Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 12.
УДК.519.95.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Р.М.Ларин, В.М.Яковлев

Большинство работ по теории непрерывных управляемых процессов, выполненных и выполняемых в отделении кибернетики Института математики СО АН СССР, связано с конкретными задачами, возникшими из приложений. Поэтому зачастую процесс описывается специфическими обыкновенными дифференциальными уравнениями со специальными ограничениями. Это позволяет провести более глубокое теоретическое исследование изучаемых задача и выявить те свойства решений, которые в общем случае или отсутствуют, или не поддаются детальному исследованию.

Наряду с качественными исследованиями задач оптимального управления, большое внимание уделяется построению и исследованию эффективных вычислительных алгоритмов. Лабораторией, возглавляемой В.В.Леоновым, выполнен ряд важных работ в этой области. Основная часть из них посвящена многошаговым процессам и рассматривается в обзоре [8].

Среди работ по качественной теории оптимальных процессов следует назвать работы, выполненные В.М.Яковлевым.

В работе [2] "К задаче оптимального быстродействия" изучается связь задачи об оптимальном быстродействии с задачами, в которых время фиксировано.

Вводится в рассмотрение функционал

$$R(x(T))=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i(T)-x_{1i})^2},$$

где $x_1=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n})$- заданная конечная точка. Этот функционал должен быть минимизирован при фиксированном времени T, определяющем длительность процесса.

Задача быстродействия будет решена, если будет найден самый левый нуль функции

$$r(T)=\min_{u\in v} R(x(T)).$$

Исследованы случаи, при которых функция $r(T)$ имеет интервал нулей.

Работа [4] посвящена исследованию структуры областей управляемости линейных систем на плоскости. Вводится понятие ℓ - траекторий, которые используются при построении областей управляемости. Рассмотрены различные случаи корней матрицы коэффициентов системы. Построены области управляемости для всех возможных случаев.

В частности, для случая комплексных корней доказано, что ℓ^+ - траектория имеет предельный цикл.

К реботе [4] близко примыкает работа [5] , в которой строится достижимая за заданное время область для системы

$$\frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i + U_i, \quad x_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

при ограничениях на управления

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(t) = 1, \quad U_i(t) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эта задача тесно связана с конкретными приложениями и представляет самостоятельный интерес. Для границ области достижимости здесь получены конечные формулы. Решение этой задачи позволило эффективно решать задачи оптимального управления с терминальными функционалами вида $R(x(T))$.

Интересная задача была рассмотрена Е.А.Ковалевым [7] . Пусть необходимо найти

$$z(T) = \max_{u \in \Omega} c \cdot x(t)$$

при уловиях

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad x(0) = x_0$$

и $u(t) \in \Omega$, где Ω - замкнутое и выпуклое множество в E_m .

Далее рассматривается задача A отыскания такого $T \in [0, \infty]$ и соответствующего $u(t)$, при котором достигается

$$\max_{T \geq 0} \frac{z(T)}{T + \tau_0},$$

где $\tau_0 > 0$ задано. Приводятся различные условия, налагаемые на правые части управляемой системы, при которых задача A имеет решение.

Приближенным методам решения задач оптимального управления посвящены работы [I] , [3] и [6] .

В работе [I] исследован вопрос о возможности применения локальных алгоритмов для нахождения оптимальных процессов. Указано несколько нелокальных алгоритмов, для которых даны оценки переборов. Доказана сходимость последовательных приближений искомого управления.

Методу последовательных приближений посвящена также работа [3], в которой исследуется задача о нахождении скалярных функций $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $y(t)$ $(t \in [0, T])$, удовлетворяющих условиям:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad u^2 + v^2 \leq 1; \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

доставляющих минимум функционалу $\int_0^T f(x, y)\, dt$.

При довольно общих условиях, налагаемых на функцию $f(x, y)$ и ее частные производные первого порядка, методом последовательных приближений ищется решение системы $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$, где правые части с по-

мощью принципа максимума Л.С.Понтрягина выражаются через известную функцию $f(x, y)$.

Доказаны теоремы о сходимости последовательных приближений к решению и теорема о единственности и непрерывности получаемого таким образом решения. Эти результаты без изменений переносятся на случай системы n -го порядка.

В работе [3] существенным является использование соотношений принципа максимума. Как известно, условия этого принципа являются только необходимыми для систем общего вида.

В работе [6] В.В.Леоновым на конкретных примерах показываются трудности, связанные с применением принципа максимума для нахождения максимума функционала $c \cdot x(T)$ при условиях, что

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} f_{ji}(x) u_j, \qquad x(0) = x_0, \qquad u(t) \in V,$$

где V - замкнутая выпуклая область из E_m. Показано, что итерационные методы решения этой задачи с помощью принципа максимума в общем случае не сходятся, а если и сходятся, то не обязательно к решению задачи. Поэтому была предпринята попытка построить прямой метод приближенного решения задачи на оптимум.

В 1962 году В.В.Леоновым был предложен метод динамической $(K_1, \dots, K_s)$ - хотомии, который является обобщением метода дихотомии. С помощью этого метода был решен ряд прикладных задач, решение которых другими известными методами оказалось невозможным.

Во второй части работы [6] излагается общая схема динамической $(K_1, \dots, K_s)$- хотомии и приводятся оценки трудоемкости этого алгоритма, показывающего его эффективность.

Поступила в ред.-изд.отдел
25.I.1974 г.

Литература

1. В.В.Леонов. О вычислительных методах построения оптимальных процессов. - В кн.: Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Москва, 1964.

2. В.М.Яковлев. К задаче оптимального быстродействия.- В кн.: Дискретный анализ.Новосибирск, 1965. вып. 4.

3. В.В.Леонов. О численном решении с помощью метода Л.С.Понтрягина одного класса задач на оптимум."Кибернетика", Киев, 1965,№ 6.

4. В.М.Яковлев. Структура областей управляемости линейных управляемых систем второго порядка. - "Кибернетика", Киев, 1967. № 4.

5. В.М.Яковлев. Построение достижимой области для одной линейной системы при совместном ограничении на управляющие функции. - - Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, вып. 13.

6. В.В.Леонов. Метод динамической $(K_1, \dots, K_s)$ - хотомии решения задачи на оптимум. - В кн.: Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, вып. 13.

7. Е.А.Ковалев. Об одном классе задач на оптимум для непрерывных управляемых процессов. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1969, вып. 2.

8. В.В.Леонов. Исследования по теории управляемых многошаговых процессов. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1974. вып. 12.