Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.95.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ "ОСОБЫХ" УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Г.М.Островский, Ю.М.Волин, И.З.Корганов

Задачи оптимального управления в химической технологии часто приводят к необходимости учета "особых" управлений. Так, в работе [1] было показано, что в задаче определения оптимальной температуры холодильника каталитического реактора возникают "особые" управления. Здесь будет рассмотрено решение несколько более общей задачи, частным случаем которой является вышеупомянутая задача. Проблема "особых" управлений привлекает в настоящее время большое внимание. В [2] опубликован обзор посвященный этой проблеме, в котором имеется обширная библиография работ в этой области. Общим для этих работ является то, что, как это обычно бывает в задачах оптимального управления, управляющие переменные считаются независимыми, а фазовые переменные зависимые. Здесь будет рассмотрен другой подход, состоящий в том, что варьироваться будут фазовые переменные, а для этого из уравнений движения будут исключены управления. Предположим вначале, что ограничений на управления нет.

Пусть уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\dots,x_n)+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_j; \quad i=1,\dots,n; \; 0 \le t \le T, \; (T=const) \qquad /1/$$

где $m < n$. Будем предполагать, что начальные значения переменных заданы:

$$x_i(0) = x_{i0}; \quad i=1,\dots,n, \qquad /2/$$

а конечные либо фиксированы, либо свободны. Пусть критерий оптимизации имеет вид:

$$\mathcal{J} = \int_0^T f_0(x_1,\dots,x_n)dt. \qquad /3/$$

Предположим, что найдется хотя бы один минор порядка m матрицы $A=\|a_{ij}\|$, $(i=1,\dots,n; j=1,\dots,m)$, отличный от нуля.

Пусть это будет минор, стоящий в последних m строках матрицы A. Рассмотрим тогда последние m уравнений системы /1/:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\dots,x_n)+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_j; \quad i=n-m+1,\dots,n. \qquad /4/$$

Рассматривая систему /4/ как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных управлений $u_1,\dots,u_m$, можно выразить управления через фазовые переменные и их производные:

$$u_j = \Phi_j(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=n-m+1}^{n} c_{jk}\dot{x}_k; \quad j = 1, \dots, m. \qquad /5/$$

Подставим теперь полученные выражения для $u_j\ (j=1,\dots,m)$ в первые $n-m$ уравнений системы /I/. Тогда получим $n-m$ дифференциальных соотношений, связывающих фазовые переменные x_i и их производные. Ясно, что производные $\dot{x}_i$ будут входить линейно в эти соотношения:

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) + b_{j1}\dot{x}_1 + \dots + b_{jn}\dot{x}_n = 0; \quad j = 1, \dots, n-m. \qquad /6/$$

Наша оптимальная задача может быть теперь переформулирована в терминах вариационного исчисления [3]: требуется найти n функций $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих $n-m$ дифференциальным связям /6/ и некоторым граничным условиям и таких, что критерий /2/ принимает минимальное /максимальное/ значение. Необходимые условия оптимальности в данном случае выражаются уравнениями Лагранжа-Эйлера [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0; \quad i = 1, \dots, n, \qquad /7/$$

где

$$H = f_0(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \Big[\varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\dot{x}_k\Big], \qquad /8/$$

λ_j – множители Лагранжа.

В нашем случае уравнения /7/ примут вид:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n-m} \dot{\lambda}_j b_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \qquad /9/$$

Таким образом, для $2n-m$ неизвестных $x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$ имеем $2n-m$ дифференциальных уравнений /6/, /9/.

Если будет найдена интегральная кривая, удовлетворяющая уравнениям /6/, /9/ и имеющая непрерывные производные, то согласно уравнению /5/ управления u_j также будут непрерывны, а это как раз и есть случай "особых" управлений для системы /I/.

Для решения системы уравнений /6/, /9/ необходимо иметь $2n-m$ граничных условий. Отсюда следует, что в данном случае, вообще говоря, нельзя провести интегральную кривую системы /6/, /9/ через две произвольные точки фазового пространства $x_1, \dots, x_n$, так как в этом случае число граничных условий было бы $2n$.

Сделаем два замечания.

З а м е ч а н и е I. При исключении управлений из первоначальной системы /I/ может случиться такое положение, что некоторые из управлений $u_j\ (j=1,\dots,m)$ не входят в первые $n-m$ уравнений этой системы. Предположим для определенности, что в первые $n-m$ уравнений не входит управление u_m. Выпишем соотношение /5/ для этого

управления:

$$u_m = \Phi_m(x_1,\dots,x_n)+\sum_{k=m+1}^{n} c_{mk}\dot{x}_k \qquad /10/$$

В этом случае при решении вариационной задачи соотношение /10/ не надо учитывать, так как оно практически не налагает никаких ограничений на фазовые переменные. Действительно, пусть мы решили вариационную задачу без учета соотношения /10/. Подставим тогда в правую часть соотношения /10/ найденные значения $x(t)$, тогда мы найдем соответствующие значения $u_m(t)$. Здесь мы, конечно, воспользовались тем фактом, что на управления не наложено ограничений.

З а м е ч а н и е 2. Интегральные кривые, найденные решением системы /6/, /9/, удовлетворяют только необходимым условиям оптимальности. Для того чтобы проверить, действительно ли полученная интегральная кривая является оптимальной, необходимо воспользоваться достаточными условиями, развитыми в вариационном исчислении [3].

Рассмотрим пример. Пусть система уравнений /1/ и критерий /2/ имеют вид [4]:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad /11/$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u, \qquad /12/$$

$$J = 0,5\int_0^T [x_1^2 + x_2^2]\,dt.$$

В данном случае из уравнения /12/ находим

$$u = \dot{x}_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2. \qquad /13/$$

Поскольку u не входит в уравнение /11/, то соотношение /13/ не надо использовать. Функция H в данном случае имеет вид:

$$H = 0,5(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(\dot{x}_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2).$$

Уравнения /9/ имеют вид:

$$x_1 - \lambda a_{11} - \dot{\lambda} = 0; \quad x_2 - a_{12}\lambda = 0.$$

Исключая λ, из этих уравнений, получаем:

$$\dot{x}_2 = a_{12}x_1 - a_{11}x_2. \qquad /14/$$

Подставив $\dot{x}_2$ из /14/ в /13/, получим

$$u = (a_{12} - a_{21})x_1 - (a_{11} + a_{22})x_2.$$

"Особое" управление будет линейно связано с координатами x_1, x_2.

Случай, когда имеются ограничения на управления, мы рассмотрим для простоты на примере следующей системы 2-го порядка:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,x_2) + \alpha_i u; \quad i = 1,2, \quad 0 \le u \le 1, \qquad /15/$$

$$x_1(0) = x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}; \qquad /16/$$

$$x_1(T) = x_{1T}; \quad x_2(T) = x_{2T}. \qquad /17/$$

При $\alpha_1 = 0$ эта задача сводится к задаче об оптимальной температуре холодильника каталитического реактора.

На экстремальной траектории возможны три типа участков. На участке типа I $u = 1$ и система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2) - \alpha_i = 0; \quad i = 1,2. \qquad /18/$$

На участках типа П управление u принимает промежуточные значения $0 < u < 1$. Это участок "особого" управления. В соответствии со сказанным выше исключим управление из уравнений /15/:

$$\alpha_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 f_1(x_1, x_2) - \alpha_1 \dot{x}_2 + \alpha_1 f_2(x_1, x_2) = 0. \qquad /19/$$

На участках тпа Ш $u = 0$, и система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2) = 0; \quad i = 1,2. \qquad /20/$$

Будем далее предполагать, что нам известна структура экстремальной траектории, т.е. мы из каких-либо соображений знаем, в какой последовательности следуют участки различных типов. Для определенности будем предполагать, что имеется три участка; первый участок $(t_0 \le t \le t_1)$ будет типа I, второй $(t_1 \le t \le t_2)$- типа П, третий $(t_2 \le t \le T)$ - типа Ш. Из условия непрерывности фазовых переменных в точках t_1, t_2 /значения t_1, t_2 неизвестны/ имеем равенства:

$$x_i(t_j - 0) = x_i(t_j + 0); \quad i = 1,2; \; j = 1,2. \qquad /21/$$

С учетом сделанных предположений первоначальная экстремальная задача может быть следующим образом переформулирована:требуется найти такие фазовые переменные ,которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2) - \alpha_i = 0; \quad t_0 < t < t_1; \quad i = 1,2 \\ &\alpha_2 \dot{x}_1 - \alpha_2 f_1(x_1, x_2) - \alpha_1 \dot{x}_2 + \alpha_1 f_2(x_1, x_2) = 0; \quad t_1 < t < t_2 \qquad /22/ \\ &\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2) = 0; \quad i = 1,2; \quad t_2 < t < T, \end{aligned}$$

в точках t_0, T, t_1, t_2, условиям /16/, /17/, /21/ и доставляют минимум интегралу /2/.

Далее, удобно ввести на каждом участке свою независимую переменную, путем замены независимой переменной сделать длину каждого участка равной единице и, кроме того, считать, что участки решаются не последовательно,а параллельно. В этом случае легко показать, что система /22/ может быть сведена к виду:

$$\frac{dy_i}{d\tau} - \beta_1 f_i(y_1, y_2) - \alpha_i \beta_1 = 0; \quad i = 1,2, \qquad /23/$$

$$\alpha_2 \frac{dy_3}{d\tau} - \alpha_2 \beta_2 f_1(y_3, y_4) - \alpha_1 \frac{dy_4}{d\tau} + \alpha_1 \beta_2 f_2(y_3, y_4) = 0, \qquad /24/$$

$$\frac{dy_i}{d\tau} - \beta_3 f_2(y_5, y_6) = 0; \quad i = 5,6 \qquad /25/$$

где

$$0 \le \tau \le 1, \; \beta_1 = t_1; \; \beta_2 = t_2 - t_1; \; \beta_3 = T - t_2;$$

Старые и новые переменные связаны соотношениями:

$$y_1\left(\frac{t}{t_1}\right)=x_1(t)\,,\quad y_2\left(\frac{t}{t_1}\right)=x_2(t)\,,\quad t_0\le t\le t_1\,,$$

$$y_3\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)=x_1(t)\,,\ y_4\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)=x_2(t)\,,\ t_1\le t\le t_2\,,$$

$$y_5\left(\frac{t-t_2}{T-t_2}\right)=x_1(t);\ y_6\left(\frac{t-t_2}{T-t_2}\right)=x_2(t)\,,\ t_2\le t\le T.$$

Граничные условия /16/ будут иметь вид:

$$y_1(0)=x_{10}\,;\ y_2(0)=y_{20}\,;\ y_5(1)=x_{1T}\,;\ y_6(1)=x_{2T}\,. \qquad /26/$$

Равенства /21/ и критерий /3/ примут следующий вид:

$$y_1(1)-y_3(0)=0; \qquad /27/$$

$$y_2(1)-y_4(0)=0; \qquad /28/$$

$$y_3(1)-y_5(0)=0; \qquad /29/$$

$$y_4(1)-y_6(0)=0, \qquad /30/$$

$$J=\beta_1\int_0^1 f_0(y_1,y_2)d\tau+\beta_2\int_0^1 f_0(y_3,y_4)d\tau+\beta_3\int_0^1 f_0(y_5,y_6)d\tau\,. \qquad /31/$$

Итак, первоначальная экстремальная задача свелась к следующей задаче: требуется найти функции $y_i(t)$; $(i=1,\dots,6)$, которые удовлетворяют системе /23/-/25/ и граничным условиям /26/-/30/ и доставляют минимум интегралу /31/.

Теперь мы можем применить методы вариационного исчисления.Уравнения Лагранжа-Эйлера в данном случае будут иметь вид:

$$\beta_1\frac{\partial f_0}{\partial y_i}-\beta_1\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_i}-\beta_1\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_i}-\dot\lambda_i=0\,;\ i=1,2, \qquad /32/$$

$$\beta_2\frac{\partial f_0}{\partial y_i}-\beta_2\lambda_3\frac{\partial f_1}{\partial y_i}+\gamma_4\beta_2\lambda_3\frac{\partial f_2}{\partial y_i}+(-1)^i\gamma_i\dot\lambda_3=0;\ i=3,4;\quad \gamma_4=\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ \gamma_3=1\,, \qquad /33/$$

$$\beta_3\frac{\partial f_0}{\partial y_i}-\beta_3\lambda_5\frac{\partial f_1}{\partial y_i}-\beta_3\lambda_6\frac{\partial f_2}{\partial y_i}-\dot\lambda_i=0;\quad i=5,6. \qquad /34/$$

Итак, мы имеем 11 уравнений в системах /23/-/25/ и /32/-/34/ с 11 неизвестными y_i $(i=1,\dots,6)$; $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_5,\lambda_6$. Однако дифференциальных из них только 10. Действительно, из двух уравнений /33/ можно исключить

$$F(y_3,y_4,\lambda_3)=\beta_2\left(\gamma_4\frac{\partial f_0}{\partial y_3}+\frac{\partial f_0}{\partial y_4}\right)-\beta_2\lambda_3\left(\gamma_4\frac{\partial f_1}{\partial y_3}+\frac{\partial f_1}{\partial y_4}\right)+\gamma_4\beta_2\lambda_3\left(\gamma_4\frac{\partial f_2}{\partial y_3}+\frac{\partial f_2}{\partial y_4}\right)=0. \qquad /35/$$

С помощью этого соотношения можно исключить переменную y_4 из уравнений /24/. Тогда останется система 10 дифференциальных уравнений /23/-/25/ и /32/ и уравнение /33/ для $i=3$. Одиннадцатое уравнение для определения y_4 /уравнение /35//будет конечное.Для полученной системы имеется 8 граничных условий /26/-/30/. Недостающие граничные условия получим с помощью условий трансверсальности

[3]. Использовав уравнения /27/-/30/ и условия трансверсальности, легко получить следующие соотношения

$$\lambda_1(1)=\alpha_2\lambda_3(0),\quad \alpha_2\lambda_3(1)=\lambda_5(0),\quad \lambda_6(0)=-\alpha_1\lambda_3(1), \qquad /36/$$

$$\alpha_1\lambda_1(1)+\alpha_2\lambda_2(1)=0. \qquad /37/$$

Итак, имеем I2 граничных условий - 8 условий /26/-/30/ и 4 условия /36/, /37/. Число граничных условий получилось на 2 больше, чем порядок системы дифференциальных уравнений. Однако для удовлетворения лишных двух условий могут быть использованы неизвестные параметры β_1 и β_2 /если β_1 и β_2 определены, то $\beta_3=T-\beta_1-\beta_2$ /. Остановимся на условии для определения β_1. Было показано, что в каждой точке интервала $0\le\tau\le1$ выполняется равенство /35/, запишем его для $\tau=0$

$$F[y_3(0),y_4(0),\lambda_3(0)]=0. \qquad /38/$$

Заменим в этом выражении $y_3(0)$ и $\lambda_3(0)$ с помощью формул /27/ и /36/:

$$F[y_1(1),\ y_4(0),\ \lambda_1(1)]=0. \qquad /39/$$

Отсюда видно, что $y_4(0)$ определяется однозначно с помощью этой формулы, если известно $y_1(1)$ и $\lambda_1(1)$. С другой стороны, согласно уравнению /28/, $y_4(0)=y_2(1)$. Таким образом, уравнения /39/ и /28/, вообще говоря, не совместны при произвольном β_1. Отсюда для того, чтобы эти уравнения были совместны, необходимо подобрать β_1 таким образом, чтобы в точке $\tau=1$ выполнялось равенство

$$F[y_1(1),y_2(1),\ \lambda_1(1)]=0. \qquad /40/$$

Вернемся теперь к первоначальным переменным. Условие /40/ тогда запишется в виде:

$$F[x_1(t_1),x_2(t_1),\lambda_1(t_1)]=0$$

Это будет условие перехода от первого участка ко второму, соответствующего "особому" управлению.

Условия /36/ будут условиями сопряжения множителей Лагранжа в точках стыка участков. Кроме того, можно показать, что условие /37/ эквивалентно обращению в нуль гамильтониана H в уравнениях принципа максимума 5 для первого участка.

Поступила в редакцию I7.II.I97I г.

Л и т е р а т у р а

I.Ю.М.Волин, Г.М.Островский, М.Г.Слинько. Об одном "парадоксе" в задаче об определении оптимальной температурной кривой,-Кинетика и катализ I968, IX, вып. 6.

2. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, В.А.Срочко, Н.В.Тарасенко. Условия

оптимальности высокого порядка.-Автоматика и телемеханика 1970, № 5,6,7.

3. Г.А.Блисс. Лекции по вариационному исчислению, Изд."Иностранная литература", М., 1950.

4. М.Атанс, П.Фалб. Оптимальное управление, Изд. "Машиностроение", М., 1968.

5. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1962.