I		
	0	00	I724		027I		
	0	00	I725		0272		
	0	00	I726		0275		
0727	0	56	I727	0434	0276		30
	0	00	I73I		027I		
	0	00	I732		0272		
	0	00	I733		0275		
	0	00	I734		0276		
	0	00	I705		I260		
	0	56	I706	0434	I26I		
	0	02	I277	I274			
	0	76		0743			
0740	0	05	I20I	I274	I753		
	0	56		0370			
	0	56	7747	0060	I303		
0743	0	00	I264		I7I0		3I
	0	00	I265		I7II		
	0	00	I260		I705		
	0	56	I046	0407	0433		
			I024			КА	
			Z				

I024		0I	I00	000	000		32
		00	I00	000	000		
		0I	200	000	000		
		00	300	000	000		
		0I	300	000	000		
		00	500	000	000		
		0I	400	000	000		
		00	700	000	000		
		0I	700	000	000		
		0I	I00	000	000		
		00	000	000	000		
	0	56	776I	0730	I225	команда	
							33
I040	0	56		0364		команда	
	0	56		0502		команда	
	0	56		043I		команда	
	0	56		0637		команда	
	0	56		052I		команда	
	0	56		04II		команда	
	0	56	776I	0722	I225	команда	
	0	72	2050	0027	2053	команда	
I050	0	00	0000	0003	0000	команда	
	0	00	0000	00I0	0000	команда	
	0	00	0000	00I0	0000	команда	
	0	00	0000	00I3	0000	команда	
	-	0I	I00	000	000		34
		0I	400	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
I060		00	200	000	000		
		00	200	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
I070		00	000	000	000		35
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
		00	000	000	000		
		Карта сбоя					36
			7000			КА	
	0	50	0500		I000		
	0	70	0030				
	0	50	0500		7500		
	0	70	7020				
	0	50	0500		7767		
	0	70	750I				
	0	I6	7007	750I	76I0		
	0	72	I030	0027	II00		
	0	I6	70II	750I	76I0		
	0	72	I200	0027	I747		
	0	I7					

Поступила в редакцию 3.7.1968г.

Литература

1. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

2. В.В.Леонов. Метод динамической $(k_1, \ldots, k_s)$ - хотомии для решения задач на оптимум. Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, вып 13.

3. Л.И.Розоноэр. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, №№ 10-12.