Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1974 г. выпуск 12
УДК.519.95.

О СТРУКТУРЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ОБЩИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Н.Л.Григоренко (Москва)

1. Пусть дифференциальная игра описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(z)u + f(z, v) , \qquad /1/$$

где $A(z)$ - матрица размерности $n \times k, z \in R^n, u \in R^k, v \in R^l$. Вектор u находится в распоряжении догоняющего, вектор v - в распоряжении убегающего. В R^n задано замкнутое множество B, не совпадающее со всем R^n, называемое терминальным. Движение вектора z /см[1]/ начинается из положения $z(0) = z_0$. Догоняющий стремится вывести точку $z(t)$ на B. Убегающий стремится воспрепятствовать этому. Для достижения своих целей догоняющий и убегающий используют измеримые управления $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие при $0 \le t < +\infty$ ограничениям:

$$\int_0^{+\infty} M(|u(s)|)ds \le \mu_0 , \qquad /2/$$

$$\int_0^{+\infty} \Phi(|v(s)|)ds \le \nu_0 , \qquad /3/$$

где $M(y)$ - N - функция, определенная на $(-\infty, \infty)$ /см.[2]/, то есть

$$M(y) = \int_0^{|y|} p(t)dt , \qquad /4/$$

$p(t)$ - положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \ge 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:

$$p(0) = 0 , \qquad p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty ;$$

$\Phi(y)$ - непрерывная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\Phi(y)}{y} = \infty ;$$

$|u(s)|$, $|v(s)|$ - евклидовы нормы векторов $u(s)$, $v(s)$.

/Отметим, что для приложений, в частности, представляет интерес $M(y) = |y|^{\lambda_1}$, $\Phi(y) = |y|^{\lambda_2}$, где $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 > 1$ /.

Следуя работе [1], будем считать, что дифференциальная игра /1/ происходит следующим образом. При $t = 0$ убегающий сообщает догоняющему свое управление $v(t)$ на некотором ненулевом отрезке времени ε_1, причем величину $\varepsilon_1 > 0$ убегающий выбирает по своему усмотрению. Предполагается, что догоняющий знает z_0, μ_0, ν_0. По этой информации догоняющий строит свое управление на том же отрезке времени. По истечении времени ε_1 убегающий в момент $t=\varepsilon_1$ вновь сообщает ненулевой отрезок ε_2 и свое управление на нем и т.д.

Таким образом, в каждый момент времени догоняющий знает не все будущее поведение убегающего, а лишь его управление на некотором /вообще говоря, небольшом/ отрезке времени. Описанные стратегии будем называть ε -стратегиями.

Для дальнейшего нам удобно ввести новое евклидово пространство $R^{n+2}=R^n\times R^1\times R^1$, где R^1 - числовая прямая /одновременное евклидово пространство/. Векторы из R^{n+2} будем обозначать буквой X. Начальное состояние дифференциальной игры /I/ характеризуется вектором $X_0=(z_0,\mu_0,\nu_0)$, где $\mu_0\geqslant 0$, $\nu_0\geqslant 0$. Будем говорить, что дифференциальная игра /I/, начинающаяся из точки X_0, может быть закончена за время T на множестве B, если каждой ε -стратегии убегающего догоняющий может сопоставить свою ε -стратегию таким образом, что траектория $z(t)$ системы /I/, соответствующая этим управлениям и вектору X_0, окажется на множестве B не позднее, чем за время T.

Основной целью работы является получение общего метода нахождения всех начальных состояний X_0, из которых игра /I/ может быть закончена на B за конечное время. Этот метод является естественным обобщением метода Б.Н. Пшеничного [I] на игры /I/ с общими интегральными ограничениями /2/, /3/. Отметим, что впервые дифференциальные игры с общими интегральными ограничениями рассматривались М.С.Никольским в работе [3].

Сформулируем необходимые предположения.

П р е д п о л о ж е н и е А. Матричная функция $A(z)$ непрерывна по z на R^n, имеет при всех z непрерывные частные производные по всем n компонентам z_j вектора z; функция $f(z,v)$ непрерывна по совокупности z,v, непрерывно дифференцируема по z, при всех z,v.

П р е д п о л о ж е н и е Б. Для всех $z\in R^n$, $v\in R^l$

$$|A_{ij}(z)|\leqslant k_1(1+|z|), \qquad /5/$$

$$|f(z,v)|\leqslant k_2(1+|z|+|v|+|z|\cdot|v|), \qquad /6/$$

где $A_{ij}(z)$ - произвольный элемент матрицы $A(z)$, $i,j=1,2,\dots n$.

П р е д п о л о ж е н и е В. Существует такое число $y_0\geqslant 0$, что при $y\geqslant y_0$

$$M(y)\leqslant a\Phi(y), \qquad /7/$$

$$M(ly)\leqslant k_3(l)M(y); \qquad /8/$$

при всех $y\geqslant 0$

$$y\leqslant b(1+\Phi(y)), \qquad /9/$$

здесь a,b - положительные величины; $k_3(l)$ - положительная константа, зависящая от l, l - любое число, большее I. Существуют такие $l_0>1$ и $y_1>0$, что при $y\geqslant y_1$

$$2\ell_0 M(y) \le M(\ell_0 y). \qquad /10/$$

З а м е ч а н и е I. В соответствии с книгой [2] из неравенства /8/ следует, что N - функция $M(y)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Из этого условия, в частности, следует, что функция $M(y)$ растет не быстрее некоторой степенной. Условие /10/ является необходимым и достаточным для того, чтобы дополнительная к $M(y)$ N -функция удовлетворяла Δ_2 -условию. При этом в пространстве Орлича L_M^* /см.[2]/ E_N -слабая сходимость совпадает со слабой сходимостью.

Сделаем замечание, принадлежащее М.С.Никольскому.

З а м е ч а н и е 2. В статье [3] по недосмотру было пропущено условие /10/.

Условимся в дальнейшем, буквой k с индексом обозначать константы.

Пусть $\delta > 0$. Из определения функции $M(y)$ /см./4// следует, что $M((1+\delta)y) - M(y) \geqslant 0$ при всёх $y \geqslant 0$.

П р е д п о л о ж е н и е Г. Существует такое $\delta_0 > 0$ и такая функция $g(\delta)$, определенная на отрезке $[0,\delta_0]$, что при всех $y \geqslant 0$, $\delta \in [0,\delta_0]$

$$M((1+\delta)y) - M(y) \le g(\delta)(M(y)+1),$$

причем $g(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Относительно N - функции $M(y)$ известно /см. [2]/, что

$$\lim_{y\to\infty} \frac{M(y)}{y} = \infty. \qquad /11/$$

Отсюда следует, что

$$y \le k_4(1+M(y)) \qquad /12/$$

при $y \geqslant 0$. Отсюда и из неравенства /9/ следует, что для допустимых управлений $u(t), v(t)$ имеют место неравенства:

$$\int_0^\tau |u(s)|ds \le (\tau+\mu_0)k_4, \qquad \int_0^\tau |v(s)|ds \le (\tau+\nu_0)b. \qquad /13/$$

Подставим произвольные допустимые управления $u(t)$, $v(t)$ в уравнение /I/ и поставим вопрос о нелокальной продолжимости решений в классе абсолютно непрерывных функций. Оказывается, можно утверждать, что при сделанных предположениях А и Б решение существует на любом отрезке $[0,T]$. При доказательстве этого факта желательно иметь оценку для решения, показывающую, что на любом конечном отрезке решение ограничено по модулю некоторой константой, зависящей от этого отрезка. Для получения такой оценки можно использовать неравенства /13/, оценки /5/, /6/ и лемму Гронуолла: если $f(t), h(t)$ - неотрицательные непрерывные функции на отрезке $[0,\tau]$, удовлетворяющие неравенству

$$0 \le h(t) \le f(t) + \int_0^t g(s)h(s)ds,$$

где $g(t)$ - неотрицательная, суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, тогда для всех $0 \le t \le \tau$ имеет место неравенство

$$h(t) \le f(t) + \int_0^t f(s) g(s) \exp\left(\int_s^t g(\sigma) d\sigma\right) ds .$$

Единственность решения следует из неравенства /13/ и теоремы единственности Каратеодори /см.[4] /.

2. В дальнейшем нам понадобится следующая

Теорема о компактности. Рассмотрим последовательность точек $x_n = (z_n, \mu_n, \nu_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к $x^* = (z^*, \mu^*, \nu^*)$. Пусть $\tilde{v}(t)$ произвольное, допустимое точкой x^* управление, определенное на $[0, T]$, где T - произвольное положительное число. Нетрудно показать, что найдется последовательность $\lambda_n \to 1$ такая, что управление $v_n(t) = \lambda_n \tilde{v}(t)$ является допустимым для точки $x_n = (z_n, \mu_n, \nu_n)$. Пусть $A(z)$ и $f(z, v)$ удовлетворяют предположениям А,Б, и $u_n(t)$ - произвольное допустимое точкой x_n управление. Обозначим через $z_n(t)$ траекторию системы /1/, соответствующую управлениям $v_n(t), u_n(t)$ и удовлетворяющую начальному условию $z_n(0) = z_n$. Тогда множество траекторий $z_n(\cdot)$ компактно в метрике пространства непрерывных функций на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим множество всех решений $z_n(t)$ на $[0, T]$. Из предположения Б, соотношений /2/, /3/, /13/ и леммы Гронуолла следует равномерная ограниченность по модулю этого множества решений на $[0, T]$, а из равномерной ограниченности, предположения Б, соотношений /2/, /3/ и теоремы Валле-Пуссена /см. § 11 в [2] /следует его равностепенная непрерывность. По теореме Арцелла, из этого множества траекторий можно выделить равномерно сходящуюся последовательность $z_{n_j}(t), j = 1, 2, \ldots$ Ее предел обозначим $z(t)$. Траекторию $z_{n_j}(t)$ уравнения /1/ можно записать в виде

$$z_{n_j}(t) = z^0_{n_j} + \int_0^t \varphi_{n_j}(s) ds .$$

Так как $M(y)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то множество n -мерных измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих условию $\int_0^t M(|\omega(t)|) dt < \infty$, может быть нормировано нормой Орлича $\|\omega(\cdot)\|$ /см. [2] / и превращено в банахово пространство Y. Функции $\varphi_{n_j}(t)$, в силу предположения Б и неравенств /2/, /3/, образуют /см. [2] / ограниченное по норме некоторой константой k_5 множество в Y. Пространство Y /см.[2] / является слабокомпактным, поэтому можно утверждать /переходя, если надо, к подпоследовательности/, что $\varphi_{n_j}(\cdot)$ сходится слабо к функции $\varphi(\cdot)$, причем $\|\varphi(\cdot)\| \le k_5$. Отсюда и из равномерной сходимости $z_{n_j}(\cdot)$ к $z(\cdot)$ следует, что

$$z(t) = z_0 + \int_0^t \varphi(s) ds .$$

Аналогично, вводя метрику Орлича, мы превратим множество k - мерных векторных функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству

$$\int_0^t M(|u(s)|)ds < \infty ,$$

в банахово пространство $\overline{Y}$. Функции $u(\cdot)$, удовлетворяющие неравенству /3/, образуют ограниченное по норме некоторой константой k_6 множество в $\overline{Y}$. Пространство $\overline{Y}$ является слабокомпактным, поэтому можно утверждать /переходя, если надо, к подпоследовательности/, что $u_{n_j}(\cdot)$ сходится слабо к функции $u(\cdot)$, причем $\|u\| \leq k_5$. Функция $u_{n_j}(\cdot)$ удовлетворяет ограничению:

$$\int_0^t M(|u_{n_j}(s)|)ds \leq \mu_{n_j} .$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\mu_{n_j} \to \mu^*$, то найдется номер N_ε такой, что для $n_j > N_\varepsilon$

$$\int_0^t M(|u_{n_j}(s)|)ds \leq \mu^* + \varepsilon .$$

Далее считается $n_j > N_\varepsilon$. Можно показать /см. доказательство леммы 4,I работы [3]/, что слабый предел удовлетворяет тому же ограничению, т.е.

$$\int_0^t M(|u(s)|)ds \leq \mu + \varepsilon ,$$

откуда, в силу произвольности ε,

$$\int_0^t M(|u(s)|)ds \leq \mu .$$

Отсюда, из сходимости $z_n(\cdot) \xrightarrow{C} z(\cdot)$ и предположения А следует слабая сходимость $A(z_{n_j}(t))u_{n_j}(t) + f(z_{n_j}(t), v_{n_j}(t))$ к $A(z(t))u(t) + f(z(t), \tilde{v}(t))$, а так как слабый предел единственен, то

$$\varphi(t) = A(z(t))u(t) + f(z(t), \tilde{v}(t)) .$$

3. О п р е д е л е н и е I. Оператор T_ε, $\varepsilon \geq 0$, ставит в соответствие каждому множеству $X \in R^{n+2}$ множество $T_\varepsilon(X)$ точек $x = (z, \mu, \nu) \in R^{n+2}$ таких, что для каждого допустимого точкой x управления $v(t)$ найдется такое допустимое точкой x управление $u(t)$, при котором решение уравнения /I/ с начальным условием z и $u = u(t)$, $v = v(t)$ попадет на множество X не позже чем за время ε.

Множество точек $x = (z, \mu, \nu) \in X$, удовлетворяющих условиям $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, обозначим через $\ker X$. Перечислим некоторые легко доказываемые свойства оператора T_ε.

С в о й с т в о I. Необходимым и достаточным условием непустоты множества $T_\varepsilon(X)$ является непустота множества $\ker X$.

Свойство 2.

а/ $T_\varepsilon(X)\subset T_{\varepsilon'}(X)$ при $\varepsilon'\geqslant\varepsilon$,

б/ $T_\varepsilon(X)\subset T_\varepsilon(X')$ при $X\subset X'$,

в/ $T_0(X)=\ker X$, $\ker X\subset T_\varepsilon(X)$.

Свойство 3. $T_{\varepsilon_1}T_{\varepsilon_2}(X)\subset T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(X)$.

Назовем множество X однородным, если из принадлежности ему точки $x^0=(z^0,\mu^0,\nu^0)$ следует принадлежность ему любой точки $x=(z^0,\mu,\nu^0)$, где $\mu\geqslant\mu^0$. В дальнейшем множество X предполагается однородным. Отметим, что $T_\varepsilon(X)$ однородно при любом X.

Свойство 4. Если X замкнуто, то $T_\varepsilon(X)$ замкнуто.

Доказательство. Если $\ker X$ - пустое множество, то утверждение очевидно. Пусть $\ker X$ - непустое множество и последовательность $x_n=(z_n,\mu_n,\nu_n)\in T_\varepsilon(X)$ сходится к $x^*=(z^*,\mu^*,\nu^*)$. Покажем что $x^*\in T_\varepsilon(X)$. Пусть $\hat v(t)$ - произвольное, допустимое точкой x^* управление, определенное на $[0,\varepsilon]$. Как уже отмечалось, найдется такая последовательность $\lambda_n\to 1$, что управление $v_n(t)=\lambda_n\hat v(t)$ является допустимым для точки x_n. Поэтому существует такое допустимое для точки x_n управление $u_n(t), 0\leqslant t\leqslant\varepsilon$, что $x_n(t_n)=$ $=(z_n(t_n),\mu_n(t_n),\nu_n(t_n))\in X$, где

$$z_n(t_n)=z_n^0+\int_0^{t}(A(z_n(s))u_n(s)+f(z_n(s),v_n(s)))ds,$$

$z_n(s)$ - траектория уравнения /I/ при $u=u_n(s)$, $v=v_n(s)$, $z(0)=z_n^0$, $t_n\leqslant\varepsilon$,

$$\mu_n(t_n)=\mu_n-\int_0^{t_n}M(|u_n(s)|)ds,\quad \nu_n(t_n)=\nu_n-\int_0^{t_n}\Phi(|v_n(s)|)ds.$$

В силу теоремы о компактности можно считать, что последовательность $z_n(\cdot)$, сходится в смысле метрики банахова пространства $C_{[0,\varepsilon]}$ к некоторой функции $z(\cdot)$ и $z(\cdot)$ является решением уравнения /I/ /при этом соответствующее $u(\cdot)$ является слабым пределом допустимой последовательности $u_n(\cdot)$ /. Рассмотрим последовательность $x_n(t_n)\in X$. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно утверждать, что $t_n\to\bar t\leqslant\varepsilon$. Сходимость $z_n(t_n)$ к $z(\bar t)$ и $\nu_n(t_n)$ к

$$\nu(\bar t)=\nu^*-\int_0^{\bar t}\Phi(|\hat v(s)|)ds$$

очевидна. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно утверждать, что $\mu_n(t_n)$ сходится к

$$\tilde\mu=\mu^*-\lim\int_0^{t_n}M(|u_n(s)|)ds.$$

Можно показать, что

$$\int_0^{\bar t}M(|u(s)|)ds\leqslant\lim\int_0^{t_n}M(|u_n(s)|)ds,$$

то есть

$$\mu(\bar t)=\mu^{*}-\int_0^{\bar t} M(|u(s)|)ds \geq \tilde\mu ,$$

откуда в силу замкнутости и однородности X следует, что $x(\bar t)\in X$.

С в о й с т в о 5. Пусть X замкнуто и $x\in T_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon>\varepsilon_0$, тогда $x\in T_{\varepsilon_0}(X)$.

С в о й с т в о 6. Для произвольных множеств X_i, $i=1,2,\ldots$,

$$T_\varepsilon\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i\Big)\subset \bigcap_{i=1}^{\infty} T_\varepsilon(X_i).$$

С в о й с т в о 7. Если замкнутые множества X_i, $i=1,2,\ldots$, вложены друг в друга, то есть $X_{i+1}\subset X_i$, то

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} T_\varepsilon(X_i)=T_\varepsilon\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i\Big) .$$

Свойство 6 очевидно. Доказательство свойства 5,7 можно провести аналогично доказательству свойства 4.

Отметим, что доказанные свойства 2-7 оператора T_ε полностью, за исключением свойства 2в, совпадают со свойствами I-5 оператора T_ε Б.Н.Пшеничного /см. [I] /.

О п р е д е л е н и е 2. Рациональным разбиением ω будем называть произвольную конечную подпоследовательность рациональных чисел τ_i, $\tau_i\leq\tau_{i+1}$, $i=0,\ldots,m$, $\tau_0=0$.

Пусть для данного ω $\delta_i=\tau_i-\tau_{i-1}$, $i=1,\ldots,m$.

Положим $T_\omega(X)=T_{\delta_n}T_{\delta_{n-1}}\ldots T_{\delta_1}(X)$, $|\omega|=\tau_m$.

Определим важное для дальнейшего множество: $\tilde T_t(X)=\bigcap_{|\omega|\geq t} T_\omega(X)$.

Л е м м а I. Пусть X замкнуто, тогда $\tilde T_{t_1+t_2}(X)=\tilde T_{t_1}\tilde T_{t_2}(X)$.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству лемм I из работы [I] .

Л е м м а 2. Пусть X замкнуто и при $t>\bar t$, $x_0\in\tilde T_t(X)$,тогда $x_0\in\tilde T_{\bar t}(X)$.

Доказательство проводится с помощью леммы I, очевидного включения $\tilde T_t(X)\subset T_t(X)$ и свойства 5.

С л е д с т в и е. Пусть X замкнуто. Для любой точки $x_0\in R^{n+2}$ либо существует наименьшее конечное t , при котором выполняется включение $x_0\in\tilde T_t(X)$ /обозначим его $t(x_0)$ /, либо при всех конечных t $x_0\,\bar\in\,\tilde T(X)$; удобно по определению полагать для таких точек $t(x_0)=+\infty$. Итак, на всем пространстве R^{n+2} определена неотрицательная функция $t(x_0)$.

Т е о р е м а I. Пусть X замкнуто и для данной точки x_0 , $t(x_0)<+\infty$, тогда из этой точки дифференциальная игра /I/ может быть закончена на X за время, не превосходящее $t(x_0)$.

Т е о р е м а 2. Пусть X замкнуто и для данной точки x_0 $t(x_0)=+\infty$. Пусть убегающий в каждый момент t знает положение вектора $X(t)$. Тогда для любого $\tau \geqslant 0$ у убегающего существует такая ε-стратегия, что дифференциальная игра /I/ не может быть закончена на X за время $\leqslant \tau$.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия теоремы I и убегающий в каждый момент t знает положение вектора $x(t)$. Тогда для любого τ, где $0 \leqslant \tau < t(X_0)$, у убегающего существует такая ε-стратегия, что дифференциальная игра /I/ не может быть закончена на X за время $\leqslant \tau$.

Доказательство всех трех теорем проводится аналогично доказательству теоремы из работы [I].

Полученные результаты можно использовать для исследования дифференциальной игры /I/ с терминальным множеством B. Для этого нужно рассмотреть множество X, состоящее из точек $X = (z, \mu, \nu)$, таких, что $z \in B$, $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, и применить доказанные теоремы.

Автор благодарен М.С.Никольскому за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила в ред-изд.отдел
25.I.1973 г.

Л и т е р а т у р а

I. Б.Н.Пшеничный. Структура дифференциальных игр. ДАН СССР, т. I84, № 2. I969.

2. М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, I958.

3. М.С.Никольский. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями. Дифференциальные уравнения, I972, т. УШ, № 6.

4. Дж.Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1954, т.П, ИЛ.