Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 12.
УДК.519.1.

О ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЭЙЛЕРОВА МУЛЬТИГРАФА ДЛЯ СВЯЗНОГО ГРАФА СО ВЗВЕШЕННЫМИ РЕБРАМИ

А.И.Сердюков

Исходная задача, рассматриваемая в настоящей работе формулируется следующим образом. Задан n - вершинный неориентированный связный граф $G=(X,U)$, у которого каждому ребру $u_{ij}\in U$, $1\leq i$, $j\leq n$, приписан вес ρ_{ij} , где ρ_{ij} - вещественные положительные числа. Задача состоит в том, чтобы указать такой замкнутый маршрут L обхода всех ребер графа G , при котором его длина (вес) $\sum\limits_{u_{ij}\in L}\rho_{ij}$ была минимальной (здесь суммирование ведется с учетом кратности прохождения маршрута L через каждое ребро u_{ij}). Точнее, задача состоит в построении достаточно эффективного алгоритма нахождения указанного минимального обхода.

Для решения этой задачи в частном случае (граф $G=(X,U)$ - полный и в нем выполнено неравенство "треугольника"[x/]) в статье [1] предлагается метод "ветвей и границ", требующий для своей работы порядка $n^2 2^n$ операций[xx/] и такого же порядка ячеек памяти. В настоящей работе приводятся эквивалентные постановки исходной задачи, устанавливаются некоторые свойства, позволяющие предложить алгоритм для ее решения более эффективный, чем метод "ветвей и границ".

Все термины, относящиеся к теории графов, которыми автор пользуется в настоящей работе, можно найти в книге [2].

§ 1. Эквивалентные постановки задачи о минимальном обходе ребер графа

Заметим, что если в исходной задаче задан эйлеров граф, то минимальный обход всех ребер находится вполне эффективным алгоритмом, описанным в книге [2] . Поэтому математическую формулировку исходной задачи можно привести в следующем виде. Задача 1 состоит в том, чтобы для исходного графа $G=(X,U)$ построить такой эйлеров мультиграф $P=(X,U^*)$, что исходный граф является его частичным графом, и вес $\rho(P)$ мультиграфа P минимален[ж/].

---

x/ См.неравенство /3/ в настоящей работе.

xx/ Под операцией понимается арифметическая операция либо операция сравнения.

ж/ В дальнейшем под весом $\rho(G)$ взвешенного графа G (его части) будем понимать сумму весов всех ребер взвешенного графа (его части) .

Л е м м а I. Для всякого исходного n - вершинного графа $G=(X,U)$ со взвешенными ребрами искомый минимальный эйлеров мультиграф P можно разложить на два обыкновенных графа T_1 и T_2, таких что $T_1=G$, T_2 - частичный подграф графа G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы I достаточно показать, что у искомого минимального эйлерова мультиграфа число ребер между любыми двумя вершинами i и j не превосходит двух. Предположим противное: существуют две вершины i_0 и j_0, число ребер между которыми в мультиграфе P равно натуральному числу $\ell > 2$. Так как мультиграф P эйлеров, то он связен и все его вершины имеют четную степень. Тогда, удалив из множества ребер, соединяющих вершины i_0 и j_0, такое число ребер, чтобы в нем осталось ребро, если ℓ - нечетное, и два ребра, если ℓ четное, получим новый мультиграф P', у которого число ребер между вершинами i_0 и j_0 не превосходит двух. Мультиграф P' связен (следует из связности мультиграфа P), и все его вершины имеют четную степень. Следовательно, мультиграф P' эйлеров и вес его строго меньше веса мультиграфа P, что противоречит определению мультиграфа P. Полученное противоречие и доказывает лемму I.

З а м е ч а н и е I. Нетрудно заметить, что частичный подграф T_2 графа G не содержит циклов никакой длины, иначе после удаления всех ребер такого цикла из мультиграфа P получается снова эйлеров мультиграф для графа G с меньшим весом.

Пусть $\Omega(G)$ - множество частичных подграфов графа G таких, что для каждого $T\in\Omega(G)$ множество ребер частичного подграфа T дополняет граф G до эйлерова мультиграфа, который будем обозначать через $G\cup T$. По лемме I можем написать следующее соотношение:

$$\rho(P)=\rho(G)+\min_{T\in\Omega(G)}\rho(T). \qquad /1/$$

Для решения задачи I достаточно найти частичный подграф $\hat{T}\in\Omega(G)$ такой, что

$$\rho(\hat{T})=\min_{T\in\Omega(G)}\rho T \qquad /2/$$

Построим полный m -вершинный $(m\leq n)$ неориентированный граф $\widetilde{H}=(\widetilde{X},\widetilde{U})$, в котором его вершинам взаимно-однозначным образом приписаны номера вершин нечетной степени графа G. При этом каждому ребру $\widetilde{u}_{i_1 i_2}$ из $\widetilde{H}$ приписан вес $\widetilde{\rho}_{i_1 i_2}$, равный весу кратчайшей цепи из вершины i_1 в вершину i_2 на графе G.

З а м е ч а н и е 2. В графе $\widetilde{H}$ выполнено следующее неравенство:

$$\widetilde{\rho}_{ij}\leq\widetilde{\rho}_{ik}+\widetilde{\rho}_{kj} \qquad /3/$$

Так как в конечном графе число вершин нечетной степени четно ([3], стр. 20), то $m=2k$.

Введем обозначения: $W(\widetilde{H})$ - множество всех совершенных паросо-

четаний на графе $\widetilde{H}$. Для каждого совершенного паросочетания $w \in W(\widetilde{H})$ поставим во взаимно-однозначное соответствие множество $v = v(w)$, состоящее из $\frac{m}{2}$ кратчайших цепей на графе G , соответствующих ребрам паросочетания $w \in W(\widetilde{H})$. $V(W(\widetilde{H}))$ - класс всех множеств $v(w)$, $w \in W(\widetilde{H})$.

Из определения веса ребер на графе $\widetilde{H}$ непосредственно следует справедливость следующих соотношений:

$$\rho(v(w)) = \widetilde{\rho}(w) \text{ для всех } w \in W(\widetilde{H}),$$

$$\min_{v \in V(W(H))} \rho(v) = \min_{w \in W(H)} \widetilde{\rho}(w). \qquad /4/$$

Л е м м а 2. Для всякого исходного графа G выполнено соотношение:

$$\min_{v \in V(W(H))} \rho(v) \geq \min_{T \in \Omega(G)} \rho(T). \qquad /5/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $v_0 \in V(W(\widetilde{H}))$, такое, что $\rho(v_0) = \min_{v \in V(W(H))} \rho(v)$, и дополним граф G ребрами из v_0 . Получим мультиграф P_0 , который является эйлеровым, и

$$\rho(P_0) = \rho(G) + \min_{v \in V(W(H))} \rho(v). \qquad /6/$$

Так как P - минимальный эйлеров мультиграф графа G , то необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$\rho(P_0) \geq \rho(P). \qquad /7/$$

Сравнивая /I/, /6/ и /7/, получаем неравенство /5/, что и доказывает лемму 2.

Т е о р е м а I. Для минимального эйлерова мультиграфа P имеет место равенство:

$$\rho(P) = \rho(G) + \min_{w \in W(H)} \widetilde{\rho}(w). \qquad /8/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем, что

$$\min_{T \in \Omega(G)} \rho(T) \geq \min_{v \in V(W(H))} \rho(v). \qquad /9/$$

Пусть $T_0 \in G$ - минимальный подграф из $\Omega(G)$:

$$\rho(T_0) = \min_{T \in \Omega(G)} \rho(T). \qquad /10/$$

Тогда он (аналогично частичному подграфу T_2 в замечании I) не содержит циклов.

Так как $G \cup T_0$ - эйлеров мультиграф, то каждой "нечетной" вершине графа G инцидентно нечетное число ребер в частичном подграфе T_0 . Тогда нетрудно заметить, что множество всех ребер частичного подграфа T_0 можно разбить на $\frac{m}{2}$ попарно не пересекающихся по ребрам простых цепей между вершинами нечетной степени графа G , что из каждой "нечетной" вершины будет исходить ровно по одной цепи. Полученное множество цепей на графе обозначим через K , $K \in V(W(\widetilde{H}))$.

Тогда $\rho(T_0) = \rho(K) \geq \min_{v \in V(W(H))} \rho(v)$, и неравенство /9/ доказано.

Сравнивая неравенства /5/, /9/ с равенствами /I/, /4/, получим /8/. Теорема I доказана.

Таким образом, задачу I можно свести к задаче нахождения минимального совершенного паросочетания в графе $\tilde{H}$. Эту задачу будем называть задачей П. Опишем сведение задачи I к задаче П, используя полученные результаты. Вначале по исходному графу $G=(X,U)$ построим граф $\tilde{H}=(\tilde{X},\tilde{U})$. Для определения весов ребер графа $\tilde{H}=(\tilde{X},\tilde{U})$ можно использовать метод Дийкстра [5], который позволяет за $\sim n^3$ операций определить веса всех ребер графа $\tilde{H}$. Далее, для графа $\tilde{H}$ находим решение задачи П, по этому решению однозначно строится минимальный частичный подграф $\hat{T}\in\Omega(G)$. Тогда $G\cup\hat{T}$ – минимальный эйлеров мультиграф, который и является решением задачи I.

Рассмотрим задачу П для произвольного полного m - вершинного $(m=2k)$ графа $H=(X,U)$, у которого ребрам $u_{ij}\in U$, $1\leq i$, $j\leq m$, приписан вес ρ_{ij}, где ρ_{ij} – вещественные неотрицательные числа. Пусть $\rho_0=\max\limits_{u_{ij}\in U}\rho_{ij}+1$. Припишем ребрам $u_{ij}\in U$ графа H новые веса $\rho^*_{ij}=\rho_{ij}+\rho_0$. Если $w=(u_{i_1i_2},u_{i_3i_4},\dots,u_{i_{m-1}i_m})$ – минимальное совершенное паросочетание на графе H с исходными весами ребер, то это же паросочетание w является минимальным совершенным паросочетанием на графе H с новыми весами ребер и наоборот. В дальнейшем будем рассматривать граф $H=(X,U)$ с новыми весами ребер.

З а м е ч а н и е 3. В графе H выполнено строгое неравенство "треугольника":

$$\rho^*_{ij}<\rho^*_{ik}+\rho^*_{kj},\quad i\neq k,\ j\neq k. \qquad /II/$$

Рассмотрим задачу I для графа H. Пусть $H\cup\hat{T}$ – минимальный эйлеров мультиграф графа H. Тогда $\hat{T}$ – минимальный частичный подграф из множества $\Omega(H)$. Так как имеет место строгое неравенство /II/ на графе H, то $\tilde{H}(H)\equiv H$, $V(W(\tilde{H}))=V(W(H))\equiv W(H)$ и $\hat{T}\in V(W(H))$. Следовательно, минимальный частичный подграф $\hat{T}\in\Omega(G)$ является совершенным паросочетанием на графе H. С другой стороны, если w – совершенное паросочетание на графе H, то $w\in\Omega(H)$. Следовательно, искомое решение задачи I для графа будет также решением для графа H задачи П.

Таким образом, задачи I и П эквивалентны, и если мы умеем достаточно эффективно решать задачу I, то столь же эффективно сможем решить задачу П и наоборот.

В дальнейшем такие понятия теории графов, как "цикл C", "паросочетание w" или "путь R", нам будет удобно рассматривать как некоторые множества C, w, R, элементами которых являются ребра, составляющие соответственно цикл, паросочетание или путь.

Рассмотрим произвольное совершенное паросочетание $w_1\in W(H)$ и ребро $u_{\ell m}\in w_1$. Преобразуем полный m -вершинный граф H в некоторый полный граф $H'=(X,U')$ следующим образом: вершинам графа взаимно-однозначным образом приписаны номера вершин графа H', при этом каждо-

му ребру u'_{ij} приписан вес ρ'_{ij}, такой что

$$\rho'_{ij} = \begin{cases} -\rho^*_{ij} & ,\text{если } u_{ij} \in w_1 \setminus u_{\ell m}, \\ \rho^*_{ij} & ,\text{в противном случае} \end{cases} \qquad /12/$$

Лемма 3. Пусть ребро $u'_{\ell m}$ кратчайшая цепь из вершины ℓ в вершину m на графе H', тогда существует такое минимальное паросочетание $w_0 \in W(H)$, что $u_{\ell m} \in W_0$.

Доказательство. Предположим противное, то есть каждое минимальное совершенное паросочетание на графе H не содержит ребра $u_{\ell m}$. Рассмотрим произвольное минимальное совершенное паросочетание w_0 на H и выделим в графе H цикл C, обладающий следующими свойствами:

1/ $u_{\ell m} \in C$, 2/ $C \subset w_1 \cup w_0$.

Покажем, что выполняется следующее неравенство:

$$\rho^*(C \cap w_1) > \rho^*(C \cap w_0). \qquad /13/$$

Действительно, если $\rho^*(C \cap w_1) \leq \rho^*(C \cap w_0)$, то рассматривая совершенное паросочетание $w_2 = (w_0 \setminus C) \cup (C \cap w_1)$, получаем, что его вес удовлетворяет следующему соотношению:

$$\rho^*(w_2) = \rho^*(w_1 \cap C) - \rho^*(C \cap w_0) + \rho^*(w_0) \leq \rho^*(w_0),$$

и w_2 – минимальное совершенное паросочетание на графе H, содержащее ребро $u_{\ell m}$. Получим противоречие исходному предположению.

Пусть цикл C на графе H состоит из цепи $(u_{\ell i_1}, u_{i_1 i_2}, u_{i_2 i_3}, \ldots, u_{i_{2p-1} i_{2p}}, u_{i_{2p} m})$ и ребра $u_{\ell m}$. Рассмотрим цикл C' на графе H', состоящий из цепи $(u'_{\ell i_1}, u'_{i_1 i_2}, u'_{i_2 i_3}, \ldots, u'_{i_{2p} m})$ и ребра $u'_{\ell m}$. В силу /12/ и /13/ имеем: $\rho'(C' \setminus u'_{\ell m}) < \rho'_{\ell m}$, а это противоречит условию леммы 3. Лемма 3 доказана.

Лемма 3 устанавливает достаточное условие вхождения произвольного ребра $u_{\ell m}$ на графе H в минимальное совершенное паросочетание. Пусть по-прежнему $u_{\ell m} \in w_1$.

Лемма 4. Если ребро $u'_{\ell m}$ не является кратчайшей цепью из вершины ℓ в вершину m на графе H', то существует такое совершенное паросочетание w_2 на графе H, что для весов паросочетаний w_1 и w_2 выполнено строгое неравенство:

$$\rho^*(w_1) > \rho^*(w_2)$$

Доказательство. Пусть w_1 – совершенное паросочетание на графе H имеет вид $(u_{i_1 i_2}, u_{i_3 i_4}, \ldots, u_{i_{2q-1} i_{2q}}, \ldots, u_{i_{n-1} i_n})$, где $i_{2q-1} = \ell$, $i_{2q} = m$. Рассмотрим w'_1 – соответствующее совершенное паросочетание на графе H : $(u'_{i_1 i_2}, u'_{i_3 i_4}, \ldots, u'_{i_{2q-1} i_{2q}}, \ldots, u'_{i_{m-1} i_m})$. В силу неравенства /11/ кратчайшая цепь $R'_{\ell m}$ между вершинами ℓ и m на графе H' состоит из последовательно чередующихся ребер, принадлежащих соответственно $u' \setminus w'_1$ и w'_1. Пусть $R'_{\ell m}$ имеет вид: $(u'_{\ell m_1}, u_{i_1 i_2}, \ldots, u'_{i_{t-1} i_t}, u'_{i_t m})$. Рассмотрим цикл C_1 на графе H, который состоит из ребер пути $R_{\ell m}$ $(u_{\ell i_1}, u_{i_1 i_2}, \ldots, u_{i_{t-1} i_t}, u_{i_t m})$ и ребра $u_{\ell m}$. Тогда в силу предположения леммы 4

выполняется следующее неравенство:

$$\rho^*(C_1 \cap w_1) > \rho^*(C_1 \setminus w_1). \qquad /14/$$

Рассмотрим на графе H совершенное паросочетание $w_2=(w_1\setminus C_1)\cup(C_1\setminus w_1)$. Используя неравенство /14/, получаем оценку для весов паросочетаний w_1 и w_2 : $\rho^*(w_1)>\rho^*(w_2)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 4 устанавливает достаточное условие перехода от имеющегося совершенного паросочетания w_1 к новому совершенному паросочетанию w_2 на графе H с меньшим весом.

§ 2. Алгоритм нахождения минимального совереппного паросочетания в полном неориентированном графе со взвешенными ребрами

Рассмотрим задачу П для полного m - вершинного ($m=2k$) неориентированного графа $H=(X,U)$, у которого ребрам $u_{ij}\in U$, $1\leq i$, $j\leq m$, приписаны веса ρ_{ij} , где ρ_{ij} - вещественные произвольные числа.

Вначале рассмотрим произвольный полный двудольный частичный граф $H^*=(X,U^*)$ графа H , такой что

$$X=X_1\cup X_2,\quad X_1\cup X_2=\varnothing,\quad u^*_{X_1}=u^*_{X_2}=\varnothing,\ |X_1|=|X_2|=k. \qquad /15/$$

Пусть A_{H^*} - матрица весов ребер графа H^* , которая с точностью до перестановки строк и столбцов имеет следующий вид:

$$A'_{H^*}=\left(\begin{array}{c:c} \infty & \rho_{ij} \\ \hdashline \rho_{ji} & \infty \end{array}\right)$$

Так как матрица A'_{H^*} симметрична относительно главной диагонали, то для построения минимального совершенного паросочетания на графе H^* достаточно решить задачу о назначении на минимум для подматрицы размерности $\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}$ (матрицы A'_{H^*}) , которая находится в левом нижнем углу. Для этого потребуется порядка m^3 операций [4] .

Обозначим через w_1 совершенное паросочетание на графе H , которое имеет следующий вид:

$$w_1=(u_{i_1 i_{k+1}},\ u_{i_2 i_{k+2}},\ldots,\ u_{i_{k-1} i_{m-1}},\ u_{i_k i_m}),$$

а через E - класс всех полных двудольных частичных графов графа H вида /15/, таких что, если $H^*_l=(X,U^*_l)\in E$, то для любого $l=1,2,\ldots k$ вершины с номерами i_l и i_{l+k} находятся в разных долях графа H^*_l . Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Каждое совершенное паросочетание на графе H лежит в некотором двудольном графе из класса E .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное совершенное паросочетание w на графе H . Тогда множество ребер $w\cup w_1$ составляет множество попарно изолированных друг от друга циклов четной длины, иначе найдется два смежных ребра, принадлежащих одному паросочетанию.

Пусть $C=(u_{n_1n_2},u_{n_2n_3},u_{n_3n_4},\ldots,u_{n_{2p-1}n_{2p}},u_{n_{2p}n_1})$ - один из таких

циклов и ребра $u_{n_1n_2}$, $u_{n_3n_4}$, ... ,$u_{n_{2p-1}n_{2p}}$ лежат в паросочетании w_1. Отнесем вершины с номерами n_1, n_3, n_5, ... , n_{2p-3}, n_{2p-1} к X_1, а вершины с номерами n_2, n_4, ... , n_{2p} к X_2. Поступим точно так же с другими циклами. В результате получим граф $H_o^* \in E$, в котором лежит паросочетание w. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает, что для решения задачи П для графа H, достаточно решить задачу П для каждого из графов класса E.

Мы обосновали алгоритм решения задачи о минимальном совершенном паросочетании в полном неориентированном m - вершинном графе, а следовательно, и алгоритм для решения исходной задачи о кратчайшем обходе всех ребер n - вершинного графа $G=(X, U)$. Этот алгоритм для своей работы требует порядка $m^3 2^{\frac{m}{2}}$, $m<n$, операций ($2^{\frac{m}{2}}$ - мощность множества E) и порядка n^2 ячеек памяти.

Автор выражает благодарность В.А.Перепелице за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила в ред.-изд.отдел.
29.I.1974 г.

Литература

I. П.Н.Васильев. Об одной экстремальной задаче на графе.- В кн: Труды Ш зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, М., 1970, вып. I, с

2. К.Берж. Теория графов и ее применение.М.,ИЛ, 1962.

3. О.Оре. Теория графов. М., "Наука", 1968.

4. Е.А.Диниц, Н.А.Кронрод. Один алгоритм решения задачи о назначении. - Докл. АН СССР, 1969, т.189, № I, с.

5. S.Elmagraby.The theory of networks and management science p.I. Management science, 1970, v. I7, NI.