Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1973 г., выпуск II
УДК.519.I

О СВОЙСТВАХ РАСКРАШЕННЫХ ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ

Г.А.Донец

§ I. Цикломатика и связность бихроматических подграфов

Будем рассматривать плоские триангуляции, вершины которых правильно раскрашены четырьмя красками, то есть никакие две смежные вершины не окрашены одинаково. Обозначим множество цветов через $Z=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Подграф, который образован на множестве вершин цвета s и t, где $s,t\in Z$ и $s\neq t$, назовем бихроматическим и в отличие от данного графа G будем обозначать через G_{st}. Число компонент связности и цикломатическое число такого графа будет обозначать соответственно через $\varkappa(G_{st})$ и $\lambda(G_{st})$.

Рассмотрим теперь плоский граф G типа, изображенного на рис. I, то есть такой, у которого только одна грань является нетреугольной, а весь граф раскрашен четырьмя красками таким образом, что вершины по краям нетреугольной грани принадлежат бихроматическому подграфу. Назовем такой граф мозаикой с внешними цветами δ и γ и обозначим его через $M(\delta,\gamma)$.

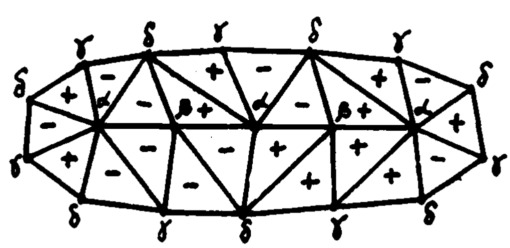

Рис. I

Лемма I. Для всякой мозаики $M(s,t)$ справедливы равенства

$$1/\quad \lambda(G_{st})=\varkappa(G_{uv}), \qquad /1/$$

$$2/\quad \varkappa(G_{st})=\lambda(G_{uv})+1, \qquad /2/$$

где $\{s,t\}\cup\{u,v\}=Z$.

Первое равенство для $\lambda(G_{st})=1$ очевидно. Пусть будет оно справедливо для $\lambda(G_{st})=z\ (z\geqslant 1)$. Докажем его для $\lambda(G_{st})=z+1$. Выделим в подграфе G_{st} такой цикл, внутри которого находится только одна компонента подграфа G_{uv}. Удалим все вершины и смежные с ними ребра, принадлежащие внутренней части этого цикла. Поскольку цикл бихроматический, он содержит четное число вершин. Путем соответствующего склеивания одинаково окрашенных вершин можно цикл превратить в бихроматическую цепь. Для полученной мозаики $M'(s,t)$ справедливо $\lambda'(G_{st})=z=\varkappa'(G_{uv})$. Но $\varkappa'(G_{uv})=\varkappa(G_{uv})-1$, откуда и следует равенство /1/. Второе равенство можно получить, если к мозаике $M(s,t)$ добавить внешний цикл с цветами u и v. Тогда для $M(u,v)$ справедливо

$$\lambda'(G_{uv})=\varkappa'(G_{st})=\varkappa(G_{st}).$$

Но $\lambda'(G_{uv})=\lambda(G_{uv})+1$, что и дает соотношение /2/.

Следствие. В раскрашенной плоской триангуляции имеет место равенство

$$\varkappa(G_{st})=\lambda(G_{uv})+1, \qquad /3/$$

где $\{s\}\cup\{t\}\cup\{u\}\cup\{v\}=Z$.

Это следует из того, что любую раскрашенную плоскую триангуляцию, в которой $\lambda(G_{st})\neq 0$ для каких-нибудь $s\neq t$, можно разбить на две мозаики $M(s,t)$ и $M'(s,t)$, имеющие лишь общий бихроматический цикл. Если же $\lambda(G_{st})=0$ для любых s и t, то равенство /3/ очевидно.

Пусть число вершин и ребер бихроматического подграфа G_{st} будет соответственно равно $n(G_{st})$ и $m(G_{st})$, а число вершин и ребер мозаики $M(s,t)$ равно n и m. Выведем ряд соотношений между этими величинами. Нетрудно подсчитать, что $m=3n-k-3$, где k -число вершин внешней грани. Число треугольных граней мозаики равно $2n-k-2$. Это следует из того, что мозаику путем добавления $(k-3)$ ребер, соединяющих внешние вершины, можно превратить в плоскую триангуляцию, для которой число ребер равно $3n-6$, а число треугольных граней $2n-6$. С другой стороны, каждое ребро подграфов G_{st} и G_{uv} является основанием двух треугольных граней /за исключением внешнего цикла цвета s и t, каждое ребро которого является основанием только одной треугольной грани/. Поэтому

$$2[m(G_{st})+m(G_{uv})]-k=2n-k-2,$$

откуда следует, что

$$m(G_{st})+m(G_{uv})=n-1. \qquad /4/$$

Путем добавления $(k/2)$ вершин цвета u и соответствующего соединения ребер можно получить из исходной мозаики $M(s,t)$ новую мозаику $M'(s,u)$, для которой запишем равенство /4/

$$m'(G_{su})+m'(G_{tv})=n'-1.$$

Возвращаясь к исходной мозаике, получим

$$m(G_{su})+m(G_{tv})=n-\frac{k}{2}-1, \qquad /5/$$

$$m(G_{sv})+m(G_{tu})=n-\frac{k}{2}-1. \qquad /6/$$

Для любых бихроматических подграфов применим известное тождество

$m(G_{st})=n(G_{st})+\lambda(G_{st})-\varkappa(G_{st})$. При этом учтем, что $n(G_{st})+n(G_{uv})=$ $=n$. В результате получим новые соотношения для $M(s,t)$:

$$[\varkappa(G_{st})-\lambda(G_{st})]+[\varkappa(G_{uv})-\lambda(G_{uv})]=1, \qquad /7/$$

$$[\varkappa(G_{su})-\lambda(G_{su})]+[\varkappa(G_{tv})-\lambda(G_{tv})]=\frac{k}{2}+1, \qquad /8/$$

$$[\varkappa(G_{sv})-\lambda(G_{sv})]+[\varkappa(G_{tu})-\lambda(G_{tu})]=\frac{k}{2}+1. \qquad /9/$$

На основании этих равенств, а также равенства /4/ легко доказывается следующая

Лемма 2. Для раскрашенной плоской триангуляции справедливы равенства

1/ $m(G_{st})+m(G_{uv})=n-2$, /10/

2/ $[\varkappa(G_{st})-\lambda(G_{st})]+[\varkappa(G_{uv})-\lambda(G_{uv})]=2$, /11/

где $\{s\}\cup\{t\}\cup\{u\}\cup\{v\}=Z$.

Второе равенство следует также и из /3/.

§ 2. Четность раскраски плоской триангуляции

Известно /см. [I]/, что раскраска плоской триангуляции четырьмя красками сводится к решению системы уравнений:

$$\sum_{i\in M_\alpha} x_i \equiv 0 (mod 3), \quad \alpha\in K, \qquad /12/$$

$$x_j=\pm 1, \quad j=1,2,\dots,2n-4, \qquad /13/$$

где M_α - множество треугольных граней, инцидентных вершине α, а K - множество вершин. Каждому решению системы /12-13/ соответствует единственная раскраска графа /с точностью до фиксации раскраски одного треугольника/, и наоборот. Если получена какая-либо раскраска, то соответствующее решение системы /12-13/ можно получить следующим образом: 1/ присваиваем /отмечаем/ произвольной треугольной грани /соответственно переменной x_i / значение /+1/ ; 2/ выбираем неотмеченную грань, имеющую общее ребро с отмеченной гранью. Если вершины, противолежащие этому ребру, окрашены одинаковым цветом, присваиваем выбранной грани знак, противоположный знаку соседней грани, иначе присваиваем такой же знак. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все грани будут отмечены. Рассмотрим для данного решения выражение

$$p=(-1)^{\varepsilon}=\prod_{i=1}^{2n-4} x_i .$$

В зависимости от того, какое значение принимает p, ε может быть четным или нечетным. Назовем соответствующую раскраску четной или нечетной. Ограничимся значениями ε равными 0 или 1 и будем говорить, что четность раскраски равна в соответствующих случаях

0 или I. Будем называть элементарной перекраской следующую операцию: выбираем одну компоненту подграфа G_{st} $(s \neq t)$ и меняем в ней цвета s и t местами.

Лемма 3. Элементарная перекраска не изменяет четности раскраски графа.

Для доказательства выделим какую-либо компоненту подграфа G_{st} и рассмотрим подграф графа G, включающий эту компоненту и все вершины цвета u и v, смежные с вершинами этой компоненты. Это будет либо мозаика $M(u,v)$, как на рис. I, либо граф, как на рис. 2, где $s=\alpha$, $t=\beta$. Этот граф можно дополнить до мозаики $M(\delta,\gamma)$, если внутри каждой заштрихованной грани поместить вершину цвета α и соединить ее с вершинами по краям грани. Так как число граней любой мозаики равно $N=2n-k-2\equiv 0 (mod\, 2)$, ибо k - четное число, то и наш исходный граф имеет четное число граней. Из рисункой видно, что элементарная перекраска приводит к замене всех знаков на противоположные. Поэтому после перекраски

$$\rho'=(-1)^{\varepsilon'}=\rho(-1)^{N}=\rho \qquad \varepsilon'\equiv\varepsilon (mod\, 2),$$

что и требовалось доказать.

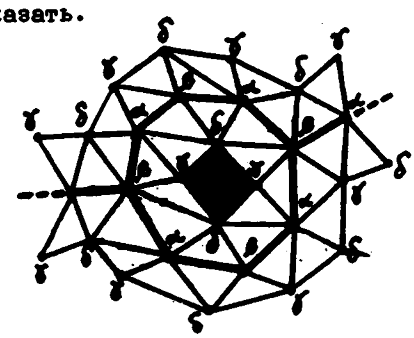

Рис. 2.

Примечание. Нетрудно заметить, что при выделении компоненты подграфа G_{st} и окружающих ее вершин цвета u и v последние могут повторяться, так что мозаика получится лишь после того, как эти вершины будут "разрезаны", однако на подсчет граней это обстоятельство не влияет.

Теорема. Четность раскраски плоской триангуляции есть величина постоянная и сравнима с числом ее вершин.

Выделим в раскрашенной плоской триангуляции одну компоненту подграфа G_{st} и рассмотрим подграф, образованный вершинами этой компоненты и смежными с ними вершинами цвета u и v /рис.I и 2/. Очевидно, что множество граней этого подграфа можно разбить на несколько циклических непересекающихся последовательностей, в которых каждая следующая грань смежна с предыдущей через ребро, один конец которого окрашен в цвет u или v, а другой - в цвет s или t /на рис.I грани образуют только одну такую последовательность/. Рассмотрим одну из таких последовательностей, в которой число граней обозначим через N. Каждая грань в такой последовательности имеет основанием ребро либо из подграфа G_{st}, либо из подграфа G_{uv}. Обозначим их число соответственно через $N(s,t)$ и $N(uv)$. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$N(st) \equiv N(u,v) (mod 2) \equiv 0 (mod 2).$$

Сделаем разметку граней знаками /+I/ и /-I/ соответственной с системой /I2-I3/. Пусть число граней со знаком /-I/ и входящих в число $N(st)$ равно x, а соответствующее число граней, входящих в $N(uv)$, равно y. Сумма всех знаков для граней, входящих в число $N(st)$, равна $N(st)-2x$. Рассмотрим последовательность знаков, соответствующую последовательности всех граней и выделим в ней отрезок, соответствующий отрезку последовательности между двумя ближайшими гранями, имеющих основанием ребро из подграфа G_{st}. Нетрудно заметить, что если знаки этих граней совпадают, то сумма отрезка равна соответствующему знаку этих граней, если знаки граней различны, то сумма отрезка равна нулю. Таким образом, $N(uv)-2y = N(st)-2x$. Сумма всей последовательности знаков, равна в этом случае

$$S = 2N(st) - 4x.$$

Но $N(st) = 2\ell$, где ℓ - натуральное число, поэтому $S = 4(\ell - x)$.

Примечание. Интересно, что об аналогичном факте имеющем место для плоской триангуляции, а именно, что $\sum x_i \equiv 0 (mod 4)$, где i пробегает множество всех граней, сообщил автору Э.Г.Велага, заметка которого вскоре будет опубликована [2]. Таким образом, сумма всех знаков для раскрашенной плоской триангуляции равна $4r$ / r - целое число/. Пусть число граней, имеющих знак /-I/ равно k_1, а соответствующее число граней со знаком /+I/ равно k_2, тогда эти числа удовлетворяют системе уравнений

$$k_1 + k_2 = 2n - 4,$$
$$k_2 - k_1 = 4r.$$

Четность раскраски плоской триангуляции определяется из соотношения $\mathcal{E} \equiv k_1 (mod 2)$. Но из системы находим $k_1 = n - 2(r+1)$. Поэтому $\mathcal{E} \equiv n (mod 2)$, что и требовалось доказать.

Этот результат может родить мысль о том, что все раскраски плоской триангуляции можно получить путем элементарных перекрасок, однако простой пример опровергает это утверждение. Ниже приводится матрица инцидентности графа из 8 вершин и две его раскраски, которые не сводятся одна к другой путем элементарных перекрасок:

γ	γ	0	I	I	I	0	I	0	I
α	α	I	0	I	I	I	0	0	0
β	β	I	I	0	0	I	0	I	I
β	δ	I	I	0	0	I	I	0	0
δ	γ	0	I	I	I	0	I	I	0
α	β	I	0	0	I	I	0	I	I
γ	δ	0	0	I	0	I	I	0	I
δ	α	I	0	I	0	0	I	I	0

Поступила в ред.-изд.отдел
18 апреля 1972 г.

Литература

1. Г.А.Донец, Н.З.Шор. Алгебраический подход к исследованию задачи о 4-х красках. Сб. "Теория оптимальных решений", Изд-во ИК АН УССР, вып.I /1967/.

2. Э.Г.Велага. К раскраске плоского графа, УМН, № 3 /1972/.