Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1973 г., выпуск 11
УДК.519.95

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.М.Мухсинов

В данной работе рассматриваются детерминированные дифференциальные игры, как антагонистические, так и неантагонистические, заданные в банаховых пространствах. Для широкого класса таких игр получены необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу. В заключение приводится решение конкретной игры двух лиц с нулевой суммой, в гильбертовом пространстве.

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 дается описание игры в банаховом пространстве, вводятся основные обозначения и формулируются необходимые предположения. В § 2 изложены вспомогательные результаты, которые представляют и самостоятельный интерес. Содержание § 3 составляют достаточные /теорема 1/ и необходимые /теорема 2/ условия равновесия по Нэшу и их доказательства. Наконец, решению конкретной игры в гильбертовом пространстве посвящен § 4.

Следует отметить, что для дифференциальных игр двух лиц с нулевой суммой в конечномерном пространстве некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности одним из первых получил Р.Айзекс [13]. Для более широкого класса таких игр, заданных в конечномерных пространствах, достаточные условия оптимальности, в форме, обобщающей основное уравнение Айзекса /см. [13] /, получены в работе [15].

Данная работа обобщает соответствующие результаты из [13] и [15] на более широкий класс игр и, в частности, на игры, заданные в бесконечномерных банаховых пространствах.

Наконец, заметим, что дифференциальным играм преследования в банаховом пространстве посвящена работа [14].

§ 1. Обозначения, определения и предположения

Ниже всюду, где специально не оговорено противное, все топологические понятия в банаховом пространстве относятся к топологии, порождаемой нормой.

Пусть Z - связное множество из банахова пространства E и пусть $J=(a,b)$, где $a<b\le+\infty$. Далее, пусть терминальное множество $S\subset(\bar{Z}\times[a,b])$ /где $\bar{Z}$ - замыкание Z / является замкнутым, причем $(Z\times\{b\})\subset S$ и множество

$$X=\{x=(z,t):\ z\in Z,\ t\in J,(z,t)\notin S\}$$

непусто. Кроме того, предположим, что заданы непустые множества U и V, принадлежащие метризуемым топологическим пространствам E_1 и E_2 соответственно, и пусть имеется отображение

$$f: X \times U \times V \to E$$

такое, что для любого непрерывного $x: \mathcal{J} \to X$ такого, что $x(t) = (\varphi(t), t)$ $(t \in \mathcal{J})$ и для любых измеримых относительно меры Лебега отображений $u: \mathcal{J} \to U$ и $v: \mathcal{J} \to V$, соответствующее им отображение

$$t \to f(x(t), u(t), v(t)) \quad (t \in \mathcal{J})$$

интегрируемо по Бохнеру на любом конечном сегменте из промежутка $\mathcal{J}$.

Игра задается дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z, t, u, v) \quad ((z,t) \in X,\ u \in U,\ v \in V), \qquad /1/$$

где $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ - сильная производная [3], [4], u - управление игрока I; v - управление игрока 2.

Определим P и Q - множества допустимых стратегий игроков I и 2 соответственно.

$p \in P$ $(q \in Q)$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ отображение $p: X \to U$ $(q: X \to V)$ такое, что при любом непрерывном отображении $x: \mathcal{J} \to X$ таком, что $x(t) = (\varphi(t), t)$, соответствующее отображение $t \to p(x(t))$ $(t \to q(x(t)))$ измеримо относительно меры Лебега на $\mathcal{J}$.

В частности, множество P содержит в себе любое отображение $p: X \to U$, удовлетворяющее условиям:

I. Частное отображение $t \to p(z,t)$ $(t \in X_z)$ /где X_z - сечение множества X по данному z / измеримо относительно меры Лебега при любом фиксированном z.

2. Частное отображение $z \to p(z,t)$ $(z \in X_t)$ /где X_t - сечение множества X по данному t / кусочно-непрерывно при почти всех t.

Аналогичное утверждение, очевидно, верно и для множества Q.

Пусть $x_0 = (z_0, t_0) \in X$, $p \in P$, $q \in Q$. Введем функциональное множество $\Phi(x_0, p, q)$

$$\varphi \in \Phi(x_0, p, q) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \varphi(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(\tau), p(\varphi(\tau), \tau), q(\varphi(\tau), \tau), \tau)\, d\tau$$

при всех $t \in [t_0, t_\varphi)$, где интеграл понимается в смысле Бохнера /см. [3] / и

$$t_\varphi = \inf \{ \tau \in (t_0, \theta] : \lim_{t \to \tau - 0} (\varphi(t), t) = s_\varphi \in S \}. \qquad /2/$$

Понятно, что для любого $\varphi \in \Phi(x_0, p, q)$ имеют место следующие утверждения:

/а/ $\varphi(t_0) = z_0$, $t_\varphi \leq \theta$, $(\varphi(t), t) \in X$ при $t \in [t_0, t_\varphi)$:

/б/ $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), p(\varphi(t), t), q(\varphi(t), t), t)$ при почти всех $t \in [t_0, t_\varphi)$ /см. [3] /;

/в/ отображение φ абсолютно-непрерывно на каждом ограниченном сегменте $[\alpha, \beta] \subset [t_0, t_\varphi)$ /см. [3] /;

/г/ если $\tilde{\varphi}$ - сужение φ на $[t_1, t_\varphi) \subset (t_0, t_\varphi)$, то

$\tilde{\varphi} \in \Phi(\varphi(t_1), t_1, p, q)$, причем $t_\varphi = t_{\tilde{\varphi}}$ и $\lim\limits_{t \to t_{\varphi}-0} (\tilde{\varphi}(t), t) = s_\varphi \in S$.

П р е д п о л о ж е н и е I . Для каждой точки $x \in X$ существует хотя бы одна пара $(p, q) \in P \times Q$ такая, что множество $\Phi(x, p, q)$ не пусто.

Заметим, что наложив определенные ограничения /помимо тех, которые мы уже имеем/ на отображение f и на множества X и S , можно добиться выполнения предположения I. Этот вопрос достаточно широко освещен в литературе /см., например, [I , 5 , 6 , 8 , 9 , 10 , II , 14]/.

Из утверждения /г/ следует, что если $\Phi(x_0, p, q)$ непусто, то $\Phi(x, p, q) \neq \phi$ при любом $x = (\varphi(t), t)$, где $\varphi \in \Phi(x_0, p, q)$, $t \in [t_0, t_\varphi)$.

Пусть R - числовая прямая и пусть имеются отображения $F_i : X \times U \times V \to R$ / i = I,2/ такие, что при любом непрерывном отображении $x: J \to X$ таком, что $x(t) = (\varphi(t), t)$, и любых измеримых относительно меры Лебега отображений $u: J \to U$ и $v: J \to V$ соответствующие им числовые функции $t \to F_i(x(t), u(t), v(t))$ $(t \in J,\ i = 1,2)$ интегрируемы по Лебегу на любом конечном сегменте из промежутка J .

Далее введем ограниченные отображения $T_i : S \to R$ / i = I,2/ и положим

$$W_i(x_0, p, q, \varphi) = \int\limits_{t_0}^{t_\varphi} F_i(x(\tau), u(\tau), v(\tau))d\tau + T_i(s_\varphi) \quad (i = 1,2), \qquad /3/$$

где $\varphi \in \Phi(x_0, p, q)$, $x(t) = (\varphi(t), t)$, $u(t) = p(x(t))$, $v(t) = q(x(t))$ при $t \in [t_0, t_\varphi)$ и $s_\varphi = \lim\limits_{t \to t_\varphi - 0} x(t)$ /см. равенство /2//.

Теперь, если точка $x \in X$ и пара (p, q) такие, что множество $\Phi(x, p, q)$ непусто, то положим.

$$\left.\begin{aligned} g_i(x, p, q) &= \inf_{\varphi \in \Phi(x, p, q)} W_i(x, p, q, \varphi) \\ G_i(x, p, q) &= \sup_{\varphi \in \Phi(x, p, q)} W_i(x, p, q, \varphi) \end{aligned}\right| \quad (i = 1,2), \qquad /4/$$

если же, $\Phi(x, p, q) = \phi$, то полагаем

$$\left.\begin{aligned} g_i(x, p, q) &= -\infty \\ G_i(x, p, q) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2). \qquad /5/$$

Очевидно, что при любых $x \in X$ и $(p, q) \in P \times Q$ имеют место неравенства

$$g_i(x, p, q) \leqslant G_i(x, p, q) \quad (i = 1,2). \qquad /6/$$

Ясно, что в силу /5/ хотя бы в одном из неравенств /6/ равенство возможно лишь тогда, когда множество $\Phi(x, p, q)$ непусто.

В частности, если множество $\Phi(x, p, q)$ состоит из единственного элемента, то в силу /4/ все неравенства /6/ превращаются в равенства.

Будем считать, что игрок i стремится максимизировать функционал g_i , на значение которого он может влиять, вообще говоря,

лишь частично, выбирая ту или иную свою стратегию. Далее, если ситуация (p, q) зафиксирована и игра начинается из точки $x \in X$, то число $g_i(x, p, q)$ /см./4// будем называть минимальным выигрышем игрока i $(i = 1,2)$. Ясно, что когда $\beta = +\infty$, то допускаются игры, которые могут длиться как угодно долго.

Отметим, что если $F_1 = -F_2$ и $T_1 = -T_2$, то описанная выше игра является игрой двух лиц с нулевой суммой и мы в этом случае будем применять следующие обозначения:

$$F = -F_1, \; T = -T_1, \; g = g_2 = -G_1, \; G = G_2 = -g_1.$$

Нетрудно видеть, что согласно сказанному выше в игре с нулевой суммой игрок I должен минимизировать функционал G, а игрок 2 должен максимизировать функционал g, т.к. в этом случае, в силу /4/ и в соответствии с нашими обозначениями, имеем

$$g_1 = -G, \; g_2 = g, \; G_1 = -g, \; G_2 = G.$$

Определение I. Ситуация $(\bar{p}, \bar{q})$ называется равновесной в точке $x \in X$, если

$$g_1(x, \bar{p}, \bar{q}) \geq G_1(x, p, \bar{q})$$
$$g_2(x, \bar{p}, \bar{q}) \geq G_2(x, \bar{p}, q) \qquad /7/$$

при любых $p \in P$, $q \in Q$.

Ситуация называется равновесной на множестве $Y \subset X$, если она равновесна в каждой точке этого множества. Ситуация, равновесная на X, называется абсолютно равновесной или просто равновесной /см. 2 /. Заметим, что для игры с нулевой суммой неравенства /7/ должны быть заменены соответственно неравенствами

$$G(x, \bar{p}, \bar{q}) \leq g(x, p, \bar{q})$$
$$g(x, \bar{p}, \bar{q}) \geq G(x, \bar{p}, q), \qquad /8/$$

при выполнении которых для любых $x \in X$, $p \in P$, $q \in Q$ ситуацию $(\bar{p}, \bar{q})$ будем называть оптимальной.

Таким образом, в дальнейшем, когда речь пойдет об оптимальной ситуации, то надо иметь в виду игру с нулевой суммой.

Далее, нетрудно видеть, что если ситуация $(\bar{p}, \bar{q})$ равновесна в точке $x_0 \in X$, то она является равновесной и на связном множестве

$$\{x : x = (\varphi(t), t), \; \varphi \in \Phi(x_0, p, q), \; t \in [t_0, t_\varphi)\}.$$

Предположение 2. Для любой точки $x \in X$ существует хотя бы одна ситуация (p, q), равновесная в этой точке.

Заметим, что для выполнения предположения 2 достаточно, например, чтобы игра, начатая из любой точки $x \in X$, была выпуклой или же сводимой к выпуклой игре /см. [12]/.

Если ситуация $(\bar{p}, \bar{q})$ равновесна в точке x, то, полагая в правых частях неравенства /7/, $p = \bar{p}$ и $q = \bar{q}$ и учитывая /6/, получаем равенства

$$g_i(x, \bar{p}, \bar{q}) = G_i(x, \bar{p}, \bar{q}) \quad (i = 1, 2), \qquad /9/$$

которые свидетельствуют о том, что $\Phi(x, \bar{p}, \bar{q}) \neq \phi$ и выигрыши игроков в этом случае не зависят от конкретного $\varphi \in \Phi(x, \bar{p}, \bar{q})$. В то

же время ясно, что выигрыши игроков, вообще говоря, зависят от точки x и от ситуации $(\bar{p},\bar{q})$, если даже эта ситуация является равновесной. Однако для игры двух лиц с нулевой суммой имеет место утверждение:

Если ситуация $(\bar{p},\bar{q})$ и $(\tilde{p},\tilde{q})$ оптимальны, то оптимальными являются и их комбинации $(\bar{p},\tilde{q})$ и $(\tilde{p},\bar{q})$ и имеют место равенства:

$$g(x,\bar{p},\bar{q})=g(x,\tilde{p},\tilde{q})=g(x,\bar{p},\tilde{q})=g(x,\tilde{p},\bar{q})= \qquad /10/$$
$$=G(x,\bar{p},\bar{q})=G(x,\tilde{p},\tilde{q})=G(x,\bar{p},\tilde{q})=G(x,\tilde{p},\bar{q}).$$

Это утверждение очевидно, в силу /6/, /8/ и /9/.

Далее, если положить

$$a_1(x)=\sup_p \inf_q G_1(x,p,q) \quad \text{и} \quad a_2(x)=\sup_q \inf_p G_2(x,p,q),$$

то на основании /7/ нетрудно видеть, что какова бы ни была равновесная ситуация $(\bar{p},\bar{q})$, в любой точке $x\in X$ имеют место неравенства

$$g_i(x,\bar{p},\bar{q})\geqslant a_i(x) \quad (i=1,2), \qquad /11/$$

которые выражают тот факт, что минимальные выигрыши игроков на множестве равновесных ситуаций ограничены снизу их максиминными выигрышами.

Следует отметить, что если $F_1=F_2$ и $T_1=T_2$, то игрокам выгоднее всего кооперироваться, т.е. сообща выбирать свои стратегии /от этого, очевидно, каждый из них только выигрывает/. В этом случае описанная выше дифференциальная игра превращается в задачу оптимального приведения точки x на терминальное множество S при наличии фазовых ограничений. При этом множеством допустимых управлений будет прямое произведение $U\times V$, а понятие равновесной ситуации, естественно, заменяется понятием оптимального синтеза. Таким образом, соответствующие результаты, касающиеся дифференциальных игр /§ 3, теоремы I и 2/ могут быть легко переформулированы и для задачи оптимального управления.

§ 2. Предварительные результаты

Определение 2. Семейство непустых и попарно непересекающихся множеств $R=\{Y_k : k\in N\}$ называется разбиением множества $Y=\bigcup_{k\in N} Y_k$ /см. [2]/.

Пусть Y - топологическое пространство.

Определение 3. Разбиение R множества Y будем называть правильным, если выполнены следующие условия:

I. Семейство R состоит из связных множеств.

2. Каждая точка $y\in Y$ имеет такую окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом множеств из R.

Ясно, что если разбиение $\mathcal{R}$ конечно и состоит из связных множеств, то оно правильное. Но обратное, очевидно, неверно. Пусть (Y, ρ) и $(\mathfrak{Z}, \sigma)$ - два метрических пространства.

Определение 4. Отображение $\omega: Y \to \mathfrak{Z}$ назовем A - непрерывным, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого конечного набора $y_k, \bar{y}_k \in Y$ $(k = 1, \dots, n)$ такого, что

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(y_k, \bar{y}_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(\omega(y_k), \omega(\bar{y}_k)) < \varepsilon.$$

Определение 5. Отображение $\omega: Y \to \mathfrak{Z}$ называется локально A - непрерывным, если каждая точка $y \in Y$ имеет такую окрестность $\mathcal{P}$, что отображение $\omega_{\circ}: \mathcal{P} \to \mathfrak{Z}$ является A - непрерывным, где $\omega_{\circ}$ - сужение ω на $\mathcal{P}$.

Понятно, что если отображение A - непрерывно, то оно обязательно и локально A - непрерывно. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 6. Отображение $\omega: Y \to \mathfrak{Z}$ называется кусочно A - непрерывным /кусочно локально A - непрерывным/, если существует такое правильное разбиение $\mathcal{R} = \{Y_K : K \in N\}$ множества Y, что каждое отображение $\omega_K : \bar{Y}_K \to \mathfrak{Z}$ A - непрерывно /локально A - непрерывно/, где ω_K - сужение ω на $\bar{Y}_K$, а $\bar{Y}_K$ - замыкание Y_K $(K \in N)$.

Легко видеть, что локально A - непрерывное отображение всегда и кусочно локально A - непрерывно. Но обратное, вообще говоря, неверно. В то же время очевидно, что кусочно локальное A -непрерывное отображение обязательно непрерывно.

Нетрудно проверить следующие утверждения:

I. Локально липшицево отображение всегда локально A - непрерывно.

2. Множество всех A -непрерывных отображений вида $\omega: Y \to \mathfrak{Z}$ образует векторное пространство над R.

Лемма I. Пусть $\mathcal{R}$ -правильное разбиение множества Y и пусть отображение $\varphi: (0, \infty) \to Y$ непрерывно. Тогда для любого сегмента $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ существует конечное разбиение $\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_z = \beta$ такое, что для каждого $l \in \{1, 2, \dots, z-1\}$ найдется такое множество $K \in \mathcal{R}$, что $\varphi(t_i) \in \bar{K}$ и $\varphi(t_{i+1}) \in \bar{K}$.

Доказательство. Обозначим $L = \varphi[\alpha, \beta]$. Так как разбиение $\mathcal{R}$ является правильным, любая точка $\varphi(t) \in Y$ имеет окрестность $\mathcal{P}_{\varphi(t)}$, которая пересекается лишь с конечным числом множеств из $\mathcal{R}$. Поэтому в силу того, что L - компакт и

$L \subset \bigcup_{\tau \in [\alpha,\beta]} \mathcal{R}_{\varphi(\tau)}$, существует конечное разбиение $\alpha = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m = \beta$ такое, что

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{\varphi(\tau_i)} .$$

Пусть $\mathcal{R}' = \{K \in \mathcal{R} : K \cap (\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{\varphi(\tau_i)}) \neq \varnothing \}$.

Ясно, что семейство $\mathcal{R}'$ конечно, поэтому можно положить

$$\mathcal{R}' = \{ K_i : i \in \{1,2,\ldots,n\}\} .$$

Далее, положим $t_1 = \alpha$ и определим

$$t_{k+1} = \max_{1 \le i \le n} \sup\{t \in [t_k,\beta] : \varphi(t_k) \in \bar{K}_i ,\ \varphi(t) \in \bar{K}_i \} \ (k = 1,2,\ldots)$$

Понятно, что существует конечное целое число τ такое, что $2 \le \tau \le n+1$ и $t_\tau = \beta$, так как отображение φ непрерывно, множества $\bar{K}_i$ замкнуты и связаны при $K_i \in \mathcal{R}$, а семейство $\mathcal{R}'$ конечно.

Таким образом, мы получили требуемое разбиение $\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_\tau = \beta$, где $2 \le \tau \le n+1$, и, следовательно, лемма доказана.

С л е д с т в и е . Если отображение $\varphi : [\alpha,\beta] \to Y$ непрерывно и $\mathcal{R}$ - правильное разбиение множества Y, то множество $L = \varphi([\alpha,\beta])$ пересекается лишь с конечным числом множеств из $\mathcal{R}$.

Л е м м а 2. Пусть отображение $\varphi : [\alpha,\beta] \to Y$ абсолютно непрерывно, а отображение $\omega : Y \to \mathfrak{Z}$ кусочно локально A - непрерывно. Тогда сложное отображение

$$\omega_\circ \varphi : t \to \omega(\varphi(t)) \qquad (t \in [\alpha,\beta])$$

абсолютно непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $L = \varphi([\alpha,\beta])$ и пусть $\mathcal{R}$ - правильное разбиение множества Y, соответствующее кусочно локальной A - непрерывности отображения ω.

Положим $\mathcal{R}' = \{K \in \mathcal{R} : K \cap L \neq \varnothing\}$. На основании следствия леммы I легко видеть, что семейство $\mathcal{R}'$ конечно.

Пусть $\mathcal{R}' = \{K_i : i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$ и $L_i = L \cap \bar{K}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Ясно, что множества L_i компактны и поэтому, в силу того, что $L_i \subset \bigcup_{\varphi(t) \in L_i} \mathcal{R}^i_{\varphi(t)}$, где $\mathcal{R}^i_{\varphi(t)}$ - окрестность точки $\varphi(t)$ в метрическом пространстве $\bar{K}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, соответствующая локальной A - непрерывности отображения ω /см. определения 5 и 6/, существует конечное подпокрытие $L_i \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} \mathcal{R}^i_j$, где $\mathcal{R}^i_j = \mathcal{R}^i_{\varphi(t_j)} \subset \bar{K}_i$ при $\varphi(t_j) \in L_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Следовательно, положив $m = m_1 + \ldots + m_n$, имеем $L \subset \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k$, где $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}^{i+1}_j$ при $k = m_0 + m_1 + \ldots + m_i + j$, $m_0 = 0$, $j = 1,\ldots,m_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$; и при этом отображения $\omega_k : \mathcal{R}_k \to \mathfrak{Z}$ $(k = 1,\ldots,m)$, где ω_k - сужение ω на $\mathcal{R}_k$, A - непрерывны по определению. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_k > 0$ $(k = 1,\ldots,m)$ такие, что для произвольных конечных наборов $y^i_k, \bar{y}^i_k \in \mathcal{R}_k$ $(i = 1,2,\ldots,n_k)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n_k} \rho(y_k^i, \bar{y}_k^i) < \delta_k \quad (k=1,\dots,m),$$

имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^{n_k} \sigma(\omega(y_k^i), \omega(y_k^i)) < \frac{\varepsilon}{m} \quad (k=1,\dots,m).$$

Пусть $\delta = \min\limits_{1\le k\le m} \delta_k$. Тогда если выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \rho(y_k^i, \bar{y}_k^i) < \delta \quad (k=1,\dots,m), \tag{12}$$

то, очевидно, имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_k} \sigma(\omega(y_k^i), \omega(\bar{y}_k^i)) < \varepsilon. \tag{13}$$

Далее, в силу абсолютной непрерывности отображения φ для каждого такого $\delta > 0$ /соответствующего наперед выбранному $\varepsilon > 0$/ существует такое $\gamma > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subset [\alpha, \beta]$ $(i=1,\dots,\ell)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{\ell} (\beta_i - \alpha_i) < \gamma,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\ell} \rho(\varphi(\beta_i), \varphi(\alpha_i)) < \delta.$$

С другой стороны, если положить $\lambda_i(t) = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)\cdot t$ при $t \in [0,1]$ то на основании леммы I легко видеть, что каждый сегмент $[\alpha_i, \beta_i]$ можно разбить так, что $\alpha_i = t_1^i < t_2^i < \dots < t_{z_i}^i = \beta_i$ $(2 \le z_i \le m+1)$, и для каждого $j \in \{1,2,\dots,z_i-1\}$ существует множество $\mathcal{R} \in \{\mathcal{R}_k : k \in \{1,2,\dots,m$ такое, что $\varphi(t_j^i) \in \mathcal{R}$ и $\varphi(t_{j+1}^i) \in \mathcal{R}$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $z_i = m+1$ для любого $i \in \{1,2,\dots,\ell\}$, так как другие возможные случаи рассматриваются аналогично. Пусть, для определенности, имеют место включения:

$\varphi(t_k^i) \in \mathcal{R}_k$ и $\varphi(t_{k+1}^i) \in \mathcal{R}_k$ $(k=1,\dots,m)$, при любом $i \in \{1,\dots,\ell\}$

Так как интервалы (t_k^i, t_{k+1}^i) попарно не пересекаются и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^{\ell} (t_{k+1}^i - t_k^i) < \gamma \quad (k=1,\dots,m),$$

то, в силу абсолютной непрерывности φ, имеем

$$\sum_{i=1}^{\ell} \rho(\varphi(t_{k+1}^i), \varphi(t_k^i)) < \delta \quad (k=1,\dots,m).$$

Ясно, что последние неравенства эквивалентны неравенствам /12/ при $n_k = \ell$, $y_k^i = \varphi(t_k^i)$ и $\bar{y}_k^i = \varphi(t_{k+1}^i)$ $(k=1,\dots,m)$. Следовательно, имеет место неравенство /13/, которое в этом случае имеет вид

$$\lim_{\substack{t_n\to t\\ t_n\in\theta}} \frac{\omega_1\circ\varphi(t)-\omega_2\circ\varphi(t_n)}{t-t_n} = \lim_{\substack{t_n\to t\\ t_n\in\theta}} \frac{\omega_2\circ\varphi(t)-\omega_2\circ\varphi(t_n)}{t-t_n},$$

которое и завершает доказательство леммы.

С л е д с т в и е . Если отображение $\varphi:[\alpha,\beta]\to Y$ абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо по Фреше, а отображение $\omega: Y\to R^n$ дифференцируемо на $K\subset Y$ и кусочно-локально A - непрерывно, то для любого дифференцируемого отображения $\bar\omega:\mathcal{G}\to R^n$ /где $\mathcal{G}$ открыто и содержит в себе K , и $\bar\omega(x)=\omega(x)$ при $x\in K$ / для почти всех $t\in\theta=\varphi^{-1}[K]$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\omega\circ\varphi(t)=\bar\omega'(\varphi(t))\dot\varphi(t), \tag{/15/}$$

где $\bar\omega'(x)$ означает производную Фреше отображения $\bar\omega$ в точке $x\in K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Левая часть равенства /15/ почти всюду однозначно определена, так как на основании леммы 2 сложная функция $\omega\circ\varphi:[\alpha,\beta]\to R^n$ абсолютно непрерывна, и поэтому имеет почти всюду конечную производную /см. [4] /. Правая часть равенства /15/ также почти всюду на θ определена на основании известной теоремы о производной сложного отображения /см. [4 , 5]/. Теперь нетрудно видеть, что справедливость равенства /15/ для почти всех $t\in\theta$ непосредственно следует из леммы 3.

Таким образом, следствие доказано.

Л е м м а 4 . Пусть функция $\lambda:[\alpha,\beta]\to R$ суммируема, а абсолютно непрерывное отображение $\varphi:[\alpha,\beta]\to Y$ почти всюду дифференцируемо по Фреше и пусть кусочно-локально A - непрерывное отображение $\omega: Y\to R$ дифференцируемо относительно счетного разбиения $R=\{Y_k : k\in N\}$, где N счетное; положим $\theta_k=\varphi^{-1}[Y_k]$ при $k\in N$. Тогда если для любого $k\in N$ при почти всех $t\in\theta_k$ имеет место неравенство

$$\lambda(t)+\omega_k'(\varphi(t))\dot\varphi(t)\geqslant 0, \tag{/16/}$$

где ω_k - произвольное дифференцируемое продолжение ω с множества Y_k $(k\in N)$, то функция

$$h(t)=\int_\alpha^t\lambda(\tau)d\tau+\omega\circ\varphi(t)\quad (t\in[\alpha,\beta]) \tag{/17/}$$

является абсолютно непрерывной и монотонно неубывающей.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Функция $t\to\int_\alpha^t\lambda(\tau)d\tau\ (t\in[\alpha,\beta])$ абсолютно непрерывна, так как λ суммируема. Суперпозиция $\omega\circ\varphi$ абсолютно непрерывна на основании леммы 2, и так как сумма абсолютно непрерывных функций есть опять абсолютно непрерывная функция, то ясно, что функция h , определяемая равенством /17/, абсолютно непрерывна.

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{\ell}\sigma(\omega\circ\varphi(t_{k+1}^{i}),\omega\circ\varphi(t_{k}^{i}))<\varepsilon,$$

и вместе со следующим неравенством

$$\sum_{i=1}^{\ell}\sigma(\omega\circ\varphi(\beta_i),\omega\circ\varphi(\alpha_i))\leq\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m}\sigma(\omega\circ\varphi(t_{k+1}^{i}),\omega\circ\varphi(t_{k}^{i}))$$

показывает, что сложное отображение $\omega\circ\varphi$ абсолютно непрерывно.

Лемма доказана.

Ниже $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ – два нормированных пространства, а Y – произвольное непустое подмножество пространства $\mathcal{P}$.

Определение 7. Отображение $\omega: Y\to\mathcal{E}$ называется дифференцируемым на множестве $K\subset Y$, если существует открытое множество $\mathcal{R}\supset K$ и дифференцируемое по Фреше отображение $\bar\omega:\mathcal{R}\to\mathcal{E}$, совпадающее с отображением ω на множестве K. При этом $\bar\omega$ будем называть дифференцируемым продолжением ω с множества K.

Ясно, что дифференцируемое продолжение может быть не единственным.

Определение 8. Пусть $R=\{Y_K: k\in N\}$ – разбиение множества Y. Тогда отображение $\omega: Y\to\mathcal{E}$ называется дифференцируемым относительно разбиения R, если оно дифференцируемо на каждом множестве $Y_K\,(k\in N)$ в смысле определения 7 /ср. с [15]/.

Понятно, что любое отображение $\omega: Y\to\mathcal{E}$ дифференцируемо относительно точечного разбиения $R=\{\{y\}: y\in Y\}$ множества Y.

Лемма 3. Пусть отображение $\varphi:[\alpha,\beta]\to Y$ почти всюду дифференцируемо по Фреше, а отображение $\omega: Y\to\mathcal{E}$ дифференцируемо на $K\subset Y$. И пусть отображения $\omega_i:\mathcal{R}_i\to\mathcal{E}\,(i=1,2)$ являются дифференцируемыми продолжениями ω с множества K, где множества $\mathcal{R}_i\,(i=1,2)$ открытые и содержат в себе K. Тогда для почти всех $t\in\Theta=\varphi^{-1}[K]$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\omega_1\circ\varphi(t)=\frac{d}{dt}\omega_2\circ\varphi(t). \qquad /14/$$

Доказательство. Положим $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ и $\Delta=\varphi^{-1}[\mathcal{R}]\cap\cap(\alpha,\beta)$. Ясно, что множество Δ открыто и обе части доказываемого равенства /14/ определены для почти всех $t\in\Delta$. Далее, разность $\Theta\setminus\Delta$ является либо пустым множеством, либо совпадает с одним из множеств: $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\alpha,\beta\}$, так как $\mathcal{R}\supset K$.

Пусть Θ' означает множество всех изолированных точек множества Θ. Понятно, что Θ' имеет меру нуль. Положим $\Pi=\Theta\setminus(\Delta\cup\Theta')$. Ясно, что Π состоит только из предельных точек и разность $\Theta\setminus\Pi$ имеет меру нуль. С другой стороны, $\Pi\subset\Theta$, и $\omega_1\circ\varphi(t)=\omega_2\circ\varphi(t)$ при $t\in\Theta$. Поэтому при почти всех $t\in\Pi$ имеем равенство

Теперь на основании следствия леммы 3 легко видеть, что для почти всех $t \in \Theta_k$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}h(t) = \lambda(t) + \omega'_k(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$$

при любом $k \in N$, и так как $[\alpha,\beta] = \bigcup_{k\in N}\Theta_k$ и множество N счетно, то в силу /16/ для почти всех $t \in [\alpha,\beta]$ имеем неравенство

$$\frac{d}{dt}h(t) \geqslant 0 .$$

С другой стороны, так как функция h абсолютно непрерывна, то, используя известную теорему Лебега /см. [4], стр. 338/, получаем

$$h(t) = \int_{\alpha}^{t}\frac{d}{dt}h(\tau)d\tau + h(\alpha) \quad (t \in [\alpha,\beta]).$$

Отсюда следует, что функция h является монотонно неубывающей, так как подынтегральная функция в последнем соотношении почти всюду неотрицательна /см. [7]/.

Итак, лемма доказана полностью.

§ 3. Основные теоремы

Напомним, что $X = (Z \times J)\setminus S$ /см. § 1/. Пусть $R = \{X_k : k\in N\}$ - счетное разбиение множества X и пусть отображения $\omega_i : X \to R$ $(i = 1,2)$ дифференцируемы относительно R.

Ниже произвольное дифференцируемое продолжение отображения ω_i с множества X_k будем обозначать через ω_{ik}, где $i = 1,2;\ k\in N$.

Введем отображения $H_{ik} : X_k \times U \times V \to R$ $(i = 1,2;\ k \in N)$.

$$H_{ik}(x,u,v) = F_i(x,u,v) + \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial z}(x) f(x,u,v) + \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial t}(x) \qquad /18/$$

при $x \in X_k$, $k \in N$, $i = 1,2$.

Здесь $\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial z}(x)$ и $\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial t}(x)$ - частные производные Фреше в точке x отображения ω_{ik} по переменным z и t, соответственно /см. [5, 9]/.

Так как отображения ω_{ik} $(i=1,2;\ k\in N)$ по определению дифференцируемы, то частные производные в правой части /18/ существуют в любой точке $x \in X_k$ $(k \in N)$ /см. [9]/. Таким образом, при фиксированных ω_{ik} $(i = 1,2;\ k\in N)$ отображения H_{ik} $(i = 1,2;\ k \in N)$ однозначно определены равенством /18/.

Т е о р е м а 1. Пусть кусочно-локально A - непрерывные отображения $\omega_i : X \to R$ $(i = 1,2)$ дифференцируемы относительно счетного разбиения $R = \{X_k : k \in N\}$ множества X и пусть

$$\lim_{x \to s} \omega_i(x) = T_i(s) \quad (i = 1,2), \qquad /19/$$

где $x \in X$ и $s \in S$.

Тогда ситуация $(\bar{p},\bar{q})$ является равновесной, если для почти всех $t\in J'$ выполнены условия:

$$H_{ik}(z,t,\bar{u},\bar{v})\geqslant 0 \quad i=1,2;k\in N, z\in X_k^t, \qquad /20/$$

$$\sup_{u\in U\setminus\{\bar{u}\}} H_{1k}(z,t,u,\bar{v})\leqslant 0,\ k\in N,\ z\in X_k^t, \qquad /21/$$

$$\sup_{v\in V\setminus\{\bar{v}\}} H_{2k}(z,t,\bar{u},v)\leqslant 0,\ k\in N,\ z\in X_k^t, \qquad /22/$$

где $\bar{u}=\bar{p}(z,t)$ и $\bar{v}=\bar{q}(z,t)$; J' - проекция множества X на J ; X_k^t - сечение множества X_k по t, при $k\in N, t\in J'$.

Доказательство. Пусть $x_0=(z_0,t_0)\in X$, $p\in D$ и $q\in Q$, причем множества $\Phi(x_0,\bar{p},q)$ и $\Phi(x_0,p,\bar{q})$ непустые /в случае, когда они пустые, доказательство тривиально, в силу /5/ и /7//. Возьмем произвольные $\bar{\varphi}\in\Phi(x_0,\bar{p},\bar{q})$, $\varphi\in\Phi(x_0,p,\bar{q})$, $\psi\in\Phi(x_0,\bar{p},q)$ и положим

$$\bar{h}_i(t)=\int_{t_0}^{t}F_i(\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),\bar{v}(\tau))d\tau+\omega_i(\bar{x}(t)) \quad (t\in[t_0,t_{\bar{\varphi}}]),$$

где $i=1,2$; $\bar{x}(t)=(\bar{\varphi}(t),t)$; $\bar{u}(t)=\bar{p}(\bar{x}(t))$; $\bar{v}(t)=\bar{q}(\bar{x}(t))$;

$$h_1(t)=\int_{t_0}^{t}F_1(x(\tau),u(\tau),v(\tau))d\tau+\omega_1(x(t)) \quad (t\in[t_0,t_\varphi)),$$

где $x(t)=(\varphi(t),t)$, $u(t)=p(x(t))$, $v(t)=\bar{q}(x(t))$.

$$h_2(t)=\int_{t_0}^{t}F_2(\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau),\tilde{v}(\tau))d\tau+\omega_2(\tilde{x}(t)) \quad (t\in[t_0,t_\psi)),$$

где $\tilde{x}(t)=(\psi(t),t)$, $\tilde{u}(t)=\bar{p}(\tilde{x}(t))$ $\tilde{v}(t)=q(\tilde{x}(t))$.

Ясно, что

$$\bar{h}_i(t_0)=h_i(t_0)=\omega_i(x_0) \quad (i=1,2). \qquad /23/$$

Далее, согласно /18/, имеем:

$$\frac{d}{dt}\bar{h}_i(t)=H_{ik}(\bar{x}(t),\bar{p}(\bar{x}(t)),\bar{q}(\bar{x}(t))) \quad (i=1,2)$$

для почти всех $t\in\bar{\varphi}^{-1}[X_k]$ при $k\in N$;

$$\frac{d}{dt}h_1(t)=H_{1k}(x(t),p(x(t)),\bar{q}(x(t)))$$

для почти всех $t\in\varphi^{-1}[X_k]$ при $k\in N$;

$$\frac{d}{dt}h_2(t)=H_{2k}(\tilde{x}(t),\bar{p}(\tilde{x}(t)),q(\tilde{x}(t)))$$

для почти всех $t\in\psi^{-1}[X_k]$ при $k\in N$.

Ясно, что

$$[t_0,t_{\bar{\varphi}})=\bigcup_{k\in N}\bar{\varphi}^{-1}[X_k],\ [t_0,t_\varphi)=\bigcup_{k\in N}\varphi^{-1}[X_k],\ [t_0,t_\psi)=\bigcup_{k\in N}\psi^{-1}[X_k].$$

Теперь, опираясь на лемму 4, заключаем, что функции $\bar{h}_i$ $(i=1,2)$ являются монотонно неубывающими в силу /20/, а функции h_1 и h_2 - монотонно невозрастающими в силу /21/ и /22/, соответственно, Поэто-

му в силу /23/ имеем

$$\bar{h}_1(t) \geq \omega_1(x_0) \geq h_1(\tau) \text{ при } t \in [t_0, t_{\bar{\varphi}}) \quad \tau \in [t_0, t_\varphi) \qquad /24/$$

и

$$\bar{h}_2(t) \geq \omega_2(x_0) \geq h_2(\tau) \text{ при } t \in [t_0, t_{\bar{\varphi}}) \quad \tau \in [t_0, t_\psi). \qquad /25/$$

С другой стороны, так как отображения $\bar{\varphi}$, φ, ψ непрерывны, то на основании /3/ и /19/ замечаем, что

$$\lim_{t \to t_{\bar{\varphi}}-0} \bar{h}_i(t) = W_i(x_0, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}) \quad (i = 1, 2),$$

$$\lim_{t \to t_\varphi - 0} h_1(t) = W_1(x_0, p, \bar{q}, \varphi) \qquad \lim_{t \to t_\psi - 0} h_2(t) = W_2(x_0, \bar{p}, q, \psi).$$

Наконец, воспользовавшись неравенствами /24/ и /25/, а также учитывая последние соотношения, получаем неравенства

$$W_1(x_0, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}) \geq W_1(x_0, p, \bar{q}, \varphi),$$

$$W_2(x_0, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\varphi}) \geq W_2(x_0, \bar{p}, q, \psi),$$

из которых, в силу произвольности точки $x_0 \in X$ и отображений p, q, $\bar{\varphi}$, φ и ψ, сразу следует равновесность ситуации $(\bar{p}, \bar{q})$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е . В игре двух лиц с нулевой суммой /т.е. когда $F = -F_1 = F_2$ и $T = -T_1 = T_2$ / ситуация $(\bar{p}, \bar{q})$ будет оптимальной, если существует кусочно-локально A - непрерывное и дифференцируемое относительно счетного разбиения $\mathcal{R}$ множества X отображение $\omega : X \to R$ такое, что

$$\lim_{x \to s} \omega(x) = T(s), \qquad /26/$$

где $x \in X$, $s \in S$; и для почти всех $t \in \mathcal{J}'$ выполнены условия

$$\inf_{u \in U} H_k(z, t, u, \bar{v}) \geq 0 \qquad \sup_{v \in V} H_k(z, t, \bar{u}, v) \leq 0 \qquad /27/$$

при $z \in X_k^t$, $k \in N$;
где $\bar{u} = \bar{p}(z, t)$, $\bar{v} = \bar{q}(z, t)$, $\mathcal{J}'$ - проекция X на $\mathcal{J}$, X_k^t - сечение X_k по t, и, наконец, $H_k : X_k \times U \times V \to R$ $(k \in N)$, причем

$$H_k(x, u, v) = F(x, u, v) + \frac{\partial \omega_k}{\partial z}(x) f(x, u, v) + \frac{\partial \omega_k}{\partial t}(x) \quad \text{при } x \in X_k,$$

где ω_k - дифференцируемое продолжение отображения ω с множества X_k $(k \in N)$.

Т е о р е м а 2 . Если ситуация $(\bar{p}, \bar{q})$ такова, что отображения $\omega_i : X \to R$ $(i = 1, 2)$ определенные равенствами $\omega_i(x) = g_i(x, \bar{p}, \bar{q})$ $(i = 1, 2)$ /см. равенства /4//, кусочно-локально A - непрерывны и дифференцируемы относительно счетного разбиения $\mathcal{R} = \{X_k : k \in N\}$

множества X, то для равновесности ситуации $(\bar{p}, \bar{q})$ необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $t \in \mathcal{J}'$ имело место соотношение

$$\sup_{u \in U} H_{1k}(z, t, u, \bar{v}) = \sup_{v \in V} H_{2k}(z, t, \bar{u}, v) = 0, \qquad /28/$$

при $z \in X_k^t$, $k \in N$; где $\bar{u} = \bar{p}(z, t)$, $\bar{v} = \bar{q}(z, t)$, $\mathcal{J}'$ - проекция множества X на $\mathcal{J}$, X_k^t - сечение множества X_k по t, при $k \in N$, $t \in \mathcal{J}'$.

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из теоремы I, поэтому докажем только необходимость.

Пусть $x \in (z, t) \in X_k (k \in N)$, $u \in U$ и $\varepsilon > 0$.

Пусть $Ш(x, \varepsilon)$ - шар радиуса ε с центром в точке $x \in X_k$.

Определим отображение $p: X \to U$ равенством

$$p(x') = \begin{cases} u & \text{при } x' \in Ш(x, \varepsilon) \cap X, \\ \bar{p}(x') & \text{при } x' \notin Ш(x, \varepsilon) \cap X. \end{cases}$$

Ясно, что $p \in P$ при любом $\varepsilon > 0$.

Теперь пусть $\varphi \in \Phi(x, p, \bar{q})$ и $x(\tau) = (\varphi(\tau), \tau)$ при $\tau \geqslant t$. Тогда легко видеть, что при произвольном $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta (0 < \delta \leq \varepsilon)$ что

$$\int_t^{t_\varphi} F_1(x(\tau), p(x(\tau)), \bar{q}(x(\tau))) d\tau + T_1(s_\varphi) = \int_t^{t+\delta} F_1(x(\tau), u, \bar{q}(x(\tau))) d\tau +$$

$$+ \int_{t+\delta}^{t_\varphi} F_1(x(\tau), \bar{p}(x(\tau)), \bar{q}(x(\tau))) d\tau + T_1(s_\varphi) = \int_t^{t+\delta} F_1(x(\tau), u, \bar{q}(x(\tau))) d\tau + \omega_1(x(t+\delta))).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\omega_1(x) = g_1(x, \bar{p}, \bar{q}) \geqslant G_1(x, p, \bar{q}) \geqslant \int_t^{t_\varphi} F_1(x(\tau), p(x(\tau)), \bar{q}(x(\tau))) d\tau + T_1(s_\varphi)$$

/см./ 3/, /4/, /7//, получаем

$$\frac{\omega_1(x(t+\delta)) - \omega_1(x(t))}{\delta} + \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} F_1(x(\tau), u, \bar{q}(x(\tau))) d\tau \leq 0.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $0 < \delta \leq \varepsilon \to 0$, для почти всех $t \in \mathcal{J}'$ /см. [3]/ имеем

$$\frac{d}{dt} \omega_1(x(t)) + F_1(x(t), u, \bar{q}(x(t))) \leq 0.$$

С другой стороны, опираясь на следствие леммы 3, легко видеть, что для почти всех $t \in \varphi^{-1}[X_k]$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \omega_1(x(t)) = H_{1k}(x(t), u, \bar{q}(x(t))) - F_1(x(t), u, \bar{q}(x(t))).$$

И, так как $\varphi(t) = z \in X_k^t$, то, в силу того, что точка z произвольна, для почти всех $t \in \mathcal{J}'$ имеем

$$\sup_{u \in U} H_{1k}(z, t, \bar{u}, \bar{v}) \leq 0 \quad \text{при} \quad z \in X_k^t, \ k \in N \qquad /29/$$

Аналогично доказывается, что для почти всех $t \in \mathcal{J}'$

$$\sup_{v \in V} H_{2k}(z, t, \bar{u}, v) \leq 0 \quad \text{при } z \in X_k^t, \ k \in N. \qquad /30/$$

Далее, в силу /9/, для любого $\varphi \in \Phi(x, \bar{p}, \bar{q})$ имеем

$$\omega_i(x(t)) = \int_t^{t_\varphi} F_i(x(\tau), \bar{p}(x(\tau)), \bar{q}(x(\tau))) d\tau + T_i(s_\varphi) \quad (i = 1, 2),$$

где $x(t)=(\varphi(t),t)$, $s_\varphi=\lim\limits_{t\to t_\varphi-0} x(t)$

Опираясь на лемму 2, нетрудно видеть, что функции

$$t\to\omega_i(x(t)) \qquad (t\in\mathcal{J}',\ i=1,2)$$

почти всюду имеют конечные производные. Поэтому после дифференцирования получим

$$\frac{d}{dt}\,\omega_i(x(t))=-F_i(x(t),\bar p(x(t)),\bar q(x(t))) \quad (i=1,2)$$

для почти всех $t\in\mathcal{J}'$ /см. [3 , 4]/.

Отсюда в силу /18/, /29/ и /30/ получаем /28/.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I . Пусть множества U и V зависят от $x\in X$, а множества Z и S зависят от $t\in\mathcal{J}$, и пусть выполнены сформулированные в § I предположения I и 2. Тогда вышеизложенные доказательства теорем I и 2 без существенных изменений проходят и для этого случая.

З а м е ч а н и е 2 . Аналогичные теоремы очевидно, верны и для бескоалиционных дифференциальных игр n лиц $(n\geqslant 3)$.

§ 4. П р и м е р

Пусть E - вещественное гильбертово пространство.

При $0\leq r<+\infty$ положим

$$Z=\{z\in E:\ \|z\|>r\},\quad \Gamma=\{z\in E:\ \|z\|=r\}.$$

Кроме того, пусть

$$W=\{z\in E:\ \|z\|\leq 1\},\quad \mathcal{J}=[a,+\infty).$$

Игра задается дифференциальным уравнением

$$\dot z=\lambda(z,t)u+\mu(z,t)v \qquad (z\in Z,\ t\in\mathcal{J},\ u,v\in W), \qquad /31/$$

где $\dot z$ - сильная производная; u - управление игрока I; v - управление игрока 2.

Предполагается, что при $z\in Z$ для почти всех $t\in\mathcal{J}$ отображения λ,μ: $Z\times\mathcal{J}\to R$ удовлетворяют соотношению

$$|\mu(z,t)|-|\lambda(z,t)|=-c<0. \qquad /32/$$

Рассматривается игра двух лиц с нулевой суммой, причем $F=-F_1=F_2=1$ и $T=-T_1=T_2$ /см. равенство /3//.

I. Пусть $S=\Gamma\times\mathcal{J}$, а $T(s)=0$ при всех $s\in S$ /см. § I/.

Покажем, что ситуация $(\bar p,\bar q)$, определенная равенствами

$$\bar p(z,t)=\begin{cases}\dfrac{|\lambda(z,t)|}{\lambda(z,t)}\cdot\dfrac{z}{\|z\|} & \text{при } \lambda(z,t)\neq 0,\\[2mm] \dfrac{z}{\|z\|} & \text{при } \lambda(z,t)=0\end{cases} \qquad /33/$$

и

$$\bar{q}(z,t)=\begin{cases}\dfrac{|\mu(z,t)|}{\mu(z,t)}\cdot\dfrac{z}{\|z\|} & \text{при} \quad \mu(z,t)\neq 0\,,\\ \dfrac{z}{\|z\|} & \text{при} \quad \mu(z,t)=0\end{cases}$$

является оптимальной.

Отображение ω определим равенством

$$\omega(z,t)=\frac{\|z\|-\tau}{c} \qquad (z\in Z\,,\ t\in J)\,.$$

и покажем, что выполняются все условия следствия из теоремы I. Ясно, что ω дифференцируемо и удовлетворяет условию Липшица. Далее, очевидно, $\lim\limits_{\|z\|\to\tau}\omega(z,t)=0$ Остается проверить /27/. Действительно, так как $\dfrac{\partial\omega}{\partial z}(z,t)=\dfrac{z}{\|z\|}$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}(z,t)=0$, то нетрудно видеть, что

$$H(z,t,u,v)=1+\frac{\lambda(z,t)}{c\cdot\|z\|}[z,u]+\frac{\mu(z,t)}{c\cdot\|z\|}[z,v]\,,$$

где $[z,y]$ - скалярное произведение. Отсюда, в силу /32/, /33/ и /34/, имеем

$$\inf_{u\in W}H(z,t,u,\bar{v})=\sup_{v\in W}H(z,t,\bar{u},v)=H(z,t,\bar{u},\bar{v})=0$$

при $z\in Z$ и при почти всех $t\in J$ таких, что $(z,t)\notin S$; где $\bar{u}=\bar{p}(z,t)$ и $\bar{v}=\bar{q}(z,t)$.

Таким образом, ситуация $(\bar{p},\bar{q})$ является оптимальной. Заметим, что если в соотношении /32/ константа C равна нулю, то в ситуации $(\bar{p},\bar{q})$ игра никогда не закончится, так как уравнение /31/ примет вид: $\dot{z}=0$; и в то же время, очевидно, что любая другая ситуация вида $(\bar{p},q)$, где $q\neq\bar{q}$ /соответственно вида $(p,\bar{q})$, где $p\neq\bar{p}$ / может быть лишь проигрышной для игрока 2 /соответственно для игрока I/.

Теперь легко видеть, что цена игры /см. /8/ и /9/, § I/ определяется равенством

$$g(x,\bar{p},\bar{q})=\frac{\|z\|-\tau}{c}\,,$$

где $x=(z,t)$, $z\in Z$, $t\in J$.

2. Пусть $S=S_1\cup S_2$ и $T:(z,t)\to\|z\|$, где $S_1=\Gamma\times[\alpha,\beta]$ и $S_2=Z\times\{\beta\}$, $a\leq\alpha<\beta<+\infty$. Покажем, что и в этом случае ситуация $(\bar{p},\bar{q})$, определенная равенствами /33/ и /34/, является оптимальной.

Отображение ω определим следующим образом:

$$\omega(z,t)=\begin{cases}\dfrac{\|z\|-\tau}{c}+\tau & \text{при} \quad \tau<\|z\|\leq c(\beta-t)+\tau \quad \text{и} \quad t<\beta\\ \beta-t+\|z\|-c(\beta-t) & \text{при} \quad \|z\|>c(\beta-t)+\tau \quad \text{и} \quad t<\beta\end{cases}$$

Ясно, что отображение ω непрерывно на $X=Z\times[\alpha,\beta)$ и $\lim\limits_{x\to s}\omega(x)=T(s)$ где $x\in X$, $s\in S$. Далее, нетрудно видеть, что ω кусочно A - непрерывно и дифференцируемо относительно разбиения $R=\{X_1,X_2\}$ множества $X=Z\times[\alpha,\beta)$, где

$$X_1=\{(z,t):\ r<\|z\|\le c(\beta-t)+r,\ \alpha\le t<\beta\}\quad \text{и}\quad X_2=X\setminus X_1.$$

Также легко проверяется выполнение соотношения /27/. Например, при $\|z\|>c\cdot(\beta-t)+r$ и $t<\beta$ имеем: $\frac{\partial\omega}{\partial z}(z,t)=\frac{z}{\|z\|}$, $\frac{\partial\omega}{\partial t}(z,t)=c-1$.

Следовательно,

$$H_2(z,t,u,v)=1+\frac{\lambda(z,t)}{\|z\|}[z,u]+\frac{\mu(z,t)}{\|z\|}[z,v]+c-1,\ \text{при}\ (z,t)\in X_2\,.$$

Отсюда, в силу /32/, /33/ и /34/, имеем

$$\inf_{u\in U}H_2(z,t,u,\bar v)=\sup_{v\in V}H_2(z,t,\bar u,v)=H_2(z,t,\bar u,\bar v)=0.$$

Случай, когда $(z,t)\in X_1$ проверяется аналогично.

Таким образом, пара $(\bar p,\bar q)$ оптимальна. Нетрудно проверить,что цена игры определяется равенством $g(x,\bar p,\bar q)=\omega(x)$ при $x\in X$. Таким образом, рассматриваемая игра решена полностью.

В заключение выражаю глубокую благодарность И.А.Крассу за советы, помогшие довести исследование до конца.

Поступила в ред.-изд.отдел
26 декабря 1972 г.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Бурбаки. Функции действительного переменного. М., "Наука", 1965.

2. К.Берж. Общая теория игр нескольких лиц. М., Физматгиз, 1961.

3. Э.Хилле, Р.Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ., 1962.

4. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теорий функций и функционального анализа. М., "Наука", 1968.

5. Ж.Дьедонне. Основы современного анализа. М., "Мир", 1964.

6. Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., "Наука", 1970.

7. П.Халмош. Теория меры. М., ИЛ., 1953.

8. М.А.Красносельский, С.Г.Крейн. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Труды семинара по функ.анализу, 2, Воронеж, 1956.

9. А.Картан. Дифференциальное исчисление. М., "Мир", 1971.

10. Х.Массера, Х.Шеффер. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., "Мир", 1970.

11. Е.А.Барбашин. Введение в теорию устойчивости. М., "Наука", 1967.

12. Х.Никайдо, К.Исода. Заметка о бескаолиционных выпуклых играх. - "Бесконечные антагонистические игры", М., 1963, 449-458 .

13. Р.Айзекс. Дифференциальные игры. М., "Мир", 1967.

14. A.Friedman. Differential games of pursuit in Banach space. J. Math. Anal. and Appl. 25 /1969/, 93-113.

15. H.L.Stalford, G.Leitmann. Sufficient Conditions for Optimality in Two-Person Zero-Sum Differential Games with State and Strategy Constraints. J. Anal. and Appl. 33 /1971/, 650-654.