Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.519.95

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУКЦИЙ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. I

Ю.М.Волин /Москва/

Формулируется подход к получению необходимых условий оптимальности для обобщенных решений задачи оптимизации. Существенной особенностью подхода является использование метода штрафных функций и введение в рассмотрение обобщенных необходимых условий оптимальности.

Пусть рассматривается задача оптимизации:

$$J(u) \longrightarrow max, \qquad /1/$$

$$u \in U \subset B_u \qquad /2/$$

$$F(u)=0 \quad (F(u) \in B_F), \qquad /3/$$

где B_u, B_F - банаховы пространства.

$$J(u) < C \quad (u \in U). \qquad /4/$$

Разбиение условий, задающих множество возможных значений u, на котором ищется максимум функционала $J(u)$, на два вида /2/ и /3/ является условным и связано с особенностями способ получения необходимых условий оптимальности по методу штрафных функций. Целесообразно это разбиение производить таким образом, чтобы непосредственное получение необходимых условий оптимальности для задачи /1/, /2/ было существенно проще, чем для полной задачи /1/ - /3/. Обычно в задачах оптимального управления такое разбиение осуществляется достаточно естественным образом. При этом под U понимается множество допустимых управлений, а условиями /3/ являются дополнительные краевые условия задачи.

Обобщенным решением системы /2/, /3/ назовем последовательность $\{u^{(k)}\}$, такую, что

$$u^{(k)} \in U \quad (k=1,2,\dots); \; F(u^{(k)}) \longrightarrow 0, \; k \longrightarrow \infty. \qquad /5/$$

Пусть $\mathfrak{A}$ - множество обобщенных решений /2/, /3/. Множество обычных решений системы /2/, /3/ естественным образом вкладывается в $\mathfrak{A}$, если каждое обычное решение отождествить со стационарным обобщенным решением $\{u^{(k)}=u\}$.

Определим

$$J(\{u^{(k)}\}) = \overline{\lim_{k \to \infty}} \; J(u^{(k)}), \qquad /6/$$

$$\bar{\bar{J}} = \sup_{\{u^{(k)}\} \in \mathfrak{A}} J(\{u^{(k)}\}), \qquad /7/$$

$\bar{\bar{\mathcal{J}}}$ существует и конечен /в силу /4//. Будем называть $\{u^{(k)}\}$ обобщенным решением задачи /I/ - /3/, или обобщенно-максимизирующей последовательностью, если

$$\{u^{(k)}\}\in \mathfrak{A},\ \bar{\bar{\mathcal{J}}} = \lim \mathcal{J}(u^{(k)}),\ k\to\infty. \qquad /8/$$

Обобщенное решение задачи /I.I/ - /I.3/ существует, если $\mathfrak{A} \neq \phi$. Обобщенные решения имеют, в известном смысле, лучшее физическое обоснование, чем классические. Поэтому рассмотрение задачи оптимизации в обобщенной постановке вполне правомерно.

Предположим, что для обобщенных решений задачи /I/, /2/ известных необходимые условия оптимальности, которые обычно могут быть в следующем обобщенном виде:

$$P_{\mathcal{J}}(u^{(k)})\to 0,\quad k\to\infty, \qquad /9/$$

где $P_{\mathcal{J}}(u)$ - некоторый неотрицательный функционал, определенный на множестве U.

Для задачи оптимального управления, например, необходимое условие оптимальности для обобщенных решений имеет форму обобщенного принципа максимума /см. приложение/:

$$\int_0^T (\sup_{u\in U} H(x^{(k)},\psi^{(k)},u)-H(x^{(k)},\psi^{(k)},u^{(k)}))dt\to 0,\ k\to\infty. \qquad /10/$$

Ниже излагается подход, позволяющий осуществить "перенос" условий /9/ для задачи /I/, /2/ на полную задачу оптимизации /I/ - /3/. Данная работа ограничивается при этом случаем стационарных обобщенных решений.

Пусть $\bar{\bar{u}}$ - обобщенное решение. Введем в рассмотрение функционал

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta}(u)=\mathcal{J}(u)-\frac{\alpha}{2}\|F(u)\|^2-\beta\|u-\bar{\bar{u}}\|^2,\ \alpha,\beta \geqslant 0. \qquad /11/$$

Пусть $\{u_{\alpha\beta}^{(m)}\}$ - обобщенное решение задачи /II/, /2/ и

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(m)}=\|u_{\alpha\beta}^{(m)}-\bar{\bar{u}}\|;\ \gamma_{\alpha\beta}=\lim_{m\to\infty}\gamma_{\alpha\beta}^{(m)}\quad(\gamma_{\alpha\beta}\geqslant 0). \qquad /12/$$

Л е м м а I. При $\beta > 0$

$$\gamma_{\alpha\beta}\to 0,\quad \alpha\to\infty. \qquad /13/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть /13/ не выполняется. Тогда существует $\mathcal{E} > 0$ и последовательности $\{\alpha_k\}$ $(\alpha_k\to\infty, k\to\infty)$ $\{S_k\}$ такие, что $\gamma_{\alpha_k\beta}^{(m)} > \mathcal{E}$ при $m > S_k$. Пусть $\mathcal{E}_k\to 0$, $k\to\infty$ $(\mathcal{E}_k > 0)$. По определению $\{u_{\alpha\beta}^{(m)}\}$ существует $\{\nu_k\}$ такая, что $\nu_k > S_k$ и $\mathcal{J}_{\alpha_k\beta}(u_{\alpha_k\beta}^{(\nu_k)}) \geqslant \bar{\bar{\mathcal{J}}}-\mathcal{E}_k$.

Пусть $\bar{u}^{(k)}= u_{\alpha_k\beta}^{(\nu_k)}$. Имеем

$$\mathcal{J}(\bar{u}^{(k)}) \geqslant \bar{\bar{\mathcal{J}}} - \varepsilon_k + \beta\varepsilon^2. \qquad /14/$$

С другой стороны /см. /14//, $0{,}5\alpha_k \|F(\bar{u}^{(k)})\|^2 \leqslant C + \varepsilon_k - \bar{\bar{\mathcal{J}}}$,откуда $\|F(\bar{u}^{(k)})\| \to 0$, $k \to \infty$. Следовательно, $\{\bar{u}^{(k)}\} \in \mathfrak{A}$, при этом, в силу /14/, $\mathcal{J}(\{\bar{u}^{(k)}\}) \geqslant \bar{\bar{\mathcal{J}}} + \beta\varepsilon^2$, что противоречит определению $\bar{\bar{u}}$.

Л е м м а 2. Существуют $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ $(\alpha_k \to \infty$,$\beta_k \to 0$, $k \to \infty)$, $\{\tilde{u}^{(k)}\}$ такие, что

$$\|\tilde{u}^{(k)} - \bar{\bar{u}}\| \to 0,\ \rho_{\mathcal{J}_{\alpha_k\beta_k}}(\tilde{u}^{(k)}) \to 0,\ k \to \infty. \qquad /15/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta_k \to 0$,$\varepsilon_k \to 0 (\beta_k, \varepsilon_k > 0)$. В силу /9/, /13/, существуют $\{\alpha_k\}$ $(\alpha_k \to \infty$, $k \to \infty$) , $\{m_k\}$ такие, что

$$\gamma_{\alpha_k\beta_k} < 0{,}5\varepsilon_k,\ |\gamma^{(m_k)}_{\alpha_k\beta_k} - \gamma_{\alpha_k\beta_k}| < 0{,}5\varepsilon_k , \qquad /16/$$

$$\rho_{\mathcal{J}_{\alpha_k\beta_k}}(u^{(m_k)}_{\alpha_k\beta_k}) < \varepsilon_k \qquad /17/$$

Пусть $\tilde{u}^{(k)} = u^{(m_k)}_{\alpha_k\beta_k}$. Из /16/ $\|\tilde{u}^{(k)} - \bar{\bar{u}}\| \leqslant \varepsilon_k$, откуда с учетом /17/ немедленно вытекает утверждение леммы.

Пусть далее $\rho(u,\alpha,\beta) = \rho_{\mathcal{J}_{\alpha\beta}}(u)$, $\rho(u,\alpha) = \rho(u,\alpha,0)$ и для $\rho(u,\alpha,\beta)$ выполнена оценка /условие I° /:

$$|\rho(u,\alpha,\beta) - \rho(u,\alpha)| \leqslant K\beta. \qquad /18/$$

Предположим, что существует оператор $\Lambda_F(u,\alpha)$, отображающий множество $U \subset B_u$ в банахово пространство B_Λ , и неотрицательный функционал $Q(u,\Lambda)$, причем выполнено:

$$\|\Lambda_F(u,\alpha)\| \geqslant a > 0 , \qquad /19/$$

$$Q(u,\rho\Lambda) = \rho Q(u,\Lambda) , \qquad /20/$$

$$Q(u,\Lambda_F(u,\alpha)) = \rho(u,\alpha) . \qquad /21/$$

Т е о р е м а I. /Первая формула обобщенного условия оптимальности для задачи /I/ - /3//. При выполнении условия I для обобщенного решения $\bar{\bar{u}}$ задачи /I/ - /3/ существуют $\{\Lambda^{(k)}\}$, $\{\tilde{u}^{(k)}\}$ такие, что

$$\|\tilde{u}^{(k)} - \bar{\bar{u}}\| \to 0 , \qquad /22/$$

$$k \to \infty ,$$

$$Q(\tilde{u}^{(k)}, \Lambda^{(k)}) \to 0 , \qquad /23/$$

$$\|\Lambda^{(k)}\| \geqslant a > 0 . \qquad /24/$$

Теорема есть непосредственное следствие леммы 2.

Пусть далее для $Q(u,\Lambda)$ имеет место оценка /условие 2°/:

$$|Q(u',\Lambda)-Q(u'',\Lambda)|\leq R(u',u'') \qquad /25/$$

и $R(u',u'')\to 0$ при $\|u'-u''\|\to 0$ равномерно по $u',u''\in U$, $\Lambda\in S_\Lambda$ $(S_\Lambda=\{\Lambda:\ \|\Lambda\|\leq 1\})$.

Теорема 2 /вторая форма обобщенного условия оптимальности задачи /I/ - /3//. При выполнении условий I, 2 для обобщенного решения задачи /I/ - /3/ существует последовательность $\{\Lambda^{(k)}\}$ такая, что

$$Q(\bar{u},\Lambda^{(k)})\to 0,\quad k\to\infty, \qquad /26/$$

$$\|\Lambda^{(k)}\|=1 \qquad /27/$$

Для доказательства теоремы достаточно от последовательности $\{\Lambda^{(k)}\}$, при которой выполняются утверждения теоремы I, перейти к последовательности $\bar{\bar{\Lambda}}^{(k)}=\Lambda^{(k)}/\|\Lambda^{(k)}\|$ и воспользоваться соотношением /20/ и условием 2.

Приложение

Теорема 3. Пусть $\{u^{(k)}(\cdot)\}$ - обобщенное решение задачи

$$\mathcal{J}(u(\cdot))=\varphi_0(x_T)\to\max,\quad \frac{\partial x}{\partial t}=f(x,u),\ t\in D=[0,T],$$
$$x(0)=x_0,\ u(\cdot)\in\quad (x_T=x(T)), \qquad /28/$$

$u(\cdot)\in U\equiv u(t)+U(t\in D)$, U - ограниченное множество и $u(\cdot)$ измерима. Тогда выполняется условие /10/, где $\varphi^{(k)}(\cdot)$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-H_x,\ H=\varphi^T f,\quad \varphi(T)=\varphi_{0x_T}, \qquad /29/$$

Доказательство. Для $u(\cdot)$, $\bar{u}(\cdot)$ имеет место, как нетрудно показать, оценка:

$$\mathcal{J}(\bar{u})-\mathcal{J}(u)=\int_0^T(H(x,\varphi,\bar{u})-H(x,\varphi,u))dt+o(\mu_M) \qquad /30/$$

$$\mu_M=\mu(M),\quad M=\{t\in D:\ u(t)\neq\bar{u}(t)\}.$$

Пусть

$$\bar{H}(x,\varphi)=\sup_{u\in U}H(x,\varphi,u) \qquad /31/$$

$$M^{\varepsilon}_{H,u}=\{t\in D:\ H(x(t),\varphi(t),u(t))<\bar{\bar{H}}(x(t),\varphi(t))-\varepsilon \qquad /32/$$

$$\mu^{\varepsilon}_{H,u}=\mu(M^{\varepsilon}_{H,u})- \text{мера}\quad M^{\varepsilon}_{H,u}. \qquad /33/$$

Покажем, что для всех $\varepsilon > 0$ $\mu^{\varepsilon}_{H,u^{(k)}} \to 0$, $k \to \infty$ /откуда, как легко видеть, вытекает справедливость /10//. Пусть данное утверждение не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $\delta_1 > 0$ и $\{k_z\}$ $(k_z \to \infty)$, для которых $\mu^{\varepsilon}_{H,u^{(k_z)}} > \delta_1$. Пусть δ_2 выбрано таким, что $|O(\mu_M)| < 0{,}1\varepsilon\mu_M$ при $\mu_M < \delta_2$ и $2\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$. Очевидно, что при каждом z можно построить $\tilde{u}^{(z)}(\cdot) \in U$ так, чтобы выполнялось:

$$H(x^{(k_z)}(t), \psi^{(k_z)}(t), \tilde{u}^{(z)}(t)) > \bar{H}(x^{(k_z)}(t), \psi^{(k_z)}(t)) - \varepsilon/2, \; t \in M_z;$$

$$\tilde{u}^{(z)}(t) = u^{(k_z)}(t), \quad t \notin M_z,$$

где $M_z \subset \mu^{\varepsilon}_{H,u^{(k_z)}}$, $\delta < \mu(M_z) < 2\delta$. Имеем: $J(\tilde{u}^{(z)}(\cdot)) > J(u^{(k_z)}(\cdot)) + 0{,}3\varepsilon\delta > 0$, что противоречит определению $\{u^{(k)}(\cdot)\}$ как обобщенного решения задачи /28/.

Поступила в ред.-изд.отдел
25 мая 1972 г.