Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1973 г. выпуск II
УДК.512.25

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАНДАРТИЗАЦИИ. I

В.Л.Береснев

Большие возможности для принятия решений в области стандартизации, выбора типажа оборудования, обоснования параметров машин и механизмов и т.д., открывающиеся в связи с применением методов оптимизации, обусловливают неуклонное повышение интереса к математическим задачам стандартизации. Задачам этого типа посвящено большое количество работ с изложением различных подходов и методов решения. Одна из наиболее удачных постановок задачи стандартизации приведена в [9, 10]. В настоящей работе эта задача названа задачей выбора оптимального набора. Решение простейшей задачи такого типа приведено в [1], в этой же работе содержится и первая математическая формулировка задачи выбора оптимального набора. В качестве других работ, содержащих постановку и решение задач стандартизации, следует отметить работы [2, 3], в которых рассматриваются некоторые частные случаи задачи из [9, 10]. В иностранной литературе задача выбора больше известна как задача размещения производства [5-7], для решения которой в основном используются методы неявного перебора.

Несмотря на повышенный интерес к задаче выбора оптимального набора, в настоящее время не известно эффективного алгоритма решения задачи в общем случае. Представляется естественным в этой связи рассмотрение некоторых частных случаев задачи, специфика которых позволяет построить эффективные алгоритмы. Важным шагом в этом направлении было выделение в работах [8, 9] задачи выбора, для которой функция $g(i,j)$ удовлетворяет так называемому свойству связности. Этого свойства достаточно для эффективного решения задачи методом динамического программирования. В работах [10, 11] рассмотрена задача выбора оптимального набора, для которой функция $g(i,j)$ удовлетворяет важному в практическом отношении свойству квазивыпуклости по i.

В настоящей работе делается попытка расширить класс эффективно решаемых задач выбора оптимального набора. Основной результат содержится в § 2, где задаче выбора ставится в соответствие эквивалентная ей задача минимизации некоторого полинома с булевыми переменными. В этом же параграфе выделяется класс функций $g(i,j)$, которым соответствуют полиномы специального вида /названные регулярными/. Показано, что данный класс включает в себя два ранее рассмотренных класса. В § 3 для задачи минимизации регулярного полинома предложен эффективный алгоритм в духе динамического программирования. Приводятся оценки трудоемкости вычислений. Во второй

части работы для полиномов, обладающих некоторым дополнительным свойством, будет описан алгоритм, позволяющий установить, является ли данный полином регулярным.

§ I. Постановка задачи

Пусть имеется множество $X=\{1,2,\ldots,n\}$ – список требуемых изделий или перечень работ, которые необходимо выполнить. На множестве X задана неотрицательная функция спроса φ_j, означающая, в каком количестве необходимо выполнять работы или какова потребность в изделиях. Спрос может быть удовлетворен изделиями из множества $U=\{1,2,\ldots,m\}$. На множестве U задана неотрицательная функция g_i^0 – плата за участие изделия i в удовлетворении потребности. Известны также величины g_{ij}, $i\in U$, $j\in X$ – стоимости удовлетворения изделием i единичной потребности в изделии или работе j. Зафиксируем некоторый набор изделий U_1 из множества U. Тогда суммарные затраты, связанные с полным удовлетворением спроса рассмотренным набором изделий и складывающиеся из плат за участие и стоимостей удовлетворения, составят

$$\sum_{i\in U_1} g_i^0 + \sum_{j\in X}\varphi_j \min_{i\in U_1} g_{ij}$$

Задача выбора оптимального набора состоит в определении такого подмножества U_1 множества U, для которого суммарные затраты минимальны. Таким образом, получается следующая

Задача I

$$\min_{U_1\subset U}\left\{\sum_{i\in U_1} g_i^0 + \sum_{j\in X}\varphi_j \min_{i\in U_1} g_{ij}\right\}.$$

Иногда количество изделий, входящих в набор U_1, не может быть больше некоторого числа M. В этом случае рассматривается

Задача I′

$$\min_{U_1\subset U,\ |U_1|\leq M}\left\{\sum_{i\in U_1} g_i^0 + \sum_{j\in X}\varphi_j \min_{i\in U_1} g_{ij}.\right\}.$$

Для любого $U_1\subset U$ через $|U_1|$ будем обозначать число элементов в множестве U_1. Сформулированные задачи могут иметь и иную интерпретацию. Предположим, что X – множество пунктов потребления некоторого продукта, φ_j – объемы потребления в каждом пункте. Пусть, далее, U – множество возможных точек размещения предприятий, производящих данный продукт. Известны g_i^0 – затраты на постройку предприятия в i-й точке и g_{ij} – транспортные расходы на доставку единицы продукта из точки i в j-й пункт потребления. Задача размещения производства заключается в том, чтобы выяснить, в каких точках множества U разместить предприятия так, чтобы суммарные затраты, сос-

тоящие из затрат на постройку и транспортных расходов, были минимальными.

Задачи I и I$'$, таким образом, можно рассматривать как математическую формулировку задачи размещения производства.

§ 2. Регулярные матрицы и полиномы

В силу равенства $\varphi_j \min\limits_{U_1} g_{ij} = \min\limits_{U_1} \varphi_j g_{ij}$ вместо задачи выбора оптимального набора с матрицей $\{g_{ij}\}$ и вектором $\{\varphi_j\}$ можно рассматривать задачу выбора с матрицей $\{\varphi_j g_{ij}\}$. Поэтому в дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что $\varphi_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$, и с задачей выбора оптимального набора связывать только матрицу $\{g_{ij}\}$.

Совершенным отношением квазипорядка на множестве U будем называть отношение, определенное для любых пар элементов множества U /и в общем случае обозначаемое далее $\preccurlyeq$ /, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. $i \preccurlyeq i$;

2. если $i_1 \preccurlyeq i_2$, $i_2 \preccurlyeq i_3$, то $i_1 \preccurlyeq i_3$.

Если $i_1 \preccurlyeq i_2$ исключает $i_2 \preccurlyeq i_1$, то имеет место отношение $i_1 \prec i_2$, в противном случае — $i_1 = i_2$. Если множество U наделено отношением квазипорядка $\preccurlyeq$, то будем считать, что задана некоторая перестановка $i_1, i_2, \ldots, i_m$ множества U такая, что $i_k \preccurlyeq i_{k+1}$, $k = 1, \ldots, m-1$, и говорить, что множество U упорядочено отношением $\preccurlyeq$.

Рассмотрим матрицу $G = \{g_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, и для всякого j на множестве U определим отношение $\underset{j}{\trianglelefteq}$ следующим образом: $i_1 \underset{j}{\trianglelefteq} i_2$, если $g_{i_1 j} \leq g_{i_2 j}$. Данное отношение — совершенное отношение квазипорядка. Про систему отношений $\{\underset{j}{\trianglelefteq}\}_{j=1}^{n}$ будем говорить, что она порождена матрицей G.

Л е м м а 1. Для любого $j \in X$ и всякого ненулевого вектора $(y_1, \ldots, y_m)$, $y_i \in \{0, 1\}$, имеет место равенство:

$$\min_{i/y_i=1} g_{ij} = g_{i_1^j j} + \sum_{\ell=2}^{m} (g_{i_\ell^j j} - g_{i_{\ell-1}^j j}) \prod_{k \underset{j}{\trianglelefteq} i_\ell^j} (1 - y_k)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\min\limits_{i/y_i=1} g_{ij} = g_{i_q^j j}$ и предположим, что $i_q^j = i_{q+1}^j = \ldots = i_r^j$, $r \leq m$. Тогда $y_{i_q^j} = 1$, $y_i = 0$, $i \underset{j}{\trianglelefteq} i_q^j$, откуда получаем

$$g_{i_1^j j} + \sum_{\ell=2}^{m} (g_{i_\ell^j j} - g_{i_{\ell-1}^j j}) \prod_{k \underset{j}{\trianglelefteq} i_\ell^j} (1 - y_k) =$$

$$= g_{i_1^j j} + \sum_{\ell=2}^{r} (g_{i_\ell^j j} - g_{i_{\ell-1}^j j}) = g_{i_r^j j} = g_{i_q^j j}.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а I. Задача I эквивалентна задаче минимизации некоторого полинома $f(x_1, \dots, x_m)$ от переменных, принимающих значение 0,1.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Введением переменных y_i, i = I, ..., m, принимающих значение $0, 1$, заменим задачу I следующей:

$$\min_{(y_1,\dots,y_m)\neq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} g_i^0 y_i + \sum_{j=1}^{n} \min_{i/y_i=1} g_{ij} \right\}.$$

Для всякого $j \in X$ рассмотрим отношение $\trianglelefteq_j$, тогда последняя задача, в силу леммы I, сводится к задаче

$$\min_{(y_1,\dots,y_m)} \left\{ \sum_{i=1}^{m} g_i^0 y_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=2}^{m} (g_{i^j_\ell j} - g_{i^j_{\ell-1} j}) \prod_{k \trianglelefteq_j i^j_\ell} (1-y_k) + \right.$$

$$\left. + F(1-y_1)\dots(1-y_m) \right\},$$

где F - достаточно большое положительное число. Введя обозначения $x_i = 1-y_i$, i = I,...,m, получаем полином

$$f(x_1,\dots,x_m) = -\sum_{\ell=1}^{m} g_\ell^0 x_\ell + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=2}^{m} (g_{i^j_\ell j} - g_{i^j_{\ell-1} j}) \prod_{k \trianglelefteq_j i^j_\ell} x_k + F x_1 \dots x_m,$$

задача минимизации которого эквивалентна задаче I.

С л е д с т в и е . Полином $f(x_1, \dots, x_m)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^0 x_\ell + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^j x_{i^j_1} \dots x_{i^j_\ell} + F x_1 \dots x_m,$$

где $a_\ell^0 = -g_\ell^0 < 0$; $a_\ell^j = (g_{i^j_{\ell+1} j} - g_{i^j_\ell j}) \geq 0$, $j = 1,\dots,n$; $\ell = 1,\dots,m-1$.

З а м е ч а н и е . Задача I$'$ эквивалентна задаче минимизации полинома $f(x_1, \dots, x_m)$ при ограничении $\sum_{\ell=1}^{m} (1-x_i) \leq M$.

Из построения $f(x_1, \dots, x_m)$ видно, что полином

$$h(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^j x_{i^j_1} \dots x_{i^j_\ell}$$

полностью определяется матрицей $G = \{g_{ij}\}$. Поэтому будем говорить, что полином $h(x_1, \dots, x_m)$ соответствует матрице G. Матрицы G_1 и G_2 назовем эквивалентными, если им соответствует один полином. Рассмотренное отношение - действительно эквивалентность, поэтому будем говорить о классе эквивалентности и полиноме, который соответ-

ствует данному классу.

Определение I. Систему отношений квазипорядка $\{\underset{t}{\leqslant}\}_{t=1}^{T}$ будем называть регулярной, если для любых $i_1, i_2 \in U$ таких, что при $t_1 < t_2$ $i_1 \underset{t_1}{\lessdot} i_2$, $i_2 \underset{t_2}{\lessdot} i_1$ имеем $i_1 \underset{t}{\leqslant} i_2$ для любого t, $t < t_1$ и $i_2 \underset{t}{\leqslant} i_1$, для любого t, $t > t_2$.

Определение 2. Матрицу $G = \{g_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$, будем называть связной, если для произвольных i_1, i_2 разность $g_{i_1 j} - g_{i_2 j}$ при монотонном изменении j меняет знак не более одного раза.

Нетрудно заметить, что матрица G связная тогда и только тогда, когда система отношений квазипорядка, порождаемая G, регулярна.

Определение 3. Матрицу G будем называть регулярной, если она принадлежит классу эквивалентности, содержащему связную матрицу. В соответствии с этим полином назовем регулярным, если он соответствует классу регулярных матриц.

Очевидно, связная матрица - регулярная.

Пусть задан полином $h(x_1, \ldots, x_m)$. Будем говорить, что система отношений квазипорядка $\{\underset{t}{\leqslant}\}_{t=1}^{T}$ связана с полиномом, если $h(x_1, \ldots, x_m)$ может быть записан в виде:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^t x_{i_1^t} \ldots x_{i_\ell^t},$$

где $a_\ell^t > 0$, если $i_\ell^t < i_{\ell+1}^t$; $a_\ell^t = 0$, если $i_\ell^t = i_{\ell+1}^t$, $\ell = 1, \ldots, m-1$.

Построим по полиному $h(x_1, \ldots, x_m)$ и системе $\{\underset{t}{\leqslant}\}_{t=1}^{T}$ матрицу $H = \{h_{it}\}$, $i=\overline{1,m}$; $t=\overline{1,T}$. Элементами t-го столбца матрицы будут величины, полученные из следующей системы уравнений:

$$a_\ell^t = h_{i_{\ell+1}^t t} - h_{i_\ell^t t}, \quad \ell = 1, \ldots, m-1.$$

Решение этой системы осуществляется предельно просто, если величине $h_{i_1^t t}$ задать некоторое значение, положим, например, $h_{i_1^t t} = 0$. Таким образом, получаем, что полином $h(x_1, \ldots, x_m)$ соответствует некоторому классу эквивалентности, причем матрица H входит в этот класс, а система отношений квазипорядка $\{\underset{t}{\trianglelefteq}\}_{t=1}^{T}$, порождаемая H, совпадает с системой $\{\underset{t}{\leqslant}\}_{t=1}^{T}$. Заметим также, что для $i \in U$

$$\sum_{\ell / i_\ell^t < i} a_\ell^t = h_{it} - h_{i_1^t t} = h_{it}.$$

Определение 4. Матрицу $G = \{g_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$, будем называть квазивыпуклой, если для всякого j при любых $i_1 < i_2 < i_3$ имеет место неравенство $g_{i_2 j} \leq \max\{g_{i_1 j}, g_{i_3 j}\}$

В [II] показано, что полином, соответствующий квазивыпуклой мат-

рице, может быть записан в виде:

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{\ell=t}^{m} a_\ell^t x_t \ldots x_\ell ,$$

где $a_1^m = 0$, $a_\ell^t \geqslant 0$.

Система отношений квазипорядка $\{\underset{t}{\leqslant}\}_{t=1}^{m}$, связанная с данным полиномом является регулярной. Действительно, отношение $\underset{t}{\leqslant}$ следующим образом упорядочивает множество U:

$$t \underset{t}{\leqslant} t+1 \underset{t}{\leqslant} \ldots \underset{t}{\leqslant} m \underset{t}{=} 1 \underset{t}{=} \ldots \underset{t}{=} t-1 .$$

Получаем, таким образом, что квазивыпуклая матрица является регулярной. Приведем пример регулярной матрицы, не являющейся связной и квазивыпуклой. Легко видеть, что матрица

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

не связная и не квазивыпуклая. Полином, соответствующий матрице G, имеет вид:

$$(x_4 + x_3x_4 + x_2x_3x_4) + (x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) +$$
$$+ (x_3 + x_3x_4 + x_1x_3x_4),$$

перепишем его следующим образом:

$$(x_4 + 2x_3x_4 + x_1x_3x_4) + x_2x_3x_4 + (2x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3)$$

Построим теперь матрицу H

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица H - связная, тогда G - регулярная.

§ 3. Задача минимизации регулярного полинома

I°. Рассмотрим задачу минимизации полинома

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^0 x_\ell + \sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^t x_{i_1^t} \ldots x_{i_\ell^t} + F x_1 \ldots x_m$$

такого, что система отношений квазипорядка $\{\underset{t}{\leqslant}\}_{t=1}^{T}$, связанная с полиномом

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^t x_{i_1^t} \ldots x_{i_\ell^t} ,$$

регулярная и $a_\ell^0 < 0$, $a_\ell^T \geqslant 0$, $\ell = 1,\ldots,m-1$; $t = 1,\ldots,T$.

Введем обозначения:

$$f_1(x_1 \dots x_m) = \sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^1 x_{i_1^1} \dots x_{i_\ell^1} + F x_1 \dots x_m ;$$

$$f_t(x_1 \dots x_m) = \sum_{\ell=1}^{m-1} a_\ell^t x_{i_1^t} \dots x_{i_\ell^t}, \quad t=2,\dots,T;$$

$$\mathcal{F}_\tau(x_1 \dots x_m) = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^0 x_\ell + \sum_{t=1}^{\tau} f_t(x_1,\dots,x_m), \quad \tau = 0,\dots,T;$$

$$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\tau(x_1^\tau,\dots,x_m^\tau) = \min_{x_1 \dots x_m} \mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,x_m), \quad \tau = 0,\dots,T.$$

Отметим некоторые простые свойства функций $\mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,x_m)$ и $f_t(x_1,\dots,x_m)$, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

1/ если $x_i = 0$, то $\mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,x_m) \leqslant \mathcal{F}_{\tau-1}(x_1,\dots,x_m) + \sum_{\ell/i_{\ell}^{\tau} \leqslant i} a_\ell^\tau$;

2/ если $x_i = 1$, то $\mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,x_m) \geqslant \mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,1-x_i,\dots x_m) + a_i^0$;

3/ если векторы $(x_1,\dots,x_m)$, $(y_1,\dots,y_m)$ такие, что $x_{i_0} = 0$ и для всех $i \underset{t}{\leqslant} i_0$ $x_i = y_i$, то

$$f_t(x_1,\dots,x_m) = f_t(y_1,\dots,y_m), \quad t=1,\dots,T.$$

Лемма 2. Для всякого $i \in U$ и для любых s, τ, $s<\tau$ имеет место

$$\mathcal{F}_\tau \leqslant \sum_{t=s+1}^{\tau} \sum_{\ell/i_\ell^t \leqslant i} a_\ell^t + \mathcal{F}_s - a_i^0$$

Доказательство. Если $x_i^s = 0$, то

$$\sum_{t=s+1}^{\tau} \sum_{\ell/i_{\ell_t}^t \leqslant i} a_\ell^t + \mathcal{F}_s - a_i^0 > \sum_{t=s+1}^{\tau} \sum_{\ell/i_\ell^t \leqslant i} a_\ell^t + \mathcal{F}_s = \sum_{t=s+2}^{\tau} \sum_{\ell/i_{\ell_t}^t \leqslant i} a_\ell^t +$$

$$+\Big(\sum_{\ell/i_\ell^{s+1} \underset{s+1}{\leqslant} i} a_\ell^{s+1} + \mathcal{F}_s\Big) \geqslant \sum_{t=s+2}^{\tau} \sum_{\ell/i_{\ell_t}^t \leqslant i} a_\ell^t + \mathcal{F}_{s+1}(x_1^s,\dots,x_m^s) \geqslant$$

$$\geqslant \dots \geqslant \mathcal{F}_\tau(x_1^s,\dots,x_m^s) \geqslant \mathcal{F}_\tau$$

Если $x_i^s = 1$, то

$$\mathcal{F}_s(x_1^s,\dots,x_m^s) - a_i^0 \geqslant \mathcal{F}_s(x_1^s,\dots,1-x_i^s,\dots,x_m^s).$$

Тогда получаем

$$\sum_{t=s+1}^{\tau}\sum_{e/i_e^t \underset{t}{<} i} a_e^t + \mathcal{F}_s - a_i^0 \geqslant \sum_{t=s+1}^{\tau}\sum_{e/i_e^t \underset{t}{<} i} a_e^t + \mathcal{F}_s(x_1^s,\dots,1-x_i^s,\dots,x_m^s) \geqslant$$

$$\geqslant \mathcal{F}_\tau(x_1^s,\dots,1-x_i^s,\dots,x_m^s) \geqslant \mathcal{F}_\tau .$$

Лемма доказана.

Рассмотрим вектор $(x_1,\dots,x_m)$ и множество $P=\{i/x_i=0\}$

Лемма 3. Если $i_0\in P$ такой, что для всякого t, $1\leqslant t\leqslant \tau$, найдется $i(t)\in P\setminus\{i_0\}$ для которого $i(t)\underset{t}{\leqslant} i_0$, то

$$\mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,x_m)=\mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,1-x_{i_0},\dots,x_m)-a_i^0$$

В частности, отсюда следует, что вектор $(x_1,\dots,x_m)$ не оптимальный.

Доказательство. В силу свойства 3, имеем $f_t(x_1,\dots,x_m)=f_t(x_1,\dots,1-x_i,\dots,x_m)$, $t=1,\dots,T$.
Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\mathcal{F}_0(x_1,\dots,x_m)=\mathcal{F}_0(x_1,\dots,1-x_{i_0},\dots,x_m)-a_{i_0}^0 .$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Если

$$\mathcal{F}_1(i)=\sum_{e/i_e^1 \underset{1}{<} i} a_e^1+\mathcal{F}_0-a_i^0 ,$$

$$\mathcal{F}_\tau(i)=\sum_{e/i_e^\tau \underset{\tau}{<} i} a_e^\tau+\min\{\mathcal{F}_{\tau-1}(i),\ \mathcal{F}_{\tau-1}-a_i^0\},$$

$$i\in U;\quad \tau=2,\dots,T,$$

то

$$\mathcal{F}_\tau=\min_{i\in U}\{\mathcal{F}_\tau(i)\},\quad \tau=1,\dots,T.$$

Доказательство. В силу определения $\mathcal{F}_\tau(i)$, имеем

$$\mathcal{F}_\tau(i)=\sum_{t=s+1}^{\tau}\sum_{e/i_e^t \underset{t}{<} i} a_e^t+\mathcal{F}_s-a_i^0,\quad 0\leqslant s<\tau ,$$

откуда по лемме 2 получаем $\mathcal{F}_\tau(i)\geqslant\mathcal{F}_\tau$ для любого $i\in U$.
Покажем теперь, что найдется $i_0\in U$ такой, что $\mathcal{F}_\tau(i_0)=\mathcal{F}_\tau$ Рассмотрим оптимальный вектор $(x_1^\tau,\dots,x_m^\tau)$ и множество $P_\tau=\{i/x_i^\tau=0\}$. В силу леммы 3 для каждого $i\in P_\tau$ существует t, $1\leqslant t\leqslant\tau$, такое, что $i\underset{t}{<}k$, для всякого $k\in P_\tau\setminus\{i\}$ Таким образом, каждому $i\in P_\tau$ можно поставить в соответствие $t(i)$, наименьшее из t, с рассмотренным свойством. Пусть теперь $i_0\in P_\tau$ такой, что $t(i_0)=\max_{i\in P_\tau} t(i)$. Покажем, что $i_0\underset{t}{\leqslant} i_1$ для любых $i\in P_\tau\setminus\{i_0\}$ и $t>t(i_0)$. Действительно,

пусть найдутся $i_1 \in P_z \setminus \{i_0\}$ и $t_1 > t(i_0)$ такие, что $i_1 \underset{t_1}{<} i_0$. Имеем, кроме этого, $i_1 \underset{t(i_0)}{>} i_0$ и $i_0 \underset{t(i_1)}{>} i_1$, $t(i_1) < t(i_0)$, но это противоречит предположению о регулярности системы отношений $\{\underset{t}{<}\}_{t=1}^{T}$.
Пусть $S = t(i_0) - 1$, тогда получаем

$$\mathcal{F}_z = \sum_{t=S+1}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_S(x^S_1, \ldots, x^S_m) =$$

$$= \sum_{t=S+1}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_S(x^S_1, \ldots, 1 - x^S_{i_0}, \ldots, x^S_m) - a^0_{i_0}.$$

Последнее равенство справедливо в силу определения $t(i_0)$ и леммы 3. Заметим также, что $\mathcal{F}_S(x^S_1, \ldots, 1 - x^S_{i_0}, \ldots, x^S_m) = \mathcal{F}_S$, поскольку в противном случае по лемме 2 имеем

$$\mathcal{F}_z > \sum_{t=S+1}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_S - a^0_{i_0} \geqslant \mathcal{F}_z .$$

Кроме того, $\mathcal{F}_S - a^0_{i_0} \leqslant \mathcal{F}_S(i_0)$. Действительно, предположив противное, получим

$$\mathcal{F}_z > \sum_{t=S+1}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_S(i_0) = \sum_{t=p+1}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_p - a^0_{i_0} \geqslant \mathcal{F}_z$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_z = \sum_{t=S+2}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \sum_{e/i^{S+1}_{e_{S+1}} < i_0} a^{S+1}_e + \min\{\mathcal{F}_S(i_0), \mathcal{F}_S - a^0_{i_0}\} =$$

$$= \sum_{t=S+2}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_{S+1}(i_0) .$$

Заметим далее, что $\mathcal{F}_{S+q}(i_0) \leqslant \mathcal{F}_{S+q} - a^0_{i_0}$, $q = 1, \ldots, z - S$.

Действительно, в противном случае, используя равенство

$$\mathcal{F}_z = \sum_{t=S+2}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_{S+1}(i_0)$$

по лемме 2 получаем противоречие.
Таким образом

$$\mathcal{F}_z = \sum_{t=S+3}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \sum_{e/i^{S+2}_{e_{S+2}} < i_0} a^{S+2}_e + \min\{\mathcal{F}_{S+1}(i_0), \mathcal{F}_{S+1} - a^0_{i_0}\} =$$

$$= \sum_{t=S+2}^{z} \sum_{e/i^t_{e_t} < i_0} a^t_e + \mathcal{F}_{S+2}(i_0) = \ldots = \sum_{e/i^z_{e_z} < i_0} a^z_e + \mathcal{F}_{z-1}(i_0) =$$

$$= \sum_{e/i^z_{e_z} < i_0} a^z_e + \min\{\mathcal{F}_{z-1}(i_0), \mathcal{F}_{z-1} - a^0_{i_0}\} = \mathcal{F}_z(i_0) .$$

Теорема доказана.

Пусть теперь требуется минимизировать полином $f(x_1,\dots,x_m)$ при ограничении $\sum_{i=1}^{m}(1-x_i)\le M$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_{\tau,k}=\min_{\substack{x_1,\dots,x_m\\ \sum_{i=1}^{m}(1-x_i)\le k}}\mathcal{F}_\tau(x_1,\dots,x_m),$$

$$\tau=1,\dots,T;\quad 0<k\le\min\{\tau,M\}.$$

Повторив рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Если

$$\mathcal{F}_{1,0}(i)=\sum_{e/i_e^1\le i}a_e^1+\mathcal{F}_0-a_1^0,$$

$$\mathcal{F}_{\tau,k}(i)=\sum_{e/i_e^\tau\le i}a_e^\tau+\min\{\mathcal{F}_{\tau-1,k}(i),\mathcal{F}_{\tau-1,k}-a_i^0\},$$

$$i\in U;\quad \tau=2,\dots,T;\quad 0\le k<\min\{\tau,M\},$$

то

$$\mathcal{F}_{\tau,k+1}=\min_{i\in U}\{\mathcal{F}_{\tau,k}(i)\}.$$

2°. Рассмотрим, основанный на теореме 2, алгоритм решения задачи I с регулярной матрицей $G=\{g_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Поскольку задачи I с матрицами из одного класса эквивалентны, то G можно считать связной матрицей, у которой наименьшие элементы каждого столбца равны нулю.

Алгоритм состоит из двух этапов. Первый этап включает в себя T шагов. На τ-м шаге по формуле

$$g_{i\tau}+\min\{\mathcal{F}_{\tau-1}(i),\mathcal{F}_{\tau-1}+g_i^0\}$$

определяем $\mathcal{F}_\tau(i)$ и записываем на место $\mathcal{F}_{\tau-1}(i)$. После этого вычисляем и запоминаем $\mathcal{F}_\tau$ и i_τ, где i_τ такой, что $\mathcal{F}_\tau=\mathcal{F}_\tau(i_\tau)$.

Каждый шаг второго этапа – нахождение элемента оптимального набора U_1. На I-м шаге определяем t_1, $0\le t_1<T$, для которого имеет место

$$\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_T(i_T)=\sum_{t=t_1+1}^{T}g_{i_Tt}+\mathcal{F}_{t_1}+g_{i_T}^0.$$

Предположим, что на p-м шаге определили t_p. Если $t_p\ge 1$, то на $p+1$-м шаге находим t_{p+1} из уравнения

$$\mathcal{F}_{t_p}=\sum_{t=t_{p+1}+1}^{t_p}g_{i_{t_p}t}+\mathcal{F}_{t_{p+1}}+g_{i_{t_p}}^0.$$

Пусть найдены $t_1,\ldots,t_p,\ldots,t_N$, причем $t_N = 0$, тогда оптимальный набор состоит из элементов $i_T, i_{t_1},\ldots,i_{t_{N-1}}$. Приведем оценку трудоемкости вычислений по данному алгоритму, т.е. определим количество элементарных операций /сравнения, сложения и умножения/, а также количество ячеек памяти, затрачиваемых на его реализацию. На каждом шаге первого этапа алгоритма для вычисления $\mathcal{F}_t$ и i_t необходимо не более $4m$ операций сложения и сравнения. Следовательно, на первом этапе производится не более $4mT$ элементарных операций. Нетрудно заметить, что со вторым этапом связано не более $4T$ операций сложения и сравнения. Таким образом, получаем верхнюю оценку для количества элементарных операций, достаточных для реализации алгоритма решения задачи I: $4mT + 4T = 4T(m+1)$. При этом требуется $2T+m$ ячеек памяти.

Последовательность действий, связанная с решением задачи I$'$ та же, что и рассмотренная выше. На t -м шаге первого этапа вычисляем и запоминаем $\mathcal{F}_{t,k}$, $i_{t,k}$. Кроме того, на T -м шаге определяем M^* такое, что

$$\mathcal{F}_{TM^*} = \min_{1\le k\le M} \{\mathcal{F}_{Tk}\} .$$

На p -м шаге второго этапа определяем t_p, для которого имеет место

$$\mathcal{F}_{t_{p-1},M^*_{p+1}} = \sum_{t=t_p+1}^{t_{p-1}} g_{i_{t_{p-1}},t} + \mathcal{F}_{t_p,M^*_p} + g^0_{i_{t_{p-1}}} .$$

По аналогии с предыдущим получаем, что при памяти $M(2T+m)$ для реализации алгоритма необходимо не более $4T(Mm+1)$ элементарных операций.

В заключение автор выражает признательность Н.И.Глебову за ценные замечания и внимание к работе.

Поступила в ред.-изд.отдел
14 декабря 1972 г.

Литература

1. В.Т.Дементьев. Об одной задаче размещения точек на отрезке. "Дискретный анализ", Новосибирск, 1965, вып.4, стр.23-27.

2. С.И.Зуховицкий, Р.А.Поляк, М.Е.Примак. Об одном классе задач вогнутого программирования. "Экономика и мат.методы", 1968 г, т.IV, вып.3, стр. 431-443.

3. М.И.Веркович. Задачи стандартизации и некоторые методы их решения. "Экономика и мат.методы", 1969, т.V, вып.2, стр.285-299.

4. Ю.В.Чуев. Методика выбора оптимальных рядов технических устройств. "Стандарты и качество", М., 1969, 7.

5. Efroymson M.F., Ray T.L. A branch - bound algorithm for plant location.-Operat.Res., 1966, 14, p.361-368.

6.Sa.G.Branch-bound and approximate solution to the capacitated plant-location problem.-Operat.Res.,1969,I7,N 6;p.I005-I0I6.

7.Spielberg K.Algorithms for the simple plant-location problem with some side conditions.-Operat.Res.,1969,I7, N I, p. 85-III.

8. Э.Х.Гимадутдинов. О свойствах решений одной задачи оптимального размещения точек на отрезке. "Управляемые системы", Новосибирск, I969, вып.2, стр.77-9I.

9. Э.Х.Гимади. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. "Управляемые системы", Новосибирск, I970, вып.6, стр. 57-70.

I0. Э.Х.Гимади, В.Т.Дементьев. О методах решения некоторых задач оптимизации параметрических рядов. "Стандарты и качество",I97I, № I2.

II. В.Л.Береснев. Об одном классе задач оптимизации параметров однородной технической системы. "Управляемые системы", Новосибирск, I97I, вып.9, стр.65-74.