Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.9.

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

В.В.Гороховик, Ф.М.Кириллова /Минск/

Рассматриваются линейные дифференциальные игры нескольких лиц, когда платежными функциями являются расстояния до заданных точек или квазивыпуклые функции конечного состояния.

1. На отрезке времени $[t_o, T]$ рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)u_i(t), \qquad /1/$$

где x - n -мерный фазовый вектор, $u_i(t)$ - r_i -мерная интегрируемая функция-управление игрока P_i, подчиненная в каждый момент времени ограничениям

$$u_i(t) \in U^i, \quad \forall t \in [t_o, T], \qquad /2/$$

$U^i \subset E^{r_i}$ - выпуклые, ограниченные, замкнутые множества, $A(t)$, $B_i(t)$, $i=1,\dots,m$ - матрицы соответствующих размерностей, являющиеся непрерывными функциями времени.

Пусть игрок P_K стремится минимизировать на траекториях системы /1/ k -й функционал системы функционалов

$$\Omega = \{ J_i : J_i(u_1,\dots, u_m) = \varphi_i(x(T)), i=1,\dots,m \}. \qquad /3/$$

Предполагается, что в каждый момент t игроки знают состояние x системы, уравнение /1/ и ограничения /2/.

Под стратегией V_K игрока P_K будем понимать правило выбора управления u_K в каждый момент времени t, $t \in [t_o, T]$

Задача А. Найти такие стратегии $V_1^o, \dots, V_m^o$, для которых выполняются соотношения

$$\varphi_i(x^o(T)) \le \varphi_i(x^i(T)), \ i=1,\dots,m, \qquad /4/$$

Здесь $x^o(T)$ - точка траектории системы /1/, соответствующей стратегиям $V_1^o, \dots, V_m^o$, $x^i(T)$ - точка траектории, соответствующей управлениям $u_1^o(t),\dots, u_{i-1}^o(t), u_i(t), u_{i+1}^o(t),\dots, u_m^o(t)$, где $u_s^o(t)$, $s=1,\dots m, s\ne i$, формируется на основании стратегии V_s^o, $u_i(t)$ - произвольное управление.

В этом случае будем говорить, что стратегии $V_1^o,\dots, V_m^o$ уравновешивают в смысле Нэша [1] систему функционалов Ω.

2. Рассмотрим случай, когда

$$J_i(u_i,\dots,u_m) = \| x(T) - c^i \|, \qquad /5/$$

где c^i - заданные точки в E^n.

Предположим, что в момент t реализовалось состояние x системы /1/. По формуле Коши получим, что при управлениях u_i

[*] Статья написана по материалам доклада, прочитанного на II Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики

$$x(T,u_1,\ldots,u_m)=\Phi(T,t)x+\sum_{i=1}^{m}\int_t^T \Phi(T,\tau)B_i(\tau)u_i(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(T,t)$ - фундаментальная матрица однородной системы, соответствующей системе /I/. Следовательно, k -й функционал из /5/ можно записать следующим образом:

$$\mathcal{J}_k(u_1,\ldots,u_m)=\max_{\|g\|=1}\left\{(g,b_k(t,x))+\sum_{i=1}^{m}(g,S_i(t)u_i)\right\}, \qquad /6/$$

где

$$b_k(t,x)=\Phi(T,t)x-c^k,$$

$$S_i(t)u_i=\int_t^T\Phi(T,\tau)B_i(\tau)u_i(\tau)d\tau.$$

Для решения задачи А рассмотрим для каждого игрока P_k вспомогательную задачу.

З а д а ч а В. Зафиксируем управления $u_i(t), i=1,\ldots,m, i\neq k$, и найдем

$$\delta_k(t,x/u_i)=\min_{u_k\in U^k}\|x(T)-c^k\|.$$

Предположим, что управления $u_i(t), i=1,\ldots,m, i\neq k$, выбраны из условия

$$\delta_k(t,x)=\max_{u_i\in U^i}\delta_k(t,x/u_i)=\max_{u_i\in U^i}\min_{u_k\in U^k}\|x(T)-c^k\|. \qquad /7/$$

Функцию $\tilde{u}_k(s,t)$, решающую задачу /7/, назовем оптимальным программным управлением игрока P_k. Используя /6/ и теорему о минимаксе [2], вычислим

$$\delta_k(t,x)=\max_{\|g\|=1}\left\{(g,b_k(t,x))+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}\max_{u_i\in U^i}(g,S_i(t)u_i)+\min_{u_k\in U^k}(g,S_k(t)u_k)\right\}. \qquad /8/$$

Будем говорить, что имеет место регулярный случай [3], если $\forall\{t,x\}$ и для всех k, для которых $\delta_k(t,x)>0$, минимум в правой части /8/ при соответсвующих k достигается на единственном элементе $g^k(t,x)$.

Согласно [2], в регулярном случае экстремальные векторы непрерывно зависят от t и x. Оптимальные программные управления $\tilde{u}_i$, $i=1,\ldots,m$, [4] определяются в каждый момент $s, s\in[t,T]$ из соотношения

$$(g^i(t,x),\Phi(t,s)B_i(s)\tilde{u}_i(s,t))=\max_{u_i\in U^i}(g^i(t,x),\Phi(t,s)B_i(s)u_i). \qquad /9/$$

Обозначим символ $U_i(t,x)$ множество всех $\tilde{u}_i$, удовлетворяющих /9/ при $s=t$. Очевидно, что $U_i(t,x)\subset U^i$. Кроме того, нетрудно показать, что $U_i(t,x)$ выпуклы, замкнуты и полунепрерывны сверху по включению при изменении $\{t,x\}$.

Программной стратегией V_k^0 игрока P_k [4,5] назовем такую

стратегию, по которой в каждый момент t игрок P_k выбирает оптимальное программное управление, т.е. $u_k^o(t, x(t)) = \tilde{u}_k(t, t)$, где $\tilde{u}_k(t,t) \in U_k(t,x)$, если $\delta_k(t,x) > 0$, в противном случае $u_k^o(t, x(t)) = u_k$, где $u_k \in U^k$. Будем считать, что реализация управления $u_k^o(t)$, формируемого на основании стратегии V_k^o, является интегрируемой на $[t_0, T]$ функцией. Так как реализация управления по программной стратегии может быть осуществлена, вообще говоря, неединственным образом, то правую часть уравнения /I/ нужно рассматривать как многозначную функцию. Удобным математическим аппаратом для изучения такой ситуации является теория дифференциальных уравнений в контингенциях [6].

Аналогично [3] решением уравнения /I/ на отрезке $[t_0, T]$ при стратегиях $V_1^o, \ldots, V_m^o$ и начальном состоянии $\{t_0, x_0\}$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, которая удовлетворяет условиям $x(t_0) = x_0$ и для которой почти при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется соотношение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t) u_i(t),$$

причем $u_i(t)$ - интегрируемые функции такие, что

$$u_i(t) \in U_i(t, x), \quad i = 1, \ldots, m, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Обозначим символом $H(T, V_1^o, \ldots, V_m^o, t_0, x_0)$ сечение интегральной воронки [7], выходящей из точки x_0 при стратегиях $V_1^o, \ldots, V_m^o$ в момент $t = T$.

Т е о р е м а I. Программные стратегии уравновешивают в смысле Нэша систему функционалов /5/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим полную производную по времени функции $\delta_k(t, x)$. Имеем

$$\frac{d\delta_k(t,x)}{dt} = \Big[(g^k, \Phi(T,t)B_k(t)u_k(t)) - \min_{u_k \in U^k}(g^k, \Phi(T,t)B_k(t)u_k)\Big] +$$
$$+ \sum_{i=1, i \neq k}^{m} \Big[(g^k, \Phi(T,t)B_i(t)u_i(t)) - \max_{u_i \in U^i}(g^k, \Phi(T,t)B_i(t)u_i)\Big].$$

Предположим, что все игроки строят свои управления на основании программных стратегий и обозначим значение функции $\delta_k(t, x)$ на этих стратегиях через $\delta_k^o(t, x)$. Нетрудно подсчитать, что на отрезке $[t_0, T]$

$$\frac{d\delta_k^o(t,x)}{dt} = N_k(t), \qquad /10/$$

где

$$N_k(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \Big[(g^k, \Phi(T,t)B_i(t)u_i^o(t)) - \max_{u_i \in U^i}(g^k, \Phi(T,t)B_i(t)u_i)\Big].$$

Допустим, что все игроки сохранили программные стратегии, за исключением игрока P_k , который выбрал произвольное допустимое управление $u_k(t)$, На таком выборе

$$\frac{d\delta_k(t,x)}{dt} = N_k(t) + \varepsilon_k(t), \qquad /11/$$

где

$$\varepsilon_k(t) = (g^k, \Phi(T,t)B_k(t)u_k(t)) - \min_{u_k \in U^k}(g^k, \Phi(T,t)B_k(t)u_k) \geq 0.$$

Сравнивая /10/ и /11/, получаем неравенство

$$\frac{d\delta_k^0(t,x)}{dt} \leq \frac{d\delta_k(t,x)}{dt}.$$

Интегрирование последнего неравенства приводит к соотношению

$$\delta_k^0(T, x^0(T)) \leq \delta_k(T, x^k(T)), \qquad /12/$$

где

$$x^0(T) \in H(T, V_1^0, \ldots, V_m^0, t_0, x_0),$$
$$x^k(T) \in H(T, V_1^0, \ldots, u_k(t), \ldots, V_m^0, t_0, x_0).$$

Так как $\delta_k(T, x(T)) = \|x(T) - c^k\|$, то из /12/ следует неравенство

$$\|x^0(T) - c^k\| \leq \|x^k(T) - c^k\|$$

справедливо для всех k, $k=1,\ldots,m$, которое и доказывает теорему.

3. Пусть

$$J_k(u_1,\ldots,u_m) = \|x(T) - c^k\|, \; k=1,\ldots,m-1,$$
$$J_m(u_1,\ldots,u_m) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \|x(T) - d^i\|, \; \alpha_i > 0, \qquad /13/$$

$c^1,\ldots,c^{m-1}, d^1,\ldots,d^s$ - заданные точки в E^n .

Систему функционалов /13/ физически можно интерпретировать следующим образом. Игроки $P_1,\ldots,P_{m-1}$ стремятся "поразить" к моменту T заданные точки, а игрок P_m - систему точек или же, если $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, некоторую случайную точку с дискретным распределением вероятностей.

Для игроков $P_1,\ldots,P_{m-1}$ программные стратегии строятся также, как в п.2. Для построения программной стратегии для игрока P_m рассмотрим функцию

$$\delta_m(t,x) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \delta_m^j(t,x),$$

где

$$\delta_m^j(t,x) = \max_{u_i \in U^i} \min_{u_m \in U^m} \|x(T) - d^j\| = \max_{\|g\|=1} \Big\{(g, \Phi(T,t)x - d^j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} \max_{u_i \in U^i}(g, S_i(t)u_i) + \min_{u_m \in U^m}(g, S_k(t)u_m)\Big\}, \; j=1,\ldots,s, \qquad /14/$$

если максимум в правой части /14/ положителен, и $\delta^i_m(t,x)=0$ в противном случае.

Назовем случай регулярным, если $V\{t,x\}$ и для каждого k, для которых $\delta_k(t,x)>0$, максимумы в правой части /9/, если $k=1,\ldots,m-1$ и в правых частях /14/ для тех i, для которых $\delta^i_m(t,x)>0$, если $k=m$, достигаются на единственных элементах $g^k(t,x), g^{mi}(t,x)$.

Программной стратегией V^0_m игрока P_m назовем такую стратегию, по которой в каждый момент t игрок P_m выбирает $u^0_m(t,x(t))=\tilde{u}_m$, $\tilde{u}_m\in U_m(t,x)$, если $\delta_m(t,x)>0$, и $u^0_m(t,x(t))=u_m, u_m\in U^m$, в противном случае.

Здесь $U_m(t,x)$ - множество всех $\tilde{u}_m$, удовлетворяющих условию:

$$g^m(t,x),\Phi(T,t)B_m(t)\tilde{u}_m)=\min_{u_m\in U^m}(g^m(t,x),\Phi(T,t)B_m(t)u_m),$$

где

$$g^m(t,x)=\sum_{i\in I}\alpha_i g^{mi}(t,x),$$

I состоит из тех индексов i, для которых $\delta^i_m(t,x)>0$.

Вычислим полную производную функции $\delta_m(t,x)$ по t в силу системы /1/

$$\frac{d\delta_m(t,x)}{dt}=\sum_{i=J}^{s}\alpha_i\frac{d\delta^i_m(t,x)}{dt}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}\Big[(g^m,\Phi(T,t)B_i(t)u_i(t))-\sum_{j\in J}\alpha_j\max_{u_i\in U^i}(g^{mj},\Phi(T,t)B_i(t)u_i)\Big]+$$

$$+\Big[(g^m,\Phi(T,t)B_m(t)u_m(t))-\sum_{j\in J}\alpha_j\min_{u_m\in U^m}(g^{mj},\Phi(T,t)B_m(t)u_m)\Big).$$

Проводя рассуждения, аналогичные п.2, получим

$$\delta^0_m(T,x^0(T))\le\delta_m(T,x^m(T)), \qquad /15/$$

где

$$x^0(T)\in H(T,V^0_1,\ldots,V^0_m,t_0,x_0),$$
$$x^m(T)\in H(T,V^0_1,\ldots,V^0_{m-1},u_m,t_0,x_0).$$

Так как $\delta_m(T,x(T))=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\|x(T)-d^i\|$, то из /15/ следует

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\|x^0(T)-d^i\|\le\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\|x^m(t)-d^i\|.$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. Программные стратегии уравновешивают в смысле Нэша систему функционалов /13/.

4. Рассмотрим задачу А с системой функционалов /3/. Будем предполагать, что каждая функция $\varphi_i(x)$ определена во всем пространстве E^n, является непрерывной и удовлетворяет следующим условиям: 1/ множество $G_i(\alpha)=\{x:\varphi_i(x)\le\alpha\}$ выпукло, 2/$G_i(\alpha_1)=G_i(\alpha_2)$ тогда

и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$.

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу: найти стратегии, уравновешивающие систему функционалов

$$J_i^1(u_1, \dots, u_m) = \rho(x(T), G_i(\alpha_i)),\ i = 1, \dots, m,$$

где α_i выбраны и зафиксированы, $\rho(x(T), G_i(\alpha_i))$ - расстояние от точки $x(T)$ до множества $G_i(\alpha_i)$.

Рассуждая, как в п.2, введем величину

$$\delta_k(t, x, \alpha_k) = \max_{\|q\|=1} \Big\{(q, \Phi(T,t)x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \max_{u_i \in U^i} (q, S_i(t) u_i) + \min_{u_k \in U^k} (q, S_k(t) u_k) - \max_{z \in G_k(\alpha_k)} (q, z)\Big\}. \qquad /16/$$

Предполагая регулярность, аналогично предыдущему определим программные стратегии. Естественно, что в соотношении /9/ при определении оптимальных программных стратегий под $q^k(t, x)$ следует понимать вектор, доставляющий максимум в соотношении /16/.

Далее имеем

$$\delta_k(T, x^0(T), \alpha_k) \leq \delta_k(T, x^k(T), \alpha_k),\ k = 1, \dots, m, \qquad /17/$$

где $\quad x^0(T) \in H(T, V_1^0, \dots, V_m^0, t_0, x_0),$

$\quad\quad x^k(T) \in H(T, V_1^0, \dots, u_k(t), \dots, V_m^0, t_0, x_0).$

Нетрудно видеть, что функция $\delta_k(t, x, \alpha_k)$ строго убывает при возрастании α_k .

Пусть $\alpha_k^0(t, x)$ - наименьший корень уравнения

$$\delta_k(t, x, \alpha_k) = 0, \qquad /18/$$

где t, x фиксированы. Если уравнение /18/ не имеет решения, то полагаем $\alpha_k^0 = \min_x \varphi_k(x)$. Из неравенства /17/ и строгой монотонности $\delta_k(t, x, \alpha_k)$ по α_k следует $\alpha_k^0(T, x^0(T)) \leq \alpha_k^0(T, x^k(T))$. Но $\alpha_k^0(T, x(T)) = \varphi_k(x(T))$, следовательно

$$\varphi_k(x^0(T)) \leq \varphi_k(x^k(T)). \qquad /19/$$

Неравенство /19/ справедливо для $k = 1, \dots, m$ и для всех

$$x^0(T) \in H(T, V_1^0, \dots, V_m^0, t_0, x_0),\ x^k(T) \in H(T, V_1^0, \dots, u_k(t), \dots, V_m^0, t_0, x_0).$$

Следовательно, доказана

Т е о р е м а 3. Программные стратегии уравновешивают в смысле Нэша систему функционалов /3/.

Поступила в редакцию 15.7.1971 г.

Л и т е р а т у р а

1. Дж.Нэш. Бескоалиционные игры. "Матричные игры",М.,ФМ,1961.

2. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М.,Мир, 1964.

3. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. Физматгиз, М., 1970.

4. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова. О некоторых применениях функционального анализа в теории оптимальных процессов.-Изв.АН СССР,Техн. кибернетика, 1966, № 4.

5. F.M.Kirillova,The application of functional analysis to problems of pursuit.Math.Theory Control,New York-London,Acad. Press,1967.

6. Е.А.Барбашин, Ю.И.Алимов. К теории релейных дифференциальных уравнений.-Изв.Вузов, Математика, 1962, № 1.

7. А.Ф.Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.-Матем.сборник, 1960, т.51/93/, № 1.