Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.1.

НЕЧЕТНЫЕ ЦИКЛЫ МУЛЬТИГРАФА С БОЛЬШИМ ХРОМАТИЧЕСКИМ КЛАССОМ

М.К.Гольдберг /Харьков/

По теореме Кенига /[1], см. также [2] стр. 107/ мультиграф степени S с хроматическим классом $\chi > S$ содержит нечетные циклы. Основным результатом заметки является доказательство того, что мультиграф с хроматическим классом $\chi > S+1$ содержит нечетные циклы малой длины. Кроме того, проводится простое доказательство теоремы Визинга [3] о мультиграфах, для которых достигается оценка Шеннона $\chi \leq \left[\frac{3}{2}S\right]$.

Т е о р е м а 1. Всякий мультиграф степени S $(S \geqslant 4)$ с хроматическим классом $\chi > S+1$ содержит нечетные циклы длины $\leq \frac{\chi-3}{\chi-S-1}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, можно считать, что у мультиграфа есть ребра, удаление которых уменьшает его хроматический класс. Пусть (a,b) – одно из таких ребер. Таким образом, существует неполная раскраска $\chi-1$ цветом ребер мультиграфа, при которой неокрашенным является только это ребро[ж/]. Обозначим через $\mathcal{R}(x)$ множество цветов, отсутствующих в вершине x. Из неравенства $\chi > S+1$ следует, что $\mathcal{R}(x) \neq \phi$ для всех x ; кроме того, ясно, что $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{R}(b) = \phi$.

Пусть $\alpha \in \mathcal{R}(a), \beta \in \mathcal{R}(b)$. Рассмотрим максимальную двуцветную α,β – цепь, начинающуюся в вершине a. Эта цепь закончится в вершине b, так как в противном случае ее перекраска /замена α на β, и наоборот/ приводит к раскраске, для которой вершины a и b имеют общий отсутствующий цвет, что невозможно.

Докажем, что для любых двух вершин x и y всякой длины цепи $\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) = \phi$. Допустим противное: существует неполная раскраска $\chi-1$ цветом и такая пара цветов α,β $(\alpha \in \mathcal{R}(a), \beta \in \mathcal{R}(b))$, что в соответствующей цепи найдутся вершины с общим отсутствующим цветом. Среди таких раскрасок выберем ту, для которой расстояние ℓ по двухцветной α,β – цепи между вершинами x, y с общим отсутствующим цветом минимально возможно. Заметим, что общий отсутствующий цвет γ отличен от α и β.

Если $\ell = 1$, то окрасим ребро (x,y) цепи цветом γ, в результате чего получим новую раскраску, для которой максимальная двухцветная α,β – цепь, начинающаяся в вершине a, не заканчивается в вершине b, что, как было отмечено, невозможно. Если же $\ell > 1$, выберем произвольную вершину z $(z \neq x, z \neq y)$, лежащую на участке цепи, соединяющем вершины x и y. Пусть $\delta \in \mathcal{R}(z)$. Очевидно, $\delta \neq \alpha, \delta \neq \beta$.

ж/ Всюду в дальнейшем рассматриваются лишь такие раскраски.

Рассмотрим максимальную δ, γ - цепь, начинающуюся в вершине z. Эта цепь не может содержать обе вершины x и y одновременно, поскольку в каждой из них отсутствует γ. Вследствие этого перекраска цепи приводит к такой раскраске мультиграфа, для которой либо вершины x и z, либо y и z имеют общий отсутствующий цвет. При указанной перекраске и исходная α, β - цепь не меняется, и новая пара вершин с общим отсутствующим цветом расположена на ней на расстоянии $< \ell$, что противоречит минимальности выбора ℓ.

Теперь нетрудно оценить число t вершин α, β - цепи. Действительно, поскольку

$$|\mathfrak{R}(x)| \geqslant \chi - s - 1, \quad |\mathfrak{R}(a)| \geqslant \chi - s, \quad |\mathfrak{R}(b)| \geqslant \chi - s,$$

а общее число цветов равно $\chi - 1$, выполняется неравенство

$$2 + t(\chi - s - 1) \leqslant \chi - 1,$$

или

$$t \leqslant \frac{\chi - 3}{\chi - s - 1}.$$

Длина цепи - четное число, поскольку цепь начинается ребром, окрашенным цветом β, а заканчивается ребром, окрашенным цветом α. Поэтому вместе с неокрашенным ребром (a, b) цепь образует нечетный цикл длины $\leqslant \frac{\chi - 3}{\chi - s - 1}$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Изложенный результат интересно сравнить с таким фактом: для любого целого s $(s \geqslant 3)$ существует однородный степени s граф с порядком реберной связности, равным s, хроматическим классом $s+1$ и длиной минимального цикла, большей любого заранее заданного числа.

Напомним, что мультиграфом Шеннона называется трехвершинный мультиграф степени s с $\left[\frac{3}{2}s\right]$ ребрами. Для него, как легко видеть, $\chi = \left[\frac{3}{2}s\right]$.

Т е о р е м а 2. /Визинг [3]/. Всякий мультиграф степени s $(s \geqslant 4)$ с хроматическим классом $\left[\frac{3}{2}s\right]$ содержит мультиграф Шеннона.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что удаление любого ребра мультиграфа уменьшает его хроматический класс. Ясно, что такой мультиграф связен. Пусть (a, b) - произвольное его ребро. Рассмотрим какую-нибудь неполную раскраску ребер $\left[\frac{3}{2}s\right] - 1$ цветом, при которой неокрашенным является лишь ребро (a, b). Используя теорему I, а также рассуждения, приведенные при ее доказательстве, получаем, что для любой пары цветов α, β $(\alpha \in \mathfrak{R}(a)$. $\beta \in \mathfrak{R}(b))$ вершины a и b соединены двухцветной α, β - цепью длины 2. Пусть c - вершина этой цепи, отличная от a и b. Зафиксировав $\alpha \in \mathfrak{R}(a)$ и перебрав все $\beta \in \mathfrak{R}(b)$, а затем поменяв ролями вершины a и b, получим, что все α, β - цепи, ведущие из a в b, проходят че-

рез вершину c. Поскольку $|\Omega(a)| \geqslant \left[\frac{S}{2}\right]$ и $|\Omega(b)| \geqslant \left[\frac{S}{2}\right]$, каждая из вершин a, b соединена с вершиной c по крайней мере $\left[\frac{S}{2}\right]$ ребрами. Окрасим теперь ребро (a, b) каким-нибудь цветом $\alpha \in \Omega(a)$, а ребро (b, c), ранее окрашенное этим цветом, сделаем неокрашенным. Повторив предыдущие рассуждения для такой раскраски, получим, что вершины a и b соединены по крайней мере $\left[\frac{S}{2}\right]$ ребрами. В частности, это доказывает, что каждая пара смежных вершин соединена не менее чем $\left[\frac{S}{2}\right]$ ребрами, откуда следует, если учесть неравенство $S \geqslant 4$, что каждая из вершин a, b, c смежна лишь с двумя остальными. В силу связности последнее и означает, что исходный мультиграф является мультиграфом Шеннона.

Поступила в редакцию 24.9.1971 г.

Литература

1. D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

2. К.Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962.

3. В.Г.Визинг. Хроматический класс мультиграфа Кибернетика, 1965, № 3, стр. 29-39.