Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.95.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР КАЧЕСТВА С ТРЕМЯ ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

И.А.Красс, М.А.Мухсинов

В данной работе предлагаются некоторые методы исследования дифференциальной игры качества,которые являются развитием метода"желательных направлений", предложенного в работе [2]. Применение этого метода демонстрируется на нелинейной игре качества с тремя терминальными поверхностями, которая является дифференциальным аналогом конечно-разностной игры двух математико-экономических моделей типа Леонтьева,рассмотренной в работе [3].

§ 1. Проницаемые поверхности

Рассмотрим следующую дифференциальную игру качества. Состояние игрока J_1 описывается вектором $x \in R^n$, а игрока J_2 - вектором $y \in R^m$, так что позиция игры есть вектор $z=(x,y) \in R^{n+m}$. Дифференциальная система, описывающая игру, имеет вид

$$\dot{z} = F(z, \varphi, \psi), \qquad /1/$$

где φ, ψ суть управления игроков J_1, J_2, соответственно, причем $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$, а $\Phi \subset R^n, \Psi \subset R^m$ есть выпуклые замкнутые ограниченные множества - множества значений допустимых управлений. Правая часть системы /1/ предполагается непрерывно дифференцируемой по всем переменным.

В пространстве R^{n+m} выделено выпуклое открытое множество Z - - пространство игры и система /1/ рассматривается только для $z \in Z$. Граница ∂Z множества Z представляется в виде $\partial Z = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ *). Если траектория $z(t)$ игры, начатой в момент $t=0$ из позиции $z_0 = (x_0, y_0)$, в момент $t>0$ попадает на поверхность Ω_1 $(z(t) \in \Omega_1)$, то игра считается законченной победой игрока J_1 соответственно, если $z(t) \in \Omega_2$, то - победой игрока J_2 и если $z(t) \in \Omega_3$, то игра оканчивается вничью. В каждый момент времени игрокам считается известным только состояние игры. Допустимыми управлениями в данной игре являются вектор-функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, кусочно-непрерывные слева и такие, что $\varphi(t) \in \Phi$, $\psi(t) \in \Psi$ для $t \geqslant 0$. Перед тем как формулировать понятие проницаемой поверхности опишем один геометрический факт.

Пусть V -замкнутое телесное множество из R^p, задаваемое системой ограничений

$$f_i(z) \geqslant 0, \quad i=1,\dots,k, \qquad /2/$$

*) Предполагается, что множества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ попарно не пересекаются.

где $f_i(z)$ – непрерывно дифференцируемые функции, определенные на всем R^p и такие, что $\operatorname{grad} f_i(z) \neq 0$ для любого $z \in R^p (i=1,\dots,k)$.

Пусть ∂V есть граница множества V. Точка $z_0 \in \partial V$ называется регулярной, если существует i, такое что $f_i(z_0)=0, f_j(z_0)>0$ для $j \neq i$; $j \in \{1,\dots,k\}$. В этом случае в точке z_0 существует касательная плоскость $\pi(z_0)$ у которой единичную нормаль направленную внутрь тела V, будем обозначать $\nu(z_0)$ /вектор $\nu(z_0)$ коллинеарен $\operatorname{grad} f_i(z_0)$ /. Выражение "внутрь тела V" понимается в следующем смысле. Поверхность $S_i=\{z \in R^p: f_i(z)=0\}$ разбивает все пространство R^p на две части, в одной из которых /там, где $f_i(z) \geqslant 0$/ находится множество V. Тогда вектор нормали $\nu(z_0)$ направлен именно в эту часть пространства.

Если $z_0 \in \partial V$ и z_0 – нерегулярная точка, то в ноль обращаются несколько из ограничений /2/, допустим, что $f_1(z_0)=f_2(z_0)=\dots =f_2(z_0)=0; f_j(z_0)>0; (2 \leq j \leq k)$. Тогда точке z_0 по вышеописанному правилу ставится в соответствие 2 – нормалей $\nu_i(z_0)$, $i=1,\dots,2 \leq k$. Поэтому в этом случае точке z_0 можно поставить в соответствие конус нормалей

$$N(z_0)=\left\{\nu \in R^p:\ \nu=\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \nu_i(z_0);\ \alpha_i \geqslant 0\right\}$$

/пересечение конуса $N(z_0)$ с единичной сферой в R^p будем обозначать $\bar{N}(z_0)$ /.

Л е м м а I. Пусть $z(s)$ есть гладкая кривая в R^p такая, что $z(s_0)=z_0 \in \partial V$ и $z(s) \notin V, (s>s_0)$. Тогда

$$\min_{\nu \in \bar{N}(z_0)} \left(\nu, \frac{dz}{ds}(s_0)\right) \leq 0 \qquad /3/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка z_0 такова, что $f_j(z_0)=0, j=1,\dots,2<k$ /т.е. $z_0 \in \bigcap_{j=1} S_j$ /. Пусть $\frac{dz}{ds}(s_0)=\ell$ и L есть луч, идущий из точки z_0 в направлении вектора ℓ, т.е. L состоит из точек $y(t)=z_0+\ell t$, где $t \geqslant 0$.

Положим, что /3/ не имеет место, т.е. $\min_{\nu \in \bar{N}(z_0)} (\nu, \ell)=\delta>0$ и, в частности,

$$(\nu_j(z_0), \ell) \geqslant \delta \quad (j=1,\dots,2). \qquad /4/$$

Так как нормаль $\nu_j(z_0)$ направлена в сторону полупространства $S_j^+ = \{z \in R^p: f_j(z)>0\}$, то существует t_j такое, что для $0<t \leq t_j$ выполняется $f_j(y(t))>0$. Пусть $\pi_j(z_0)$ – касательная плоскость к S_j в точке z_0, ввиду гладкости поверхности S_j имеем $\rho(y(t), S_j) = \rho(y(t), \pi_j(z_0))+o(t)$, причем по определению нормаль к S_j есть $\nu_j(z_0)$. Из /4/ и того, что $y(0) \in \pi_j(z_0)$, имеем $\rho(y(t), \pi_j(z_0))=c_j(t)$, где $c_j(t)>0$ $(j=1,\dots,2)$.

Таким образом, существует $0<t_0 \leq \min_{1 \leq j \leq 2} t_j$, такое, что для $0<t \leq t_0$ выполняется $f_i(y(t))>0$ $(i=1,\dots,2)$ и

$$\rho(y(t),\partial V)=ct+o(t), \qquad /5/$$

так как по предположению, $f_i(z_0)=f_i(y(0))>0$ для $i=r+1,\ldots,k$,то можно считать, что для $0<t\le t_0$ выполняется $f_i(y(t))>0$ $(i=r+1,\ldots,k)$, т.е. $y(t)\in V$.

Ввиду гладкости кривой $z(s)$ имеем $z(s)=z_0+l(s-s_0)+o(s-s_0)$, отсюда $\rho(z(t+s_0),y(t))=o(t)$, что вместе с /5/ приводит нас к включению $z(t+s_0)\in V$, как только $0<t\le t_0$, а это противоречит условию леммы.

Определение I. Будем говорить, что $(n+m-1)$ - мерная поверхность S является проницаемой для игрока $\mathcal{J}_1$ /или I-проницаема/, если для всех $z\in S$ выполняется

$$\max_{\varphi\in\Phi}\min_{\psi\in\Psi}(\nu(z),F(z,\varphi,\psi))>0, \qquad /6/$$

где $\nu(z)$ есть нормаль к поверхности S в точке z . /Мы предполагаем, что $S=\{z:f(z)=0\}$ и все нормали направлены в сторону полупространства $S^+=\{z:f(z)>0\}$ /.

Аналогично поверхность S называется I-непроницаемой /I-полупроницаемой/, если выполняется

$$\max_{\varphi\in\Phi}\min_{\psi\in\Psi}(\nu(z),F(z,\varphi,\psi))<(=)0.$$

Точно так же вводится понятие 2-проницаемости, 2-полупроницаемости и 2-непроницаемости. Нетрудно видеть, что данное определение есть обобщение понятия полупроницаемой поверхности,введенной в [I].

Если выполняется

$$\min_{\psi\in\Psi}\max_{\varphi\in\Phi}(\nu,F(z,\varphi,\psi))=\max_{\varphi\in\Phi}\min_{\psi\in\Psi}(\nu,F(z,\varphi,\psi)),$$

то поверхность $S=\{z:f(z)=0\}$ будет I-проницаемой, I-полупроницаемой или I-непроницаемой, тогда и только тогда, когда поверхность $S_1=\{z\in R^{n+m}:-f(z)=0\}$ является 2-непроницаемой, 2-полупроницаемой или 2--проницаемой соответственно /так как для $z\in S_1$ выполняется $\nu_1(z)=-\nu(z)$, где $\nu(z)$ - нормаль в той же точке для поверхности S /. В этом случае вместо выражения "I-полупроницаемость" будем употреблять слово "полупроницаемость" из [I] .

Теорема I. Пусть $V\subset Z$ телесное множество, задаваемое системой ограничений /2/ и пусть все поверхности, образующие границу множества, являются I-проницаемыми. Тогда у игрока $\mathcal{J}_1$ существует такое допустимое управление $\varphi(t)$, что если $z(t_0)\in V$, то для всех $t>t_0$ траектория $\{z(t)\}\subset V$ при любом поведении противника.

Доказательство. Положим противное, считая, что,каково бы ни было допустимое управление $\varphi(t)$, существует допустимое управление $\psi(t)$ такое,что найдется момент времени $t_1\geqslant t_0$, для которого $z(t_1)\notin V$. Тогда существует момент времени $t_2\geqslant t_0$ и число $\Delta>0$, такие что $z(t_2)\in\partial V$, а для $t\in(t_2,t_2+\Delta)$ выполняется $z(t)\notin V$.

Функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны слева и имеют разрывы справа только в конечном числе точек, поэтому существует $0<\Delta_1<\Delta$, такое что для $t\in[t_2, t_2+\Delta_1)$ траектория $z(t)$ имеет производную, совпадающую с $F(z(t), \varphi(t), \psi(t))$. Применяя к траектории $z(t)$ лемму на полусегменте $[t_2, t_2+\Delta_1)$, получаем:

$$\min_{\nu\in\bar N(z(t_2))}(\nu, F(z(t_2), \varphi(t_2), \psi(t_2)))\leq 0. \qquad /7/$$

Таким образом, для любого $\varphi(t_2)$ существует $\psi(t_2)$, такое что имеет место /7/, что противоречит /6/. Это противоречие и доказывает теорему.

С л е д с т в и е I. Пусть существует $\bar\varphi\in\Phi$, такое что для всех $\psi\in\Psi$ выполняется

$$\min_{\nu\in\bar N(z)}(\nu, F(z, \bar\varphi, \psi))>0 \qquad /8/$$

если только $z\in\partial V$.

Тогда теорема имеет место, ибо в этом случае, очевидно, граница V является I-проницаемой.

З а м е ч а н и е. Если выполняются условия теоремы I, и в границу множества V не входят точки $\mathcal{P}_2$, то каково бы ни было управление $\psi(t)$ игрока $\mathcal{J}_2$, у игрока $\mathcal{J}_1$ найдется непроигрышная стратегия. Множество V в этом случае является "безопасной" зоной для игрока $\mathcal{J}_1$.

Естественно, когда в границу множества V входит часть поверхности $\mathcal{P}_1$, то эти части могут и не обладать свойством I-проницаемости. Более того, для того, чтобы игра не продолжалась бесконечное время, вообще говоря, необходимо, чтобы эта часть поверхности была I-непроницаемой, т.е. выполнялось бы условие ее допустимости /см. [I] /.

Как в работе [2], введем конус "желательных" направлений в точке $z\in\bar Z$. Пусть $L(z,u)=\{z'\in R^{n+m}: z'=z+tu, t\geq 0\}$ - луч, проведенный из точки z в направлении вектора $u\in R^{n+m}\setminus\{0\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество

$$K_I(z)=\{u\in R^{n+m}: L(z,u)\cap\mathcal{P}_1\neq\phi, L(z,u)\cap(\mathcal{P}_2\cup\mathcal{P}_3)=\phi\}$$

называется конусом желательных направлений в точке z к поверхности $\mathcal{P}_1$. Аналогично вводится и конус $K_{II}(z)$.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства конуса $K_I(z)$:

/I/ Если $z\in\mathcal{P}_2\cup\mathcal{P}_3$, то $K_I(z)=\phi$

/2/ Если $\mathcal{P}_1$ - выпуклый многогранник, то множество $K_I(z)$ является выпуклым многогранным конусом.

/3/ $0\notin K_I(z)$, $K_I(z)\cap K_{II}(z)=\phi$.

Хотя конус желательных направлений введен несколько иначе, чем в работе [2], тем не менее нетрудно проверить, что утверждение, аналогичное теореме 2, остается справедливым. Именно, если траектория

игры такова, что

$$\dot{z}(t) \in K_I(z(t)) \qquad /9/$$

при всех $t \geqslant 0$, то игра не может окончиться выигрышем второго игрока.

Следовательно, если мы будем искать стратегии игроков в виде $\varphi(z)$, $\psi(z)$, где функции $\varphi(z) \in \Phi, \psi(z) \in \Psi$ при $z \in Z$ осуществляют синтез управлений /см. [4]/, то для нахождения непроигрышных стратегий надо найти такое множество $V \subset Z$, что для всех $z \in V$ существует $\bar{\varphi}(z)$, при котором $F(z, \bar{\varphi}(z), \psi(z)) \in K_I(z)$ для любого $\psi \in \Psi$. При этом, конечно, надо потребовать, чтобы на границе множества V стратегия $\bar{\varphi}(z)$ удовлетворяла бы условиям I-проницаемости /8/.

Удобно переформулировать сами условия I-проницаемости /8/ в несколько иной форме.

Следствие 2. Пусть для $z \in \partial V$ выполняется условие /9/ и неравенство

$$\min_{u \in K_I(z)} \min_{\nu \in \bar{N}(z)} (u, \nu) > 0. \qquad /10/$$

Тогда теорема I остается справедливой, ибо, как нетрудно проверить, в этом случае граница множества V является I-проницаемой.

Условие /10/ эквивалентно системе неравенств $\min\limits_{u \in K_I(z)} (u, \nu_i) > 0$, где ν_i -нормали в точке z к тем поверхностям S_i, для которых верно включение $z \in S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

§ 2. Сужение пространства игры для игры, двух линейных математико-экономических моделей

Из предыдущего параграфа следует, что если мы найдем телесное множество V, одной из границ которого является часть множества /или все множество/ $\mathcal{R}_1$, причем для $z \in V$ выполнено /9/, а на граничных поверхностях V, не входящих в $\mathcal{R}_1$, условие I-проницаемости /8/ или /10/, то множество V является непроигрышным. Если мы можем утверждать, что траектории за конечное время обязаны покинуть множество V, то при всех начальных позициях $z_0 \in V$ первый игрок может обеспечить себе выигрыш при любой допустимой стратегии второго игрока. В последнем случае, взяв в качестве новых терминальных поверхностей граничные поверхности множества V, мы сужаем пространство игры. Этот прием наиболее хорошо демонстрируется в дифференциальной игре на выживание двух линейных экономических моделей типа Леонтьева, которая в случае однопродуктных моделей рассматривалась в работах [2], [3].

Соответствующая игра имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A(x-f_1) - Df_2 \\ \dot{y} &= B(y-f_2) - Qf_1 \end{aligned}\right\} , \qquad /11/$$

где $x \in R_+^n$, $y \in R_+^m$ $/R_+^k$ есть неотрицательный ортант k -мерного евклидова пространства/; $0 \leq f_1 \leq x$; $0 \leq f_2 \leq y$ /неравенства понимаются покоординатно/; $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ -неотрицательные квадратные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$ - соответственно суть матрицы выпуска соответствующих моделей /см. [3]/; $D=(d_{ij}), Q=(q_{ij})$ неотрицательные матрицы размерности $n \times m$ и $m \times n$ соответственно суть матрицы взаимодействия.

В данной игре $Z = \overset{\circ}{R}{}_+^{n+m}$ $/\overset{\circ}{R}{}_+^k$ - внутренность множества R_+^k / позиция игры есть $(n+m)$- мерный вектор $z=(x,y)$, терминальные множества имеют вид:

$$\mathfrak{P}_1 = \bigcup_{i=1}^{m} \{z=(x,y): x>0, y\geq 0, y_i=0\};$$

$$\mathfrak{P}_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \{z=(x,y): x\geq 0, x_i=0, y>0\};$$

$$\mathfrak{P}_3 = \bigcup_{i,j=1}^{i=n, j=m} \{z=(x,y): (x,y)\geq 0, x_i=0, y_j=0\}.$$

Хотя в этой игре конус $K_I(z)$ невыпуклый, но он является объединением выпуклых многогранных конусов.

Игра /11/ несколько отличается от игры /1/, описанной в § 1, но она может быть легко сведена к ней, для этого достаточно управляющие векторы f_i $(i=1,2)$ представить в виде $f_1 = \varphi \circ x$, $f_2 = \psi \circ y$. Здесь $\varphi \circ x$ есть покоординатное перемножение вектора φ на вектор x, причем $0 \leq \varphi \leq \mathbb{1}$; /где $\mathbb{1}$-вектор из R_+^n, все координаты которого равны 1./. Аналогично $0 \leq \psi \leq \mathbb{1}$, т.е. в данном случае

$$\Phi = \{\varphi \in R_+^n : 0 \leq \varphi \leq \mathbb{1}\}, \Psi = \{\psi \in R_+^m : 0 \leq \psi \leq \mathbb{1}\}.$$

Поэтому правомерно обозначать для краткости правую часть системы /11/ через $F(z,\varphi,\psi)$;$(\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi)$, что и будем мы делать всюду в дальнейшем.

Теперь опишем конус $K_I(z)$ в виде системы неравенств.

Для точки $z \in Z$ положим

$$\alpha_{kj}(z) = \frac{x_k}{y_j} \quad (k=1,\dots,n; j=1,\dots,m).$$

Рассмотрим систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &x'_k - \alpha_{kj}(z) y'_j > 0 \\ &(k=1,\dots,n) \\ &\qquad -y'_j > 0 \end{aligned}\right\} \qquad /12/$$

Обозначим через $K_j(z), (j=1,\dots,m)$ множество всех точек $z'=(x',y') \in R^{n+m}$ удовлетворяющих системе /12/. Пусть $K(z) = \bigcup_{j=1}^{m} K_j(z)$, тогда верна сле-

дующая

Лемма 2. $K_I(z)=K(z)$.

Доказательство. Пусть $z'\in K_I(z)$ означает, что существует номер $j\in\{1,\dots,m\}$ и число $T>0$ такие, что:

$$\begin{cases} y_j+Ty'_j=0, \\ y_i+Ty'_i\geqslant 0,\ i\neq j\ (i=1,\dots,m) \\ x_k+Tx'_k>0,\ (k=1,\dots,n). \end{cases} \qquad /13/$$

Из /13/ имеем $T=\frac{y_j}{-y'_j}>0$, откуда, в свою очередь, получаем

$$-y'_j>0. \qquad /14/$$

Подставляя в последние n -неравенств /13/ значение $T=\frac{y_j}{-y'_j}$ получаем

$$x'_k-\alpha_{kj}(z)y'_j>0\quad (k=1,\dots,n),$$

что вместе с /14/ приводит к включению $z'\in K_j(z)$, т.е. $K(z)\supset K_I(z)$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть $z'\in K(z)$, тогда существует $j\in\{1,2,\dots,m\}$, такое что $z'\in K_j(z)$, согласно /12/, отсюда следует, что $y'_j<0$. Поэтому существует непустое множество индексов $J\subset\{1,2,\dots,m\}$ таких, что $y'_j<0,(j\in J)$.

Рассмотрим

$$T=\min_{j\in J}\left\{\frac{y_j}{-y'_j}\right\}=\frac{y_r}{-y'_r}$$

Тогда имеют место соотношения:

$$\begin{cases} y_r+Ty'_r=0 \\ y_j+Ty'_j\geqslant 0,\ j\neq r,\ j=1,\dots,m \end{cases} \qquad /15/$$

С другой стороны, так как $z'\in K_j(z)$, имеем

$$x_k+\frac{y_j}{-y'_j}x'_k>0,\quad k=1,\dots,n$$

Если $x'_k>0$, то отсюда следует

$$x_k+Tx'_k>0 \qquad /16/$$

если же $x'_k<0$, то $0<x_k+\frac{y_j}{-y'_j}x'_k<x_k+\frac{y_r}{-y'_r}x'_k=x_k+Tx'_k$,

т.е. опять выполняется /16/, что вместе с /15/ обеспечивает включение $z'\in K_I(z)$, что и требовалось доказать.

Введем следующие обозначения:

$$B_k=\max_{1\leq j\leq m}\{b_{jk}\};\quad b_j=\min_{1\leq k\leq m}\{b_{jk}\},$$
$$D_i=\max_{1\leq k\leq m}\{d_{ik}\};\quad q_\ell=\min_{1\leq k\leq m}\{q_{k\ell}\}. \qquad /17/$$

Пусть V_j - множество всех положительных решений системы неравенств:

$$\begin{cases} b_j x_i - D_i y_j \geq 0, \\ (i=1,\ldots,n) \\ \sum_{l=1}^{n} q_l x_l - \sum_{i=1}^{m} B_i y_i > 0. \end{cases} \qquad /18/$$

Такие решения заведомо существуют, например, $x>0$, $y=o(\xi)$, где $\xi = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ / $x>0$ означает, что $x_i>0$ для всех $i=1,\ldots,n$ /. Положим

$$V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j \qquad /19/$$

Т е о р е м а 2. Пусть имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} B_k b_k - \sum_{j=1}^{n} q_j D_j \geq 0. \qquad /20/$$

Тогда если игрок $\mathcal{J}_1$ применяет стратегию $\bar{\varphi} = 1$, то игра, начатая из точек $z \in V$, либо длится бесконечно долго, либо оканчивается выигрышем первого игрока.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что V_j есть телесный многогранник $(j=1,\ldots,m)$, а следовательно, и V имеет непустую внутренность.

Граница ∂V множества V состоит из $[m(n+1)+1]$ -гиперплоскости, из которых $(m \cdot n + 1)$ задаются ограничениями вида /18/, а остальные гиперплоскости входят в терминальную поверхность $\mathcal{P}_1$. Согласно замечанию к теореме I для докательства теоремы достаточно проверить, что первые $(m \cdot n + 1)$ из граничных гиперплоскостей являются I-проницаемыми.

Действительно, пусть ν_{ij} -нормаль к гиперплоскости $b_j x_i - D_i y_j = 0$, направленная внутрь тела V_j. Тогда из /II/, /I7/, /I8/ вытекает:

$$\min_{\varphi \in \Psi} (\nu_{ij}, F(z,1,\varphi)) = \min_{\varphi \in \Psi} \Big\{ \sum_{k=1}^{m} (D_i b_{jk} - b_j d_{ik}) \varphi_k y_k +$$

$$+ D_i \Big(\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_k - \sum_{k=1}^{m} b_{jk} y_k \Big) \Big\} = D_i \Big(\sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_k - \sum_{k=1}^{m} b_{jk} y_k \Big) \geq$$

$$\geq D_i \Big(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k - \sum_{i=1}^{m} B_i y_i \Big) > 0,$$

где $i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m$. /Так как, по определению, $D_i b_{jk} \geq b_j d_{ik}$ для всех i,j,k, то минимум в вышеописанном соотношении достигается при $\varphi = 0$ /.

Делая аналогичные преобразования и используя неравенство /20/, имеем

$$\min_{\varphi\in\Psi}(\nu, F(z, 1, \varphi)) \geqslant \sum_{i=1}^{m} B_i \left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k - \sum_{i=1}^{m} B_i y_i\right) > 0,$$

где ν - нормаль к гиперплоскости

$$\sum_{k=1}^{n} q_k x_k - \sum_{i=1}^{m} B_i y_i = 0 .$$

Теорема доказана.

Следствие I. Легко проверить тот факт, что если траектория $z(t) \in V$, то $\dot{z}(t) \in K_I(z)$ /и даже более точно: если $z(t) \in V_j$, то $\dot{z}(t) \in K_j(z)$ /. Поэтому согласно доказанной теореме получается, что если $z(0) \in V$, то, применяя стратегию $\varphi = 1$, игрок $\mathcal{J}_1$ может всегда добиться выполнения включения $\dot{z}(t) \in K_I(z)$ для всех $t \geqslant 0$. По сути дела, первые n ограничений в /18/ есть запись условия $\dot{z}(t) \in K_I(z)$, а $(n+1)$-е ограничение есть условие I-проницаемости. Поэтому если коэффициенты рассматриваемых систем не удовлетворяют ограничению /20/, то в /18/ усложняются условия I--проницаемости. Однако выписыванием соответствующих ограничений, мы в данной статье заниматься не будем.

Следствие 2. Пусть в /18/ выполняется более сильное ограничение, а именно

$$\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell x_\ell - \sum_{i=1}^{n} B_i y_i \geqslant \varepsilon > 0$$

/такое множество будем обозначать V_ε /. Тогда игрок $\mathcal{J}_1$ применяя стратегию $\bar{\varphi} = 1$, выигрывает игру за конечное время.

Действительно, в этом случае, рассматривая $(n+i)$ - е уравнение системы /II/ имеем

$$\max_{\varphi\in\Psi} y_i = \max_{\varphi\in\Psi}\left[\sum_{j=1}^{m} B_{ij} y_j (1-\varphi_j) - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j\right] \leqslant \sum_{i=1}^{m} B_i y_i - \sum_{k=1}^{n} q_k x_k \leqslant -\varepsilon .$$

С другой стороны, для $z \in V$ выполняется $\dot{z}(t) \in K_I(z)$, а из работы [2] следует, что в этом случае $z(t) \in K_I(z(0)) + \{z(0)\}$ для всех $t > 0$. Нетрудно проверить, что $(K_I(z) + \{z\}) \cap R_+^{n+m} \subset V_\varepsilon$ для всех $z \in V_\varepsilon$, поэтому если $z(0) \in V_\varepsilon$, то $\dot{y}_i(t) \leqslant -\varepsilon$ для всех $t > 0$. Отсюда следует, что игра закончится за время

$$T \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \min_{1\leqslant i\leqslant m} y_i(0),$$

где $y_i(0)$ - начальное значение i -й координаты игрока $\mathcal{J}_2$.

Так как в дальнейшем анализируется случай $n=2$, $m=1$, то выпишем результаты этого параграфа для указанного случая.

При $n=2$, $m=1$ неравенство /20/ примет вид

$$\beta^2 \geqslant q_1 d_1 + q_2 d_2 \qquad /21/$$

/в данном случае матрица B есть одно число β , матрица D есть столбец $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$; матрица Q есть строка (q_1, q_2) /.

Многогранник V непроигрышных начальных состояний /при условии, что первый игрок применяет стратегию $\varphi = 0$ / есть множество точек $z = (x_1, x_2, y)$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{cases} \beta x_1 - d_1 y \geqslant 0 \,, \\ \beta x_2 - d_2 y \geqslant 0 \,, \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 - \beta y > 0 \,, \\ x_1 > 0, \; x_2 > 0, \; y \geqslant 0 \,. \end{cases} \qquad /22/$$

Многогранник V_ε , где первый игрок гарантирует себе победу за конечное время, отличается от /22/ заменой последнего неравенства на $q_1 x_1 + q_2 x_2 - \beta y \geqslant \varepsilon > 0$

На рис. I изображен многогранник V . Заметим, что в данном случае неравенство /2I/, накладываемое на коэффициенты системы /II/, несущественно, действительно, если

$$\beta^2 < q_1 d_1 + q_2 d_2 \qquad /23/$$

то из /22/ имеем

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 - \beta y \geqslant \frac{1}{\beta} q_1 d_1 y + \frac{1}{\beta} q_2 d_2 y - \beta y > 0$$

/последнее неравенство вытекает из /23//, т.е. в этом случае последнее неравенство в /22/ есть следствие двух предыдущих.

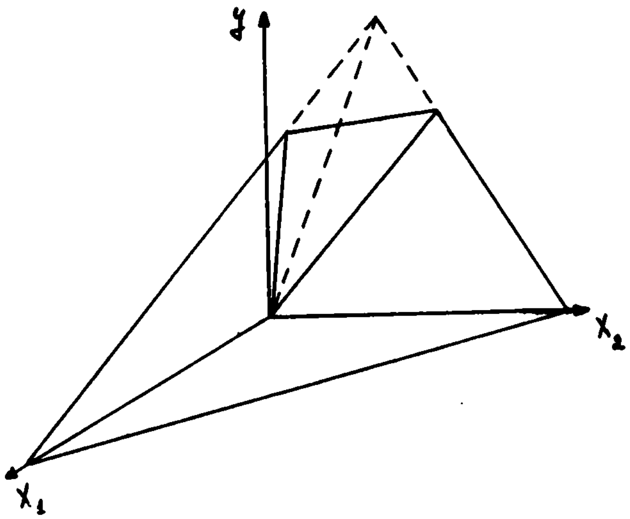

Рис. I.

На рис. I эта ситуация соответствует тому, что гиперплоскость $q_1 x_1 + q_2 x_2 - \beta y = 0$ проходит выше линии пересечения гиперплоскостей $\beta x_1 - d_1 x_1 = 0; \beta x_2 - d_2 y = 0$. Так как из доказательства теоремы 2 следует, что две последние плоскости I-проницаемые, то утверждение этой теоремы остается в силе.

§ 2. Исследование игры двух моделей при $n=2$; $m=1$

Исследование данной игры удобно проводить с помощью введенного выше понятия проницаемости. Изучим сначала условия проницаемости для поверхности B, задаваемой плоскостью

$$B=\{z=(x_1,x_2,y)\in \mathring{R}^3_+ : b_1x_1+b_2x_2-y=0,\ b_1^2+b_2^2\neq 0\},$$

где $\mathring{R}^3_+$ - внутренность неотрицательного ортанта в R^3 /предполагается, что $B\neq\Phi$ /. Заметим, что для любого $z\in B$ нормаль $\nu(z)$ в формуле /6/ одна и та же и совпадает с вектором $b=(b_1,b_2,-1)$.

Введем следующие обозначения:

$$h(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x\le 0,\end{cases}$$

$$c_i=b_1a_{1i}+b_2a_{2i}+(q_i-b_1a_{1i}-b_2a_{2i})\cdot h(q_i-b_1a_{1i}-b_2a_{2i}),$$
$$c_3=(b_1d_1+b_2d_2-\beta)\cdot h(b_1d_1+b_2d_2-\beta)+\beta. \qquad (i=1,2) \qquad /24/$$

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы плоскость B была I-проницаемой /полупроницаемой, I-непроницаемой/, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left.\begin{array}{c} c_1>(=,<)\,c_3b_1, \\ (c_2,-c_3)\geqslant(=,\le)\,c_3\cdot(b_2,-1) \end{array}\right| \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{c} c_2>(=,<)\,c_3b_2, \\ (c_1,-c_3)\geqslant(=,\le)\,c_3(b_1,-1) \end{array}\right| \qquad /25/$$

/Здесь векторы сравниваются покоординатно/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем теорему для случая I-проницаемости, так как остальные случаи совершенно аналогичны. Пусть $z\in B$ и плоскость B является I-проницаемой, это значит, что выполняется неравенство:

$$\min_{\varphi\in\Psi}\max_{\psi\in\Phi}(b,F(z,\varphi,\psi))=(b,F(z,\bar\varphi,\bar\psi))>0. \qquad /26/$$

/В данном случае $\Phi=\{(\varphi_1,\varphi_2):0\le\varphi_i\le 1,\ i=1,2\}$; $\Psi=\{\psi:0\le\psi\le 1\}$, $z=(x_1,x_2,y)$ /.

Из /26/ имеем

$$\bar\varphi_i=h(q_i-b_1a_{1i}-b_2a_{2i}) \quad (i=1,2)$$
$$\bar\psi=h(b_1d_1+b_2d_2-\beta).$$

Таким образом, управления $\bar\varphi$, $\bar\psi$ одни и те же для любой $z\in B$, а скалярное произведение $(b,F(z,\bar\varphi,\bar\psi))$ принимает вид:

$$(b,F(z,\bar\varphi,\bar\psi))=c_1x_1+c_2x_2-c_3y>0. \qquad /27/$$

Так как $z\in B$, т.е. $b_1x_1+b_2x_2-y=0$, то из /27/ имеем $c_1x_1+c_2x_2>c_3y=c_3b_1x_1+c_3b_2x_2$. Это неравенство обязано выполняться для всех $(x_1,x_2,y)\in\mathring{R}^3_+$, что влечет за собой /25/.

Итак, необходимость доказана, докажем достаточность.

Допустим, что вектор $b=(b_1,b_2,-1)$ удовлетворяет /25/ и точка $z = (x_1,x_2,y)\in B$. Возьмем

$$\bar{\varphi}_i = h(q_i - b_1 a_{1i} - b_2 a_{2i}) \quad (i=1,2)$$

$$\bar{\psi} = h(b_1 d_1 + b_2 d_2 - \beta) .$$

Тогда, учитывая /25/, непосредственным вычислением можно доказать следующее

$$(b, F(z,\bar{\varphi},\bar{\psi})) > C_3(b_1 x_1 + b_2 x_2 - y) = 0 . \qquad /27a/$$

С другой стороны, легко проверить, что $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\psi}$ удовлетворяют равенству

$$\min_{\psi} \max_{\varphi} (b, F(z,\varphi,\psi)) = (b, F(z,\bar{\varphi},\bar{\psi})) .$$

А это вместе с /27а/ и дает I-проницаемость поверхности B в точке z , но так как z - произвольная точка из B , то теорема доказана. Из теоремы следует, что если мы найдем все решения системы

$$(C_1, C_2, -C_3) = C_3(b_1, b_2, -1) , \qquad /28/$$

то тем самым определим в явном виде все I-полупроницаемые плоскости игры.

Вообще говоря, равенство /28/ приводит к нелинейной системе двух уравнений относительно b_1 , b_2 . Мы решим эту систему в предположении

$$\begin{cases} q_1 - \bar{b}_1 a_{11} - \bar{b}_2 a_{21} < 0, \\ q_2 - \bar{b}_1 a_{12} - \bar{b}_2 a_{22} < 0, \\ \bar{b}_1 d_1 + \bar{b}_2 d_2 - \beta > 0 , \end{cases} \qquad /29/$$

где $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ - решение системы /28/. /Ниже будет показано, что эта система непротиворечива/. Теперь, если учесть, что условию I-полупроницаемости

$$\min_{\psi} \max_{\varphi} (b, F(z,\varphi,\psi)) = (b, F(z,\bar{\varphi},\bar{\psi})) = 0$$

удовлетворяют только следующие стратегии:

$$\bar{\varphi}_i = h(q_i - b_1 a_{1i} - b_2 a_{2i}) \quad (i=1,2),$$

$$\bar{\psi} = h(b_1 d_1 + b_2 d_2 - \beta) .$$

/Последнее проверяется непосредственно/, то из /29/ имеем $\bar{\varphi} = 0$, $\bar{\psi} = 1$. Далее, система /28/ после подстановки в нее значений C_1 , C_2 , C_3 из /24/ примет вид:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 a_{11} + \bar{b}_2 a_{21} = (\bar{b}_1 d_1 + \bar{b}_2 d_2)\bar{b}_1 , \\ \bar{b}_1 a_{12} + \bar{b}_2 a_{22} = (\bar{b}_1 d_1 + \bar{b}_2 d_2)\bar{b}_2 . \end{cases} \qquad /30/$$

Отсюда

$$\bar{b}_i = \frac{\lambda a_{1i} + a_{2i}}{\lambda d_1 + d_2} \quad (i=1,2) ,$$

где

$$\lambda = \frac{a_{11} - a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}}$$

Из определения видно, что $\lambda > 0; \bar{b}_1 > 0, \bar{b}_2 > 0$, поэтому система /29/ непротиворечива.

Отметим, что если вместо неравенств /29/ выполняются другие, то мы получим другую систему для определения $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$. Так как вся дальнейшая методика однотипна для всех таких случаев, то мы будем рассматривать только случай, когда параметры системы удовлетворяют неравенствам /29/.

Итак, плоскость $\bar{b}_1 x_1 + \bar{b}_2 x_2 - y = 0$ является I-полупроницаемой, при $\bar{\varphi} = 0, \bar{\psi} = 1$, но так как в нашем случае $\max_{\varphi} \min_{\psi} (b, F(z,\varphi,\psi)) = \min_{\psi} \max_{\varphi} (b, F)$, то эта плоскость является также 2-полупроницаемой, т.е. просто полупроницаемой.

Л е м м а 3. Существует $\mu_0 < 1$ $(\mu_0 > 1)$, что плоскости $B_\mu = \{z \in \mathring{R}^3_+ : \mu \bar{b}_1 x_1 + \mu \bar{b}_2 x_2 - y = 0\}$ являются I-проницаемыми /I-непроницаемыми/, если $\mu_0 \le \mu < 1$, $(\mu_0 > \mu > 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в /29/ вместо $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ подставить $\mu \bar{b}_1$, $\mu \bar{b}_2$, то найдутся такие $\mu_0^1 < 1$; $\mu_0^2 \le 1$, что для $\mu \in [\mu_0^1, \mu_0^2)$ неравенства /29/ сохранятся и поэтому согласно определению c_i имеем:

$$c_i = \mu \bar{b}_1 a_{1i} + \mu \bar{b}_2 a_{2i} \quad (i = 1,2),$$
$$c_3 = \mu \bar{b}_1 d_1 + \mu \bar{b}_2 d_2 .$$

Отсюда

$$\frac{c_1}{\bar{b}_1 c_3} = \frac{\bar{b}_1 a_{11} + \bar{b}_2 a_{21}}{(\bar{b}_1 d_1 + \bar{b}_2 d_2)\bar{b}_1} = \frac{\lambda a_{11} + a_{21}}{(\lambda d_1 + d_2) b_1} = 1 ,$$

так как $\lambda = \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_2}$. Аналогично $c_2 / \bar{b}_2 c_3 = 1$, поэтому для $\mu \in [\mu_0^1, \mu_0^2]$ имеем

$$(c_1, c_2) > (<) c_3 (\mu \bar{b}_1, \mu \bar{b}_2),$$

если $\mu < 1$ /соответственно $\mu > 1$ /. Таким образом, условие теоремы 5 выполнено, что и доказывает лемму.

С л е д с т в и е. Так как I-проницаемость в направлении вектора $b_\mu = (\mu \bar{b}_1, \mu \bar{b}_2, -1)$ эквивалентна 2-непроницаемости в направлении вектора $-b_\mu$, то данная лемма может быть переформулирована соответствующим образом для случая 2-непроницаемости.

З а м е ч а н и е I. Нетрудно рассчитать, что для того, чтобы плоскость $\mu b_1 x_1 + \mu b_2 x_2 - y = 0$ была I-проницаема, первому игроку достаточно выбрать стратегию $\bar{\varphi} = 0$ /проницающая стратегия/.

З а м е ч а н и е 2. Аналогично можно доказать, что при $1 < \mu \le \mu_0$, где $\mu_0 > 1$, плоскость B_μ 2-проницаема в направлении вектора $-b_\mu$ /антинормали/.

Л е м м а 4. Множества вида

$$B_\mu^1 = \left\{ z \in \dot{R}_+^3 : \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - d_1 y > 0 \\ \mu x_1 - y = 0 \end{array} \right\}$$

при

$$\mu > \max\left\{ \frac{q_1}{a_{11}}, \frac{q_2}{a_{12}}, \frac{\beta}{d_1} \right\} \qquad /31/$$

являются I-проницаемыми в направлении своих нормалей $b_\mu = (\mu, 0, -1)$ причем проницающая стратегия есть $\bar{\varphi} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, учитывая /31/, легко убедиться в следующем соотношении

$$\min_{\psi} \max_{\varphi} (b_\mu, F(z, \varphi, \psi)) = (b_\mu, F(z, 0, 1)) = \mu(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - d_1 y) > 0,$$

которое, как известно, обеспечивает I-проницаемость множества B_μ^1 при $\bar{\varphi} = 0$.

З а м е ч а н и е. Точно так же можно доказать I-проницаемость множества вида:

$$B_\mu^2 = \left\{ z \in \dot{R}_+^3 : \begin{array}{c} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - d_2 y > 0, \\ \mu x_2 - y = 0, \end{array} \right\}$$

при

$$\mu > \max\left\{ \frac{q_1}{a_{21}}, \frac{q_2}{a_{22}}, \frac{\beta}{d_2} \right\}$$

в направлении их нормалей $b_\mu = (0, \mu, -1)$, при $\bar{\varphi} = 0$.

Доказанные леммы 3 - 4 означают геометрически следующее /см. Рис.2/.

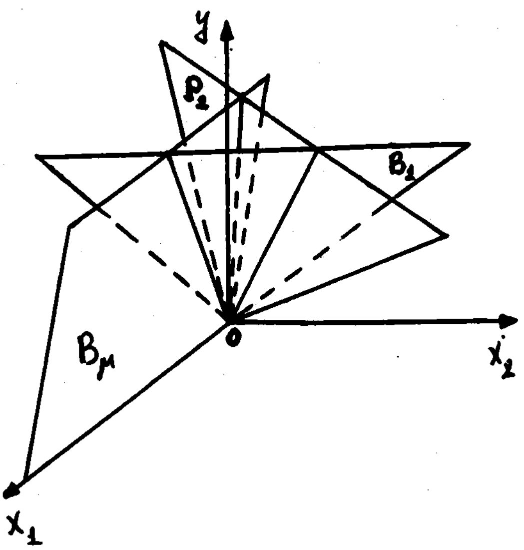

Рис. 2.

Если полупроницаемую плоскость B_1 несколько "наклонить" к плоскости x_1Ox_2, то она становится I-проницаемой в направлении новой нормали, если же, наоборот, "отклонить" от плоскости x_1Ox_2, то она становится 2-проницаемой в направлении новой антинормали. Это и есть геометрическое содержание леммы 3 и замечания 2 к ней.

Лемма 4 геометрически значит следующее: если плоскость x_2Oy несколько"наклонить" к плоскости x_1Ox_2, то она становится I-проницаемой в направлении нормали, но не полностью а только часть ее, лежащая под плоскостью $P_1=\{(x_1,x_2,y)\in \mathring{R}^3_+ : a_{11}x_1+a_{12}x_2-d_1y=0\}$. Аналогичную геометрическую интерпретацию допускает и замечание к лемме 4.

Т е о р е м а 4. Пусть выполняются неравенства

$$\frac{a_{11}}{d_1} < \frac{a_{21}}{d_2}; \quad \frac{a_{22}}{d_2} < \frac{a_{12}}{d_1}. \qquad /32/$$

Тогда множество $\mathring{B}^+_1=\{(x_1,x_2,y)\in \mathring{R}^3_+ : \bar{b}_1x_1+\bar{b}_2x_2-y>0\}$ является непроигрышной зоной для игрока J_1, причем непроигрышная стратегия $\bar{\varphi}=0$, а множество $\mathring{B}^-_1=\{(x_1,x_2,y)\in \mathring{R}^3_+ : \bar{b}_1x_1+\bar{b}_2x_2-y\le 0\}$ непроигрышной зоной для игрока J_2, непроигрышная стратегия $\bar{\varphi}=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о I. Докажем сначала, что область $\mathring{B}^+_1$ является непроигрышной для игрока J_1.

Неравенства /32/ приводят к неравенствам $\bar{b}_1<\frac{a_{21}}{d_2}; \bar{b}_2<\frac{a_{12}}{d_1}$; которые, в свою очередь, означают, что линия пересечения полупроницаемой плоскости B_1 с плоскостью x_1Oy /см. рис. 2/ лежит ниже линии пересечения плоскости P_2 с той же координатной плоскостью. Аналогично линия пересечения B_1 с x_2Oy лежит ниже линии пересечения x_2Oy с плоскостью $P_1=\{(x_1,x_2,y)\in \mathring{R}^3_+ : a_{11}x_1+a_{12}x_2-d_1y=0\}$. Поэтому если начальное состояние игры $z(0)$ лежит в множестве $\mathring{B}^+_1$, то всегда можно найти три значения параметра μ_1,μ_2,μ_3 $(\mu_0\le\mu_i<1)$, такие, что точка $z(0)$ окажется строго внутри многогранника, образованного плоскостями $B_{\mu_1}; B^1_{\mu_2}; B^2_{\mu_3}$ и плоскостью x_1Ox_2. Так как плоскости $B_\mu, B^2_{\mu_2}, B^3_{\mu_3}$ согласно леммам 3, 4 являются I-проницаемыми /проницающая стратегия $\bar{\varphi}=0$ /, то согласно теореме I данный многогранник есть непроигрышная зона для J_1. /Непроигрышная стратегия $\bar{\varphi}=0$ /. Это и доказывает, что вся область $\mathring{B}^+_1$ - непроигрышная область для игрока J_1.

Аналогично из замечания 2 к лемме 3 и теоремы I следует, что область $\mathring{B}^-_1$ является непроигрышной для игрока J_2.

2. Теперь остается убедиться в том, что полупроницаемая плоскость B_1 /полупроницающие стратегии $\bar{\varphi}=0, \bar{\varphi}=1$ / является непроигрышной зоной как для игрока J_1, так и для игрока J_2.

Пусть позиция игры $z=(x_1,x_2,y)\in B_1$, тогда из полупроницаемости плоскости B_1 следует, что для того чтобы траектория игры остава-

валась на плоскости B_1, игроки должны применять стратегии $\bar{\varphi}=0$, $\bar{\psi}=1$, соответственно, так как отказ, например, игрока $\mathcal{Y}_1$ от стратегии $\bar{\varphi}=0$ приведет к тому, что траектория $z(t)$ сойдет с плоскости B_1 и попадет в нежелательную для игрока $\mathcal{Y}_1$ область B_1^-. Аналогичное рассуждение верно и для игрока $\mathcal{Y}_2$.

При $\varphi=0$, $\psi=1$ система $\dot{z}=F(z,\varphi,\psi)$ в скалярной форме запишется так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - d_1 y, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - d_2 y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases} \qquad /33/$$

Теперь учитывая /30/, легко убедиться в следующем равенстве

$$(b, F(z,0,1)) = (\bar{b}_1 d_1 + \bar{b}_2 d_2)(\bar{b}_1 x_1 + \bar{b}_2 x_2 - y) = 0, \text{ где } b=(\bar{b}_1, \bar{b}_2, -1),$$

которое свидетельствует о том, что траектория системы /33/ не покидает плоскость B_1. Можно проверить, что плоскости P_1, P_2, B_1 пересекаются по одной прямой, которую обозначим через ℓ. Из /32/ легко вывести неравенства

$$\frac{a_{11}}{d_1} < \bar{b}_1 < \frac{a_{21}}{d_2}; \quad \frac{a_{22}}{d_2} < \bar{b}_2 < \frac{a_{12}}{d_1},$$

которые дают следующее расположение плоскостей P_1, P_2, B_1 /см.рис.3/. Нетрудно видеть, что прямая ℓ является множеством точек покоя для системы /33/. Далее, из /33/ видно, что все траектории системы/33/, начатые из точек $z \in B_1$, имеют вид, указанный на рис. 3,т.е.оканчиваются на прямой ℓ.

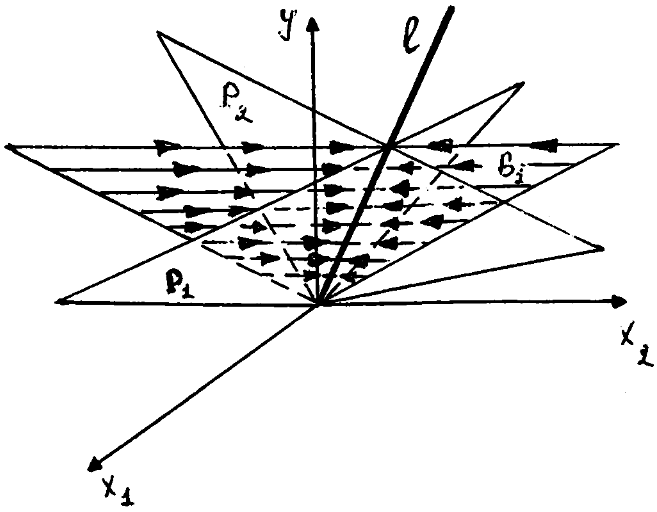

Рис. 3.

Таким образом, игра, начатая из точек плоскости B_1, длится как угодно долго при $\bar{\varphi}=0$, $\bar{\varphi}=1$, и отказ какого-либо игрока от

указанных стратегий может привести лишь к проигрышу этого игрока. Теорема доказана.

Как уже было показано в § I, в пространстве игры можно выделить множество V /рис. I/, из внутренности которого игрок $\mathcal{Y}_1$, может выиграть игру за конечное время. Отступая от границ этого множества с помощью конуса желательных направлений можно выделить множество $V' \supset V$, из внутренности которого игрок $\mathcal{Y}_1$ может по-прежнему закончить игру за конечное время. Однако дальнейшие "отступления" такого сорта приводят к большим техническим трудностям,так что исчерпать все множество B_1^+ не удается.

Поступила в редакцию 2I.9.I97I г.

Л и т е р а т у р а

I. Р.Айзекс. Дифференциальные игры. Москва, "Мир", I967 г.

2. Е.П.Волокитин, И.А.Красс, Один метод исследования дифференциальных игр качества. "Управляемые системы",Новосибирск,I970,вып. 6.

3. И.А.Красс. Конфликтное взаимодействие двух линейных экономических моделей. "Управляемые системы", Новосибирск, I969,вып.2.

4. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М.,"Наука", I970.