Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.95.

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.В.Васильев /Иркутск/

Рассматривается особый случай при исследовании необходимых условий оптимальности в системе управления, описываемой уравнениями с частными производными.

1. Постановка задачи

Пусть в заданной области $D=\{(t,s):0\le t\le T, 0\le s\le S\}$ связь между состоянием $x(t,s)\in E^n$ и управлением $u(t,s)\in E^m$ определяется системой уравнений в частных производных

$$x_{ts}(t,s)=f(x,x_t,x_s,u,t,s) \qquad /1.1/$$

с условиями

$$x(0,s)=\alpha(s),\ x(t,0)=\beta(t),\ \alpha(0)=\beta(0). \qquad /1.2/$$

Здесь вектор-функция $f(z,u,t,s)$ / в дальнейшем $z=\{x\ ,\ x_t,\ x_s\}$ - $3n$-мерный вектор/ определена и непрерывна вместе с $\partial f(z,u,t,s)/\partial z$ на $E^n\times E^m\times E^1\times E^1$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$ - заданные непрерывные n - мерные вектор-функции. Класс допустимых управлений представляет собой кусочно-непрерывные функции $u(t,s)$ со значениями в заданном множестве $U\subset E^m$. Пусть допустимому управлению $u(t,s)\in U$ соответствует единственное решение $x(t,s)$ системы /1.1/ - /1.2/, определенное на D. Качество управления оценим функционалом

$$J(u)=\varphi(x(T,S)),$$

где $\varphi(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция. Задача заключается в нахождении оптимального управления, т.е. такого допустимого управления $u^0(t,s)$, при котором

$$J(u^0)=\min_{u(t,s)\in U} J(u).$$

2. Принцип максимума

Пусть допустимому управлению $u(t,s)$ соответствует решение $x(t,s)$ системы /1.1/ - /1.2/; пусть также допустимому управлению $u(t,s)+\Delta u(t,s)$ соответствует решение $x(t,s)+\Delta x(t,s)$ системы/1.1/ - /1.2/. Тогда очевидно, что

$$\Delta x_{ts}(t,s)-\Delta_{zu} f(z,u,t,s)\equiv 0, \qquad /2.1/$$

где

$$\Delta_{zu} f(z,u,t,s)=f(z+\Delta z,u+\Delta u,t,s)-f(z,u,t,s).$$

Отсюда, с учетом связей /I.1/ - /I.2/, формулу приращения минимизируемого функционала можно представить в виде

$$\Delta\mathcal{J}(u) = \Delta_x \varphi(x(T,S)) + \int_0^T\int_0^S \varphi(t,s)'[\Delta x_{ts}(t,s) - \Delta_{\tilde z u} f(z,u,t,s)]\,dt\,ds,$$

где $\varphi(t,s)$ n - мерная вектор-функция, тождественно не обращающаяся в ноль. Далее, после известных [2] - [3] выкладок можно получить следующее необходимое условие оптимальности. Оптимальное управление $u^\circ(t,s)$, если оно существует, удовлетворяет аналогу принципа максимума Понтрягина

$$H(\varphi,z^\circ,u^\circ,t,s) = \max_{u(t,s)\in U} H(\varphi,z^\circ,u,t,s),$$

где $H(\varphi,z,u,t,s) = \varphi(t,s)'f(z,u,t,s)$, $z^\circ(t,s)=\{x^\circ(t,s), x_t^\circ(t,s), x_s^\circ(t,s)\}$ - решение системы /I.1/ - /I.2/ при оптимальном управлении $u^\circ(t,s)$, вектор-функция $\varphi(t,s)$ удовлетворяет "сопряженной" системе уравнений, составленной вдоль $u=u^\circ(t,s)$, $z=z^\circ(t,s)$:

$$\varphi_{ts}(t,s) = \frac{\partial H(\varphi,z^\circ,u^\circ,t,s)}{\partial x} - \left[\frac{\partial H(\varphi,z^\circ,u^\circ,t,s)}{\partial x_t}\right]_t - \left[\frac{\partial H(\varphi,z^\circ,u^\circ,t,s)}{\partial x_s}\right]_s;$$

$$\varphi_t(t,S) = -\frac{\partial H(\varphi,z^\circ,u^\circ,t,S)}{\partial x_s};\quad \varphi_s(T,s) = -\frac{\partial H(\varphi,z^\circ,u^\circ,T,s)}{\partial x_t};$$

$$\varphi(T,S) = -\operatorname{grad}\varphi(x^\circ(T,S)).$$

Если $\operatorname{grad}\varphi(x^\circ(T,S)) = 0$, то очевидно, что $\varphi(t,s)\equiv 0$, $H(\varphi,z^\circ,u^\circ,t,s)\equiv 0$, и приведенное необходимое условие оптимальности теряет силу.

О п р е д е л е н и е I. Управление $u^\circ(t,s)$, при котором $\operatorname{grad}\varphi(x^\circ(T,S)) = 0$ назовем "особым на D".

3. Приращение функционала для управления "особого на D".

Пусть допустимое управление $u(t,s)$ таково, что при соответствующем ему решении $x(t,s)$ системы /I.1/ - /I.2/ $\operatorname{grad}\varphi(x(T,S))=0$. Тогда формулу приращения функционала с учетом связей /I.1/ - /I.2/ можно представить в виде

$$\Delta\mathcal{J}(u) = \Delta_x \varphi(x(T,S)) + $$
$$+\int_0^T\int_0^S \Delta x(T,S)'\Psi(t,s)[\Delta x_{ts}(t,s) - \Delta_{\tilde z u} f(z,u,t,s)]\,dt\,ds,$$

где $\Psi(t,s)$ - $(n\times n)$ - непрерывная матричная функция, не обращающаяся тождественно в ноль.

Введем вектор-функцию

$$M(\Psi,z,u,t,s) = \Psi'(t,s)f(z,u,t,s)$$

и, разложив $\Delta_x\varphi(x(T,S))$ до второго порядка, будем иметь

$$\Delta \mathcal{J}(u)=\frac{1}{2}\Delta x(T,S)'\frac{\partial^2\varphi(x(T,S))}{\partial x^2}\Delta x(T,S)+O(\|\Delta x(T,S)\|^2)+$$

$$+\int_0^T\int_0^S \Delta x(T,S)'\psi(t,s)\Delta x_{ts}(t,s)dtds-\int_0^T\int_0^S \Delta x(T,S)'\Delta_{zu}M(\psi,z,u,t,s)dtds$$

Для произвольной матричной функции $\psi(t,s)$ справедливо:

$$\int_0^T\int_0^S \psi(t,s)\Delta x_{ts}(t,s)dtds=\psi(T,S)\Delta x(T,S)-$$

$$-\int_0^T\int_0^S \psi_{ts}(t,s)\Delta x(t,s)dtds-\int_0^T\int_0^S \psi_t(t,s)\Delta x_s(t,s)dtds-$$

$$-\int_0^T\int_0^S \psi_s(t,s)\Delta x_t(t,s)dtds. \qquad /3.1/$$

Кроме того,

$$\int_0^T\int_0^S \Delta_{zu}M(\psi,\dot z,u,t,s)dtds=\int_0^T\int_0^S \Delta_u M(\psi,z,u,t,s)dtds+$$

$$+\int_0^T\int_0^S \frac{\partial M(\psi,z,u,t,s)}{\partial z}\Delta z(t,s)dtds+\eta(\psi),$$

$$\eta(\psi)=\int_0^T\int_0^S\left[\frac{\partial\Delta_u M(\psi,z,u,t,s)}{\partial z}\Delta z(t,s)+O^1(\|\Delta z(t,s)\|)\right]dtds,$$

а векторная величина $O^1(\|\Delta z(t,s)\|)$ соответствует разложению $\Delta_z M(\psi,z,u,t,s)$ до первого порядка. Матричную функцию $\psi(t,s)$ подчиним "сопряженным" уравнениям

$$\psi_{ts}(t,s)=\frac{\partial M(\psi,z,u,t,s)}{\partial x}-\left[\frac{\partial M(\psi,z,u,t,s)}{\partial x_t}\right]_t-\left[\frac{\partial M(\psi,z,u,t,s)}{\partial x_s}\right]_s;$$

$$\psi_t(t,s)=-\frac{\partial M(\psi,z,u,t,s)}{\partial x_s};\ \psi_s(T,s)=-\frac{\partial M(\psi,z,u,T,s)}{\partial x_t}; \qquad /3.2/$$

$$\psi(T,S)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x(T,S))}{\partial x^2}. \qquad /3.3/$$

В результате после несложных преобразований получим формулу приращения функционала в виде:

$$\Delta\mathcal{J}(u)=-\int_0^T\int_0^S \Delta x(T,S)'\Delta_u M(\psi,z,u,t,s)dtds-$$

$$-\Delta x(T,S)'\eta(\psi)+O(\|\Delta x(T,S)\|^2). \qquad /3.4/$$

Пусть теперь $(n\times n)$ -непрерывная матричная функция $\theta(t,s)$ такова, что

$$\theta(T,S)=I \qquad /3.5/$$

где I - единичная матрица.

Тогда на основании тождества /3.1/

$$\Delta x(T,S)=\int_0^T\int_0^S\theta(\tau,\xi)\Delta x_{\tau\xi}(\tau,\xi)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^T\int_0^S\theta_{\tau\xi}(\tau,\xi)\Delta x(\tau,\xi)d\tau d\xi+\int_0^T\int_0^S\theta_\tau(\tau,\xi)\Delta x_\xi(\tau,\xi)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^T\int_0^S\theta_\xi(\tau,\xi)\Delta x_\tau(\tau,\xi)d\tau d\xi .$$

Заменим в этой формуле $\Delta x_{\tau\xi}(\tau,\xi)$ на $\Delta_{zu}f(z,u,\tau,\xi)$ /см./2.1// и подставим ее в первое слагаемое правой части формулы /3.4/ . Далее, введем вектор-функцию $M(\theta,z,u,t,s)=\theta(t,s)f(z,u,t,s)$ и после преобразований, аналогичных тем, которые приведены выше, получим окончательный вид формулы приращения функционала в особом случае:

$$\Delta\mathcal{J}(u)=-\int_0^T\int_0^S\int_0^T\int_0^S\Delta_u M(\theta,z,u,\tau,\xi)'\Delta_u M(\Psi,z,u,t,s)d\tau d\xi\, dt\, ds+$$
$$+O(\|\Delta x(T,S)\|^2)-\Delta x(T,S)'\eta(\Psi)-$$
$$-\eta(\theta)'\int_0^T\int_0^S\Delta_u M(\Psi,z,u,t,s)dt ds ,$$

где матричная функция $\theta(t,s)$ удовлетворяет уравнениям /3.2/ с концевым условием /3.5/.

4. Специальное приращение

Зададим точку $(\rho,\mu)\in D$, числа $a>0,\ b>0,\ \varepsilon>0$ и определим специальное приращение:

$$\Delta^* u(t,s)=\begin{cases} v-u(t,s), & (t,s)\in\bar D=\{(t,s):\rho-a\varepsilon\le t\le\rho,\\ & \mu-b\varepsilon\le s\le\mu\}\\ & \bar D\subset D,\ v\in U.\\ 0\ , & (t,s)\in D,\ (t,s)\notin\bar D,\end{cases}$$

Известно [3] , что приращение $\Delta^* z(t,s)$, соответствующее приращению $\Delta^* u(t,s)$, можно оценить следующим образом

$$\|\Delta^* z(t,s)\|\le K_1 ab\varepsilon^2 .$$

Тогда оценка сверху для специального приращения функционала будет иметь вид:

$$\Delta\mathcal{J}(u)=-\int_{\rho-a\varepsilon}^{\rho}\int_{\mu-b\varepsilon}^{\mu}\int_{\rho-a\varepsilon}^{\rho}\int_{\mu-b\varepsilon}^{\mu}\Delta_u^* M(\theta,z,u,\tau,\xi)'\times$$

$$\Delta_u M(\psi, z, u, t, s) d\tau d\xi dt ds + K(\varepsilon)\varepsilon^6,$$

где $K(\varepsilon) \to \bar{K} = const < \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

5. Необходимые условия оптимальности

Получив оценку для специального приращения функционала в особом случае, нетрудно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а I. Для оптимальности управления $u^0(t,s)$,"особого на D ", необходимо выполнение неравенства

$$[M(\theta, z^0, v, t, s) - M(\theta, z^0, u^0, t, s)]'[M(\psi, z^0, v, t, s) - M(\psi, z^0, u^0, t, s)] \le 0 \quad /5.1/$$

в каждой точке $(t,s) \in D$ и при всех $v(t,s) \in U$ с функцией $\psi(t,s)$, удовлетворяющей уравнениям:

$$\psi_{ts}(t,s) = \frac{\partial M(\psi, z^0, u^0, t, s)}{\partial x} - \left[\frac{\partial M(\psi, z^0, u^0, t, s)}{\partial x_t}\right]_t - \left[\frac{\partial M(\psi, z^0, u^0, t, s)}{\partial x_s}\right]_s ; \quad /5.2/$$

$$\psi_t(t,s) = -\frac{\partial M(\psi, z^0, u^0, t, s)}{\partial x_s}; \quad \psi_s(T,s) = -\frac{\partial M(\psi, z^0, u^0, T, s)}{\partial x_t}$$

$$\psi(T,S) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \varphi(x(T,S))}{\partial x^2},$$

и функцией $\theta(t,s)$, удовлетворяющей также уравнениям /5.2/, но с концевым условием $\theta(T,S) = I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть допустимое уравнение $u^0(t,s)$ оптимально, но в какой-то точке $(\rho,\mu) \in D$ условие /5.I/ не выполняется, т.е. существует такой вектор $v \in U$, что

$$[M(\theta, z^0, v, \rho, \mu) - M(\theta, z^0, u^0, \rho, \mu)]'[M(\psi, z^0, v, \rho, \mu) - M(\psi, z^0, u^0, \rho, \mu)] > 0.$$

Исходя из известных теорем анализа, которые, например, применялись Л.И.Розоноэром [4] при доказательстве принципа максимума, можно заметить, что из последнего неравенства вытекает существование такого $\alpha > 0$ и области

$$\tilde{D} = \{(t,s) : \rho - \bar{a}\varepsilon \le t \le \rho,\ \mu - \bar{b}\varepsilon \le s \le \mu,\ \bar{a} > 0,\ \bar{b} > 0,\ \varepsilon > 0\},$$

что

$$[M(\theta, z^0, v, t, s) - M(\theta, z^0, u^0, t, s)]'[M(\psi, z^0, v, t, s) - M(\psi, z^0, u^0, t, s)] > \alpha \quad /5.3/$$

для всех $(t,s) \in \tilde{D}$.

Так как $v \in U$, то всегда возможно в некоторой области

$$\bar{D} = \{(t,s) : \rho - a\varepsilon \le t \le \rho,\ \mu - b\varepsilon \le s \le \mu,\ 0 < a \le \bar{a},\ 0 < b \le \bar{b}\},\ \bar{D} \subseteq \tilde{D},$$

построить специальное приращение к управлению $u^0(t,s)$ и оценить

сверху специальное приращение функционала. Усилив эту оценку сверху с помощью полученного неравенства /5.3/, будем иметь:

$$\Delta J(u^0) < -\alpha a^2 b^2 \varepsilon^4 + K(\varepsilon)\varepsilon^6 = -\varepsilon^4(\alpha a^2 b^2 - K(\varepsilon)\varepsilon^2).$$

За счет уменьшения $\varepsilon > 0$ всегда можно добиться, чтобы

$$\alpha a^2 b^2 - K(\varepsilon)\varepsilon^2 > 0.$$

Тогда $\Delta J(u^0) < 0$, что противоречит предположению об оптимальности управления $u^0(t,s)$. Теорема доказана.

Замечание I. Теорема I имеет содержательный смысл лишь при

$$\frac{\partial^2 \varphi(x(T,s))}{\partial x^2} \neq 0,$$

Совершенно очевидно, что приведенная схема применима и для особого случая

$$\frac{\partial \varphi(x(T,S))}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x(T,S))}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi(x(T,S))}{\partial x^3} \neq 0$$

и так далее.

Известно, что если функция $f(z,u,t,s)$ дифференцируема по u, а множество U выпукло, то вдоль оптимального управления выполняется линеаризованное условие максимума

$$\frac{\partial H(\psi,z^0,u^0,t,s)'}{\partial u} u^0(t,s) = \max_{u(t,s)\in U} \frac{\partial H(\psi,z^0,u^0,t,s)'}{\partial u} u(t,s).$$

Если $\operatorname{grad} \varphi(x^0(T,S)) = 0$, то это условие неэффективно. Тогда справедлива

Теорема 2. Если функция $f(z,u,t,s)$ дифференцируема по u, а множество U выпукло, то для оптимальности управления $u^0(t,s)$ "особого на D", необходимо выполнение неравенства

$$[v(t,s)-u^0(t,s)]\frac{\partial M(\theta,z^0,u^0,t,s)'}{\partial u}\frac{\partial M(\psi,z^0,u^0,t,s)}{\partial u}[v(t,s)-u^0(t,s)] \le 0$$

в каждой точке $(t,s)\in D$ и при всех $v(t,s)\in U$.

Доказательство. В силу теоремы I на оптимальном управлении $u^0(t,s)$ справедливо неравенство /5.I/.

Разложим левую часть /5.I/ в ряд Тейлора по степеням приращения $v(t,s)-u^0(t,s)$, ограничиваясь главным членом

$$\left[\frac{\partial M(\theta,z^0,u^0,t,s)}{\partial u}[v(t,s)-u^0(t,s)]\right]'\left[\frac{\partial M(\psi,z^0,u^0,t,s)}{\partial u}[v(t,s)-u^0(t,s)]\right] + $$
$$+ O(\|v(t,s)-u^0(t,s)\|^2) \le 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left[v(t,s)-u^0(t,s)\right]'\frac{\partial M(\theta,z^0,u^0,t,s)'}{\partial u}\;\frac{\partial M(\psi,z^0,u^0,t,s)}{\partial u}[v(t,s)-u^0(t,s)] \le 0 \qquad /5.4/$$

в каждой точке $(t,s)\in D$ и для всех $v(t,s)\in U\cap \sigma_{u^0(t,s)}$, где $\sigma_{u^0(t,s)}$ - малая окрестность точки $u^0(t,s)$. Усилим неравенство /5.4/, учитывая выпуклость множества U. Пусть $\tilde v(t,s)\in U$ - произвольная точ-

ка. Рассмотрим элемент $v_\varepsilon(t,s)=\varepsilon\tilde{v}(t,s)+(1-\varepsilon)u^\circ(t,s), 0\leq\varepsilon\leq 1$
Ясно, что $v_\varepsilon(t,s)\in U$. Кроме того, при малых $\varepsilon>0$, $v_\varepsilon(t,s)\in\sigma_{u^\circ}(t,s)$. Следовательно, для таких значений ε справедливо

$$[v_\varepsilon(t,s)-u^\circ(t,s)]'\frac{\partial M(\theta,z^\circ,u^\circ,t,s)'}{\partial u}\frac{\partial M(\psi,z^\circ,u^\circ,t,s)}{\partial u}[v_\varepsilon(t,s)-u^\circ(t,s)]\leq 0.$$

Подставляя значение $v_\varepsilon(t,s)$, получаем

$$\varepsilon^2[\tilde{v}(t,s)-u^\circ(t,s)]'\frac{\partial M(\theta,z^\circ,u^\circ,t,s)'}{\partial u}\frac{\partial M(\psi,z^\circ,u^\circ,t,s)}{\partial u}[\tilde{v}(t,s)-u^\circ(t,s)]\leq 0.$$

Поскольку $\tilde{v}(t,s)$ - произвольный элемент множества U, то неравенство /5.4/ доказано для всех $v(t,s)\in U$. В случае открытой области управления справедлива

Теорема 3. Если $f(z,u,t,s)$ дифференцируема по u, а множество U открытое, то на оптимальном управлении $u^\circ(t,s)$, "особом на D", квадратичная форма переменных

$$v'\frac{\partial M(\theta,z^\circ,u^\circ,t,s)'}{\partial u}\frac{\partial M(\psi,z^\circ,u^\circ,t,s)}{\partial u}v \qquad /5.5/$$

неположительна в каждой точке $(t,s)\in D$.

Доказательство. Пусть U - открытое множество, $f(z,u,t,s)$ дифференцируема по u. Тогда приращение $v(t,s)-u^\circ(t,s)$ может принимать произвольные значения, и неравенство /5.4/ приводит к условию неположительности квадратичной формы /5.5/.

Пусть система /I.I/ линейна относительно x, x_t, x_s, т.е.

$$x_{ts}(t,s)=A(t,s)x(t,s)+B(t,s)x_t(t,s)+C(t,s)x_s(t,s)+g(u,t,s).$$

В этом случае формула приращения функционала до второго порядка записывается в виде:

$$\Delta J(u)=-\int_0^T\int_0^S\Delta_u H(\psi,z,u,t,s)dt\,ds-$$
$$-\int_0^T\int_0^S\int_0^T\int_0^S\Delta_u M(\theta,z,u,\tau,\xi)'\Delta_u M(\psi,z,u,t,s)d\tau\,d\xi\,dt\,ds+$$
$$+O(\|\Delta x(T,S)\|^2).$$

Определение 2. Управление $u(t,s)$ назовем "особым на $\Omega\subset D$", если при $\operatorname{grad}\varphi(x(T,S))\neq 0$ существует нетривиальное множество $\omega(t,s)\in U$ такое, что

$$\Delta_u H(\varphi,z,u,t,s)\equiv 0,$$
$$u(t,s)+\Delta u(t,s)\in\omega(t,s),\quad (t,s)\in\Omega.$$

Теорема 4. Для оптимальности управления $u^\circ(t,s)$, "особого на $\Omega\subset D$", необходимо выполнение неравенства

$$[M(\theta,z^\circ,v,t,s)-M(\theta,z^\circ,u^\circ,t,s)]'[M(\psi,z^\circ,v,t,s)-M(\psi,z^\circ,u^\circ,t,s)]\leq 0$$

в каждой точке $(t,s)\in\Omega$ и при всех $v(t,s)\in U$ с функцией $\psi(t,s)$, удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{cases} \Psi_{ts}(t,s) = \Psi(t,s)[A(t,s) - B_t(t,s) - C_s(t,s)] - \\ - \Psi_t(t,s)B(t,s) - \Psi_s(t,s)C(t,s); \\ \Psi_t(t,s) = -\Psi(t,s)C(t,s); \Psi_s(T,S) = -\Psi(T,S)B(T,S); \\ \Psi(T,S) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x^o(T,S))}{\partial x^2} \end{cases} \qquad /5.6/$$

и функцией $\theta(t,s)$, удовлетворяющей также уравнениям /5.6/, но с концевым условием $\theta(T,S) = I$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы I.

В заключение приведем иллюстративный пример.

П р и м е р.

$$x_{ts}(t,s) = u(t,s), \quad x(0,s) = -\frac{1}{4}s + 1,$$

$$x(t,0) = t^2 - t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le s \le 1, \quad |u(t,s)| \le 1$$

$$J(u) = [x(1,1) - 1]^2.$$

Проверим на оптимальность управление $u^o(t,s) = ts$. Это управление "особое на D ", так как $grad\,\varphi(x^o(T,S)) = 0$ $(x^o(t,s) = \frac{1}{4}t^2s^2 - \frac{1}{4}s + t^2 - t + 1)$ и $H(\psi, z^o, u^o, t, s)$ не зависит от $u^o(t,s)$. При этом управлении $\psi(1,1) = -1$, $\psi(t,s) \equiv -1$, $\theta(t,s) \equiv +1$, условие /5.I/ принимает вид: $-(v(t,s) - ts)^2 \le 0$, $|v(t,s)| \le 1$, из которого следует, что управление $u^o(t,s) = ts$ оптимально в рассмотренной задаче.

Поступила в редакцию I.IO.I97I г.

Л и т е р а т у р а

I. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, I96I г.

2. А.И.Егоров. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенным параметром. - Автоматика и телемеханика, I964, 25, № 5.

3. О.В.Васильев. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах. Информационный сборник трудов ВЦ Иркутского государственного университета, Иркутск, I968, вып.2.

4. Л.И.Розоноэр. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем I - Автоматика и телемеханика, I959, 20, № IO.