Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1974 г. выпуск 13.
УДК.519.1.

О ЧИСЛЕ ПАР ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В ПОЛНОМ ГРАФЕ, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННОЕ ЧИСЛО ОБЩИХ РЕБЕР

А.Д.Коршунов

§ 1. Постановка задачи. Формулировка результатов

Пусть G_n означает полный неориентированный граф с n нумерованными вершинами и пусть C есть произвольный гамильтонов цикл в графе G_n. Обозначим через $H_n(C,r)$ число гамильтоновых циклов в G_n, которые имеют точно по r общих ребер с циклом C, $0 \leq r < n$. В частности, $H_n(C,0)$ означает число тех гамильтоновых циклов в G_n, которые не имеют общих ребер с циклом C.

Очевидно, что $H_n(C,r) = H_n(C_1,r)$ для любых гамильтоновых циклов C и C_1 в G_n. Поэтому вместо $H_n(C,r)$ будем использовать обозначение $H_n(r)$.

Определению величины $H_n(r)$ посвящено несколько работ [1] – [6]. В них содержатся результаты двух типов. К результатам одного типа относятся те, которые доставляют точные формулы для величины $H_n(r)$ при r, близких к n. Так, например, в [1] показано, что

$$H_n(n-2) = C_n^2 - n,$$

$$H_n(n-3) = 4C_n^3 - 3n^2 + 8n,$$

$$H_n(n-4) = 25\,C_n^4 - \frac{17}{2}n^3 + \frac{117}{2}n^2 - 105n.$$

К результатам другого типа относятся те, которые доставляют рекуррентные формулы для величины $H_n(r)$ при любых n и r. В частности, одна из таких наиболее прозрачных формул, установленная в [6], имеет следующий вид:

$$H_n(r) = \frac{n}{r}\left[\frac{2(n-r)}{n-1}H_{n-1}(r-1) - \frac{2(r-1)}{n-2}H_{n-2}(r-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{2r}{n-1}H_{n-1}(r) + \frac{r}{n-2}H_{n-2}(r) + \frac{r-2}{n-2}H_{n-2}(r-2)\right].$$

Кроме того, в [6] показано, что

$$(n-1)!/32 \leq H_n(0) < (n-1)!/2.$$

Полученные формулы хотя и позволяют рекуррентно находить величину $H_n(r)$, однако по ним трудно что-либо сказать о порядке этой величины. В связи с этим обстоятельством возникает вопрос об асимптотическом поведении величины $H_n(r)$. Изучение этого поведения и является предметом настоящей статьи. Ее основной результат состоит в следующем.

Т е о р е м а 1. При любой константе $c > 0$, $n \to \infty$ и любом $r = r(n) \leq c\sqrt{n}$ имеет место асимптотическая формула

$$H_n(r) \sim (n-1)!\, 2^{r-1}/(r!\, e^{2+r^2/2n}).$$

Следствие. При $n \to \infty$ и любом $r = r(n) = o(\sqrt{n})$ имеет место асимптотическая формула

$$H_n(r) \sim (n-1)!\, 2^{r-1}/(r!\, e^2).$$

Замечание. Ограничение на r связано с тем, что при больших r асимптотика для $H_n(r)$ имеет другой вид. Однако такими r мы не интересуемся.

Доказательство теоремы проводится в два этапа. Сначала находится точная формула для величины $H_n(0)$. Она имеет следующий вид.

Теорема 2. При любом n справедливо соотношение:

$$H_n(0) = (n-1)!/2 + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(-1)^t (n-t-1)! \times$$
$$\times \sum_{v=1}^{\min(t,n-t)} 2^v \sum_{l=1}^{t-v+1} \sum_{w=1}^{n-t-v+1} (l+w) C_{t-l-1}^{v-2} C_{n-t-w-1}^{v-2}.$$

Из этой формулы извлекается асимптотическая формула для $H_n(0)$. Затем находится асимптотическая формула для $H_n(r)$ при любом $r \leq c\sqrt{n}$.

В заключение статьи мы показываем, что использование неравенства Чебышева в принципе невозможно для доказательства следующей гипотезы: если $k = k(n) > n(\ln n + c)$, где c – любая положительная константа, то в большинстве неориентированных графов (без петель и кратных ребер) с n нумерованными вершинами и k ребрами имеются гамильтоновы циклы.

Из этого, в частности, следует несостоятельность "доказательства" этой гипотезы, которое содержится в работе [7]. Правда, пользуясь этим методом, можно убедиться в справедливости следующего факта.

Теорема 3. Если $k = n\sqrt{n}\varphi(n)$, где $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то в большинстве неориентированных n - вершинных графов с k ребрами содержатся гамильтоновы циклы.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения. Оно проводится по полной аналогии с опровержением сформулированной гипотезы, которое излагается в § 5. Отметим лишь, что справедливость чуть более слабого факта была установлена ранее В. Перепелицей [8]. Именно, им был предложен такой алгоритм, который для большинства n - вершинных графов с k ребрами позволяет находить гамильтоновы циклы, если только $k > c_1 n\sqrt{n\ln n}$.

Позднее частный случай результата В.Перепелицы был передоказан Дж.Муном [9].

§ 2. Точная формула для $H_n(0)$

Будем считать, что вершины полного графа $\grave{G}_n$ перенумерованы числами I, 2, ... , n. В качестве гамильтонова цикла C возьмем цикл, изображенный на рис. I. Все ребра этого цикла занумеруем

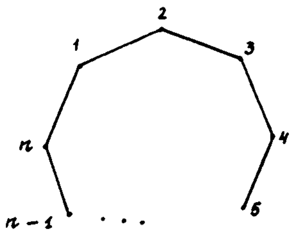

Рис. I

числами I,2, ..., n так, что первый номер получает ребро (I, 2), второй номер получает ребро (2, 3) и т.д. и, наконец, n -й номер получает ребро (n , I).

Обозначим через $R(S_1, S_2, \dots, S_t)$ множество всех таких гамильтоновых циклов C' в G_n , в которых обязательно содержатся S_1 -е, S_2 -е, ... , S_t -е ребра.

Л е м м а I. При любом n имеет место соотношение

$$H_n(0) = (n-1)!/2 + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t \sum{}^{*} |R(S_1, \dots, S_t)|, \qquad /1/$$

где $\sum^*$ означает суммирование по всем неупорядоченным выборкам элементов из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а $|R(S_1, \dots, S_t)|$ означает мощность множества $R(S_1, \dots, S_t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. основано на использовании принципа включения и исключения. В самом деле, если некоторый цикл C' не имеет общих ребер с C , то C' учитывается один раз только в первом слагаемом. Если же C' имеет r общих ребер с C , то, очевидно, C' один раз учитывается в слагаемом $(n-1)!/2$, равном числу всех гамильтоновых циклов в G_n , C_r^t раз - в слагаемом $\sum^* |R(S_1, \dots, S_t)|$ при $t \in [1, r]$ и ни разу не учитывается в остальных слагаемых. Таким образом, в правой части (I) цикл C' учитывается

$$1 - C_r^1 + C_r^2 - C_r^3 + \dots + (-1)^r C_r^r = 0 \quad \text{раз.}$$

Тем самым лемма доказана.

Подсчитаем теперь величину $|R(S_1, \dots, S_t)|$. Множество чисел $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ при $S_1 < S_2 < \dots < S_t$ разобьем на максимальные интервалы с тем условием, что если $S_1 = 1$ и $S_t = n$, то вместо двух интервалов, одному из которых принадлежит S_1 , а другому - S_t , рассматривается оидн интервал, являющийся их объединением.

Например, пусть $n = 6$, а $S_1 = 2$, $S_2 = 4$ и $S_3 = 6$. Тогда в качестве интервалов рассматриваем множества $\{1, 2, 6\}$ и $\{4\}$, а не множества $\{1, 2\}$, $\{4\}$ и $\{6\}$.

Обозначим через J_1 тот интервал, которому принадлежит S_1 ,че-

рез J_2 - интервал, которому принадлежит минимальное число из $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$, не входящее в J_1, и т.д. Вообще через J_w обозначим интервал, которому принадлежит минимальное число из $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$, не входящее в интервалы $J_1, J_2, \dots, J_{w-1}$, $w = 2, 3, \dots$. В рассмотренном примере $J_1 = \{1, 2, 6\}$, а $J_2 = \{4\}$.

Из определения следует, что все ребра цикла C, номера которых принадлежат одному интервалу J_w, $1 < w < v$, образуют цепь. Эту цепь мы обозначим через $\mathcal{U}_w$.

Л е м м а 2. При любых допустимых S_1, S_2, ..., S_t таких, что множество $\{S_1, \dots, S_t\}$ состоит из v интервалов, справедливо соотношение $|R(S_1, \dots, S_t)| = (n-t-1)!\,2^{v-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если множество $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ состоит из v интервалов, то любой гамильтонов цикл $C' \in R(S_1, S_2, \dots, S_t)$ имеет следующую структуру. Если перемещаться по циклу C', начиная с произвольной вершины, то при попадании в конечную вершину какой--либо цепи $\mathcal{U}_w$, $1 \leqslant w \leqslant v$, придется пройти ее полностью и выйти на другую конечную вершину цепи $\mathcal{U}_w$. Таким образом, во внутренние вершины любой цепи нельзя попасть непосредственно из вершины, не принадлежащей этой же цепи. Это означает, что каждую цепь $\mathcal{U}_w$, $1 < w < v$, можно рассматривать как единое целое и представлять ее в виде "обобщенной" вершины. Такая обобщенная вершина отличается от обычной вершины следующим. Если взять произвольный цикл $C' \in R(S_1, \dots, S_t)$ и двигаться по нему, начиная с некоторой вершины, о при прохождении обобщенной вершины надо указать одно из двух направлений, в котором она проходится. Ведь эта вершина соответствует цепи, движение по которой может начинаться с одной из двух конечных вершин. В остальном же любая обобщенная вершина ничем не отличается от обычной вершины.

Например, пусть $n = 9$, $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 5$, $S_4 = 7$, $S_5 = 9$, а цепь C' состоит из ребер (3, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 7), (7, 8), (8, 2), (2, I), (I, 9), (9, 3) (см. рис. 2).

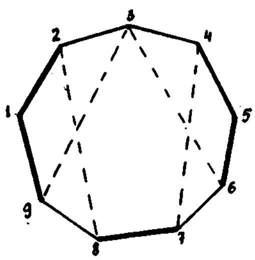

Рис. 2

Тогда v = 3 и имеем следующие цепи: $\mathcal{U}_1 = (9, I), (I, 2)$; $\mathcal{U}_2 = (4, 5), (5, 6)$; $\mathcal{U}_3 = (7, 8)$. В качестве обобщенных вершин рассматриваются множества $\{I, 2, 9\}$, $\{4, 5, 6\}$ и $\{7, 8\}$.

Из сказанного следует, что все циклы $C' \in R(S_1, \dots, S_t)$ можно построить следующим образом. Сначала строятся все гамильтоновы циклы C^*, проходящие через обобщенные вершины без учета направления

их прохождения и через все остальные вершины. Так как число обобщенных вершин равно v, а число остальных вершин, как легко видеть, равно $n-(t+v)$, то общее число вершин равно $n-t$. Поэтому число таких циклов равно $(n-t-1)!/2$. Затем в каждом цикле указываются направления прохождения обобщенных вершин. Так как число обобщенных вершин равно v, то из каждого цикла C^* получается ровно 2^v циклов $C' \in R(S_1,\dots,S_t)$. Отсюда следует справедливость леммы.

Л е м м а 3. При любых n и t, $1< t< n$, справедливо соотношение

$$\sum\nolimits^* |R(S_1,\dots,S_t)| = (n-t-1)! \sum_{v=1}^{\min(t,n-t)} 2^{v-1} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{t-v+1} \sum_{w=1}^{n-t-v+1} (l+w)\, C_{t-l-1}^{v-2}\, C_{n-t-w-1}^{v-2}.$$

(смысл $\sum^*$ определен в лемме I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $\{S_1,S_2,\dots,S_t\}$ состоит из v интервалов $J_1,J_2,\dots,J_v$. Тогда цикл C можно, очевидно, разбить на цепи $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2^*$, ..., $\mathcal{U}_v$, $\mathcal{U}_v^*$, где цепь $\mathcal{U}_i$, $1\le i\le v$, соответствует интервалу J_i, а цепь $\mathcal{U}_i^*$ соединяет цепи $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{U}_{i+1}$. Например, пусть $J_1=\{1,2,9\}$, $J_2=\{8,7\}$, $J_3=\{4,5,6\}$ (см. рис. 2). Тогда $\mathcal{U}_1=(9,1),(1,2)$; $\mathcal{U}_1^*=(2,8)$; $\mathcal{U}_2=(8,7)$, $\mathcal{U}_2^*=(7,4)$; $\mathcal{U}_3=(4,5),(5,6)$; $\mathcal{U}_3^*=(6,3),(3,9)$.

Отсюда следует, что для любого множества $\{S_1,\dots,S_t\}$ величина v не может превосходить $\min(t,n-t)$. Поэтому выражение $\sum^*|R(S_1,\dots,S_t)|$ можно представить в виде

$$\sum\nolimits^* |R(S_1,\dots,S_t)| = \sum_{v=1}^{\min(t,n-t)} \sum\nolimits_v |R(S_1,\dots,S_t)|,$$

где $\sum_v |R(S_1,\dots,S_t)|$ есть сумма мощностей тех множеств $R(S_1,\dots,S_t)$, когда $\{S_1,\dots,S_t\}$ состоит из v интервалов. Таким образом, надо показать, что при любом v, $1\le v\le \min(t,n-t)$, справедливо равенство

$$\sum\nolimits_v |R(S_1,\dots,S_t)| = (n-t-1)!\, 2^{v-1} \sum_{l=1}^{t-v+1} \sum_{w=1}^{n-t-v+1} (l+w)\, C_{t-l-1}^{v-2}\, C_{n-t-w-1}^{v-2}. \qquad /2/$$

Убедимся в этом. Если через l_i обозначить длину цепи $\mathcal{U}_i$, а через l_i^* – длину цепи $\mathcal{U}_i^*$, $1\le i\le v$, то нетрудно видеть, что разбиение цикла C на цепи $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1^*$, ..., $\mathcal{U}_v$, $\mathcal{U}_v^*$ может быть задано следующим образом:

I. Указывается набор чисел $(l_1,l_2,\dots,l_v)$ таких, что $\sum_{i=1}^{v} l_i = t$, а $l_i \ge 1$.

2. Указывается набор чисел $(\ell_1^*, \ell_2^*, \ldots, \ell_v^*)$ таких, что $\sum_{i=1}^{v} \ell_i^* = n-t$, а $\ell_i^* \geq 1$.

3. Указывается номер той вершины в C, которая находится на стыке цепей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_1^*$.

Известно, что при фиксированном ℓ_1 число целых положительных решений уравнения $\sum_{i=1}^{v} \ell_i = t$ равно $C_{t-\ell_1-1}^{v-2}$. Аналогично при фиксированном ℓ_v^* число целых положительных решений уравнения $\sum_{i=1}^{v-1} \ell_i^* = n-t-\ell_v^*$ равно $C_{n-t-\ell_v^*-1}^{v-2}$. Кроме того, легко видеть, что при заданных ℓ_1 и ℓ_v^* в качестве вершины, которая является общей для цепей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_1^*$, могут быть только 2-я, 3-я, ..., $(\ell_1+\ell_v^*+1)$-я вершины. Поэтому число способов выбора $2v$ цепей $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1^*$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2^*$, ..., $\mathcal{U}_v$, $\mathcal{U}_v^*$, когда цепь $\mathcal{U}_1$ состоит из ℓ ребер, а $\mathcal{U}_v^*$ - из w ребер, в точности равно

$$(\ell+w)C_{t-\ell-1}^{v-2}\,C_{n-t-w-1}^{v-2}.$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что сумма мощностей всех тех множеств $R(S_1, \ldots, S_t)$, которые состоят из v интервалов, а $\ell_1=\ell$, $\ell_v^*=w$, равна $(n-t-1)!\,2^{v-t}C_{t-\ell-1}^{v-2}C_{n-t-w-1}^{v-2}(\ell+w)$. Теперь, заметив, что ℓ_1 не может превосходить $t-v+1$, а $\ell_v^* \leq n-t-v+1$, и просуммировав по всем ℓ_1 и ℓ_v^*, получаем соотношение (2). Лемма доказана.

Справедливость теоремы 2 теперь непосредственно следует из лемм I и 3.

§ 3. Асимптотическая формула для $H_n(0)$

Наша цель заключается в том, чтобы показать, что среди всех слагаемых в точной формуле для $H_n(0)$ основными являются те, которые соответствуют значениям $t < t_0 = [\log_2 n]$ и $v=t$. С этой целью выражение для $H_n(0)$ из теореме 2 с учетом равенства $\min(t,n-t)=t$ при $n>4$ и $t<t_0$ представим в виде

$$H_n(0)=(n-1)!/2+\frac{1}{2}N_1(n,t_0)+\frac{1}{2}N_2(n,t_0), \qquad /3/$$

где

$$N_1(n,t_0)=\sum_{t=1}^{t_0}(-1)^t(n-t-1)!\sum_{v=1}^{t}2^v \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{t-v+1}\sum_{w=1}^{n-t-v+1}(\ell+w)C_{t-\ell-1}^{v-2}\,C_{n-t-w-1}^{v-2}, \qquad /4/$$

$$N_2(n,t_0)=\sum_{t=t_0+1}^{n}(-1)^t(n-t-1)!\sum^{\min(t,n-t)}2^v \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{t-v+1}\sum_{w=1}^{n-t-v+1}(\ell+w)C_{t-\ell-1}^{v-2}\,C_{n-t-w-1}^{v-2} \qquad /5/$$

Оценим сначала величину $N_2(n,t_0)$. Ранее мы уже отмечали, что величина $(\ell+w)C^{v-2}_{t-\ell-1}C^{v-2}_{n-t-w-1}$ задает число способов выбора $2v$ цепей $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1^*, \ldots, \mathcal{U}_v, \mathcal{U}_v^*$, когда цепь $\mathcal{U}_1$ состоит из ℓ ребер, а $\mathcal{U}_v^*$ - из w ребер. Поэтому

$$N_2(n,t_0) < \sum_{t=t_0+1}^{n}(n-t-1)!\sum_{v=1}^{\min(t,n-t)} C_n^t 2^v <$$

$$< n!\sum_{t=t_0+1}^{n} 2^{t+1}/(t!(n-t)) = (\text{ибо } t_0 \geq \log_2 n) = o((n-1)!). \qquad /6/$$

Найдем теперь асимптотику для $N_1(n,t_0)$. С этой целью величину $N_1(n,t_0)$ представим в виде

$$N_1(n,t_0) = N_1^1(n,t_0) + N_1^2(n,t_0), \qquad /7/$$

где

$$N_1^1(n,t_0) = \sum_{t=2}^{t_0}(-1)^t(n-t-1)!\sum_{v=1}^{t-1}2^v \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{t-v+1}\sum_{w=1}^{n-t-v+1}(\ell+w)C^{v-2}_{t-\ell-1}C^{v-2}_{n-t-w-1}, \qquad /8/$$

а $N_1^2(n,t_0)$ равна сумме остальных слагаемых из /4/.

Каждое подмножество, в котором содержится, по крайней мере, два соседних числа i и j, т.е. таких i и j, что $|i-j| = 1$, (вообще говоря, неоднозначным способом) можно задать:

I) указанием пары соседних элементов (имеется не более n таких возможностей),

2) указанием остальных $t-2$ элементов (имеется не более C^{t-2}_{n-2} таких возможностей).

Поэтому

$$N_1^1(n,t_0) < \sum_{t=2}^{t_0}(n-t-1)!\sum_{v=1}^{t-1}2^v n C^{t-2}_{n-2} <$$

$$< \sum_{t=2}^{t_0}(n-t-1)!\, n C^{t-2}_{n-2} 2^t = O((n-1)!) \qquad /8/$$

Оценим сверху $N_1^2(n,t_0)$. Величина $\sum_{w=1}^{n-2t+1}(1+w)C^{t-2}_{n-t-w-1}$ задает число разных t - элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, в каждом из которых нет соседних элементов. Поэтому эта величина равна числу всех t -элементных подмножеств без числа тех, в которых имеются соседние элементы. Так как число первых равно C_n^t, а число последних, как уже показано, не превосходит nC^{t-2}_{n-2}, то

$$C_n^t - nC_{n-2}^{t-2} \le \sum_{w=1}^{n-2t+1} (1+w)\, C_{n-t-w-1}^{t-2} < C_n^t$$

Отсюда и из определения $N_1^2(n, t_0)$ получаем

$$N_1^2(n,t_0) \le \sum_{t=1}^{t_0} (-1)^t (n-t-1)!\; 2^t C_n^t \quad +$$

$$+ \sum_{t=1}^{t_0} (n-t-1)!\, 2^t n\, C_{n-2}^{t-2} \qquad /10/$$

и

$$N_1^2(n,t_0) > \sum_{t=1}^{t_0} (-1)^t (n-t-1)!\, 2^t C_n^t \quad -$$

$$- \sum_{t=1}^{t_0} (n-t-1)!\, 2^t n\, C_{n-2}^{t-2} \qquad /11/$$

В свою очередь, нетрудно видеть, что

$$\sum_{t=1}^{t_0} (n-t-1)!\, 2^t n\, C_{n-2}^{t-2} = O((n-1)!), \qquad /12/$$

$$\sum_{t=1}^{t_0} (-1)^t (n-t-1)!\, 2^t C_n^t = \left\{ \sum_{t=1}^{t_0} (-1)^t \frac{2^t}{t!} + O(1) \right\} (n-1)! \qquad /13/$$

Из /10/ - /13/ и соотношений

$$\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{2^t}{t!} = e^{-2} - 1, \qquad \sum_{t=t_0+1}^{\infty} (-1)^t \frac{2^t}{t!} = O(1)$$

следует асимптотическое тождество

$$H_n(0) \sim \frac{(n-1)!}{2e^2} \qquad /14/$$

§ 4. Асимптотическая формула для $H_n(\tau)$

Справедливость теоремы I устанавливается следующим образом. Пусть $R^*(S_1, \dots, S_\tau)$ означает множество тех гамильтоновых циклов $C' \in R(S_1, \dots, S_\tau)$, в которых содержатся S_1-е, S_2-е, ..., S_τ-е ребра цикла C и нет других ребер из C. Тогда

$$H_n(\tau) = \sum_{(S_1, \dots, S_\tau)} |R^*(S_1, \dots, S_\tau)| \; . \qquad /15/$$

Найдем асмптотику для $|R^*(S_1, \dots, S_\tau)|$, когда множество $\{S_1, \dots, S_\tau\}$ состоит из v интервалов. Каждую цепь $\mathcal{U}_i$, $1 \le i \le v$, как и при доказательстве леммы I, будем представлять себе в виде обобщенной вершины. При таком подходе цикл C можно интерпретировать как цикл $\bar{C}$ длины $n-\tau$ при условии, что в каждой обобщенной вершине указано направление ее прохождения, когда обходится цикл C, начиная

с некоторой фиксированной вершины.

То же самое справедливо и для всякого цикла $C' \in R(S_1, \ldots, S_r)$, который при нашей интерпретации будем обозначать через $\bar{C}'$. Согласно лемме 2 число таких циклов $\bar{C}'$, а следовательно, и циклов $C' \in R(S_1, \ldots, S_r)$ равно $(n-r-1)!\,2^{v-1}$. Однако нас интересуют не все циклы $\bar{C}'$, а только те, которые не имеют общих ребер с циклом $\bar{C}$. Число таких циклов, как мы уже знаем, задается формулой

$$R^*(S_1, \ldots, S_r) \sim (n-r-1)!\,2^{v-1}/e^2. \qquad /16/$$

Займемся теперь нахождением числа подмножеств $\{S_1, \ldots, S_r\}$ множества $\mathfrak{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, каждое из которых состоит в точности из v интервалов. Пусть $T(n, r)$ означает совокупность всех r-элементных подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Представим $T(n, r)$ в виде

$$T(n, r) = T_1(n, r) \cup T_2(n, r), \qquad /17/$$

где $T_1(n, r)$ есть совокупность таких подмножеств из $T(n, r)$, в каждом из которых содержится, по крайней мере, один интервал длины 3 или более, а $T_2(n, r)$ есть множество остальных подмножеств из $T(n, r)$.

Л е м м а 4. При $n \to \infty$ и $r = o(n^{2/3})$ справедливо соотношение

$$|T_1(n, r)| = o(|T(n, r)|).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое множество из $T_1(n, r)$, очевидно, можно получить следующим образом. Сначала выбирается интервал длины 3 (это можно сделать n способами). Затем среди оставшихся $n-3$ элементов из $\mathfrak{M}$ отбирается $r-3$ элемента (имеется C_{n-3}^{r-3} таких возможностей). Следовательно,

$$|T_1(n, r)| < nC_{n-3}^{r-3} = o(C_n^r) \quad (\text{ибо } r = o(n^{2/3})).$$

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $|T(n, r)| = C_n^r$.

Обозначим через $T(n, r, s)$ совокупность тех множеств из $T_2(n, r)$, в которых содержится точно по s интервалов длины 2, $0 \le s \le r/2$.

Л е м м а 5. Если $n \to \infty$, а $r < c\sqrt{n}$, где c - произвольная положительная константа, то $|T(n, r, 0)| \sim C_n^r e^{-r^2/n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на использовании принципа включения и исключения. Все интервалы длины 2, образованные из элементов множества $\mathfrak{M}$, произвольным образом перенумеруем числами 1, 2, ..., n. Обозначим через $T(n, r, i_1, \ldots, i_s)$ совокупность всех тех r-элементных подмножеств из $\mathfrak{M}$, которые входят в $T_2(n, r)$ и в каждом из которых содержатся i_1-й, i_2-й, ..., i_s-й интервалы длины 2. Пусть, далее,

$$\mathcal{U}(n, r, s) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le n} |T(n, r, i_1, \ldots, i_s)|. \qquad /18/$$

Тогда согласно принципу включения и исключения имеем

$$|T(n, r, 0)| = |T_2(n, r)| + \sum_{s=1}^{r/2} (-1)^s\, \mathcal{U}(n, r, s) \qquad /19/$$

Теперь будем различать два случая:

1). $0 \le r < \sqrt[3]{n}$; 2). $\sqrt[3]{n} < r \le c\sqrt{n}$.

Рассмотрим первый случай. Каждое r -элементное подмножество из $\mathfrak{M}$, которое состоит из s интервалов длины 2 и $r-2s$ интервалов длины I, можно, очевидно, получать следующим образом:

а) из множества $\mathfrak{M}$ выбирается s интервалов длины 2 (имеется не более C_n^s возможностей):

б) из оставшихся $n-2s$ элементов множества $\mathfrak{M}$ отбирается $r-2s$ элементов (имеется не более C_n^{r-2s} возможностей).

Поэтому

$$|\sum_{s=1}^{r/2}(-1)^s U(n,r,s)| < \sum_{s=1}^{r/2} C_n^s C_n^{r-2s} =$$

$$= \text{(ибо } r<\sqrt[3]{n}\text{)} = O(C_n^r); \qquad /20/$$

Отсюда, а также из /I9/ и соотношения

$$|T_2(n,r)| = |T(n,r)| - |T_1(n,r)| \sim \text{(см.лемму 4)} \sim C_n^r \qquad /2I/$$

получаем $|T(n,r,0)| \sim C_n^r$. Наконец, для завершения доказательства леммы при $r<\sqrt[3]{n}$ остается воспользоваться очевидным соотношением $C_n^r \sim C_n^r e^{-r^2/n}$.

Рассмотрим теперь второй случай. Как и в первом случае, убеждаемся, что

$$|\sum_{s=\ln n}^{r/2}(-1)^s U(n,r,s)| = O(C_n^r).$$

Вместе с тем при $r \le c\sqrt{n}$ и $n \to \infty$ имеем

$$C_n^r e^{-r^2/n} > C_1 C_n^r .$$

Поэтому

$$|\sum_{s=\ln n}^{r/2}(-1)^s U(n,r,s)| = O(C_n^r e^{-r^2/n}).$$

Отсюда, из /I9/ и леммы 4 следует, что для доказательства леммы 5 остается убедиться в справедливости соотношения

$$|T_2(n,r)| + \sum_{s=1}^{\ln n}(-1)^s U(n,r,s) \sim C_n^r e^{-r^2/n} . \qquad /22/$$

Для этого оценим величину $U(n,r,s)$. С одной стороны, повторяя рассуждения, проведенные при рассмотрении первого случая, получаем

$$U(n,r,s) < C_n^s C_n^{r-2s} < C_n^s C_n^r \left(\frac{r}{n}\right)^{2s} . \qquad /23/$$

С другой стороны, покажем, что

$$U(n,r,s) > C_n^s C_n^r \left(\frac{r}{n}\right)^{2s}\left(1 - \frac{C_2 \ln^2 n}{\sqrt[4]{n}}\right) \qquad /24/$$

Предварительно введем следующее понятие. Пусть J_1 и J_2 - два произвольных интервала, состоящие из элементов множества $\mathfrak{M}$.

Скажем, что $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ разделены, если модуль разности между любым числом из $\mathcal{I}_1$ и любым числом из $\mathcal{I}_2$ не меньше 2.

Легко понять, что только те слагаемые $|T(n,r,i_1,\dots,i_s)|$ из /18/ отличны от нуля, когда i_1-й, i_2-й, ... , i_s-й интервалы попарно разделены. Таким образом, число ненулевых слагаемых в /18/ равно числу выбора s попарно разделенных интервалов длины 2 из $\mathfrak{M}$. Если обозначить это число через $M(n,s)$, а через $M^*(n,s)$ обозначить число таких способов выбора s интервалов длины 2, среди которых присутствует хотя бы одна пара неразделенных интервалов, то $M(n,s)=C_n^s-M^*(n,s)$. Любая совокупность из s интервалов длины 2, которая учитывается в $M^*(n,s)$, может быть получена следующим образом. Сначала выбирается пара неразделенных интервалов длины 2 (имеется, очевидно, не более $5n$ возможностей). Затем отбираются остальные $s-2$ интервала длины 2 (имеется менее C_n^{s-2} возможностей). Поэтому

$$M(n;s) > C_n^s - 5nC_n^{s-2} > (\text{ибо } s<\ln n) > C_n^s\left(1-\frac{c_2\ln^2 n}{n}\right). \qquad /25/$$

Оценим снизу величину $|T(n,r,i_1,\dots,i_s)|$ в случае, когда i_1-й, ... , i_s-й интервалы длины 2 попарно разделены. Для этого введем множество $T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)$, состоящее из следующих r-элементных подмножеств R в $\mathfrak{M}$. Подмножество $R\in T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)$, если и только если в нем присутствуют все числа из i_1-го, ..., i_s-го интервалов и в нем есть хотя бы один интервал длины не менее 3.

Из определения множеств $T(n,r,i_1,\dots,i_s)$, $T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)$ и того факта, что число всех r-элементных подмножеств из $\mathfrak{M}$, в которые входят элементы i_1-го, ... , i_s-го интервалов, равно C_{n-2s}^{r-2s}, следует, что

$$|T(n,r,i_1,\dots,i_s)| = C_{n-2s}^{r-2s} - |T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)|. \qquad /26/$$

Оценим сверху величину $|T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)|$. Любая совокупность из $T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)$ может быть получена следующим образом. Сначала выбирается интервал длины 3, а затем отбирается недостающее число элементов из $\mathfrak{M}$. Воспользовавшись этим, нетрудно видеть, что

$$|T^*(n,r,i_1,\dots,i_s)| < nC_{n-2s}^{r-2s-3} + 2sC_{n-2s}^{r-2s-1}$$

Отсюда и из /25/, /26/ получаем

$$U(n,r,s) > C_n^s\left(1-\frac{c_2\ln^2 n}{n}\right)\left(C_{n-2s}^{r-2s} - nC_{n-2s}^{r-2s-3} - 2sC_{n-2s}^{r-2s-1}\right).$$

Наконец, воспользовавшись тем, что $s<\ln n$ и $r<c\sqrt{n}$, нетрудно убедиться в том, что правая часть последнего неравенства может быть заменена на правую часть неравенства /24/. Кроме того, используя /23/ и /24/, убеждаемся в том, что

$$\sum_{s=1}^{\ln n}(-1)^s \mathcal{U}(n,r,s) < C_n^r(e^{-r^2/n}-1)(1-o(1)),$$
$$\sum_{s=1}^{\ln n}(-1)^s \mathcal{U}(n,r,s) > C_n^r(e^{-r^2/n}-1)(1+o(1)).$$

Из /21/ и последних двух неравенств следует справедливость соотношения /22/. Тем самым лемма доказана.

Л е м м а 6. Если $n \to \infty$, $\sqrt[3]{n} < r < c\sqrt{n}$, где c -произвольная положительная константа, и $0 < s < \log_2 n$, то

$$|T(n,r,s)| \sim \frac{C_n^r}{s!\, e^{r^2/n}}\left(\frac{r^2}{n}\right)^s$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все множества из $T_2(n,r)$, которые состоят из s интервалов длины 2 и $r-2s$ интервалов длины 1, можно получить следующим образом:

1. Отбирается s попарно раздельных интервалов длины 2 каждый. Число таких возможностей, как мы уже знаем, асимптотически равно C_n^s.

2. Отбирается $r-2s$ попарно разделенных интервалов длины 1 каждый. Согласно лемме 5 число таких возможностей асимптотически равно

$$C_n^{r-2s}/e^{(r-2s)^2/n} \sim C_{n-s}^{r-2s}\, e^{-r^2/n}$$

Следовательно,

$$|T(n,r,s)| \sim C_n^s\, C_{n-s}^{r-2s}\, e^{-r^2/n}$$

Так как при $s < \log_2 n$ и $r \geq \sqrt[3]{n}$

$$C_{n-s}^{r-2s} \sim C_n^r\left(\frac{r}{n}\right)^{2s}, \qquad C_n^s \sim n^s/s!,$$

то

$$|T(n,r,s)| \sim C_n^r\, r^{2s}/(n^s\, s!\, e^{r^2/n})$$

Лемма доказана.

Теперь уже нетрудно доказать теорему I. Будем различать следующие случаи:

1). $r < \sqrt[3]{n}$; 2). $\sqrt[3]{n} < r < c\sqrt{n}$.

<u>Первый случай</u>. Представим $\sum$ из /15/ в виде $\sum = \sum' + \sum''$, где $\sum'$ берется по тем наборам из $T_2(n,r)$, которые состоят из r интервалов, а $\sum''$ берется по остальным наборам из $T_2(n,r)$. Вычислим теперь каждую сумму в отдельности. Согласно лемме 5 число слагаемых в $\sum'$ асимптотически равно $C_n^r e^{-r^2/n}$. Отсюда, используя /16/, получаем

$$\sum{}' |R^*(S_1,\dots,S_r)| \sim C_n^r (n-r-1)!\, 2^{r-1}/e^{2+r^2/n}$$
$$\sim (\text{ибо } r < \sqrt[3]{n}) \sim (n-1)!\, 2^{r-1}/(r!\, e^{2+r^2/2n}). \qquad /27/$$

Все наборы (и кое-какие другие наборы), по которым берется $\sum''$, мож-

но получить следующим образом:

1. Отбирается интервал длины 2 (имеется n возможностей).

2. Из оставшихся $n-2$ элементов множества $\mathfrak{M}$ отбирается $\tau-2$ элемента (имеется $C_{n-2}^{\tau-2}$ возможностей).

Поэтому число слагаемых в $\sum'$ не превосходит величины

$$n\,C_{n-2}^{\tau-2} < n\,C_n^{\tau}\,\frac{\tau^2}{n^2} < C_n^{\tau}\,/\sqrt[3]{n}$$

Отсюда с использованием /16/ при $\vartheta = \tau - 1$ получаем

$$\sum{}'\,|R^*(S_1,\ldots,S_\tau)| < C_n^{\tau}(n-\tau-1)!\,2^{\tau-2}/(e^2\sqrt[3]{n}) =$$

$$= O((n-1)!\,2^{\tau-1}/(\tau!\,e^{2+\tau^2/2n})). \qquad /28/$$

Из /27/ и /28/ следует справедливость теоремы I при $\tau < \sqrt[3]{n}$.

Второй случай. Представим $\sum$ из /15/ в виде $\sum = \sum^* + \sum^{**}$, где $\sum^*$ берется по тем наборам из $T_2(n,\tau)$, каждый из которых состоит не менее чем из $\tau - \log_2 n$ интервалов, а $\sum^{**}$ берется по всем остальным наборам. Теперь, используя /16/ и лемму 6, имеем

$$\sum{}^*|R^*(S_1,\ldots,S_\tau)| \sim \sum_{s=0}^{\log_2 n} \frac{C_n^{\tau}(n-\tau-1)!\,2^{\tau-s-1}}{e^{2+\tau^2/n}\,s!}\left(\frac{\tau^2}{n}\right)^s \sim$$

$$\sim (n-1)!\,2^{\tau-1}/(\tau!\,e^{2+\tau^2/2n}) \qquad /29/$$

Оценим $\sum^{**}$. Сначала убедимся в том, что общее число тех наборов из $T_2(n,\tau)$, по которым берется $\sum^{**}$, есть $O(C_n^{\tau})$. В самом деле, все эти наборы можно получить следующим образом:

1. Отбирается s интервалов длины 2 (имеется не более C_n^s возможностей).

2. Из оставшихся $n-2s$ элементов множества $\mathfrak{M}$ отбирается $\tau-2s$ элементов (имеется не более $C_n^{\tau-2s}$ возможностей).

Остальные наборы, по которым берется $\sum^{**}$, являются такими, что в каждом из них содержится интервал длины 3 или более. Согласно лемме 4 число таких наборов есть $O(C_n^{\tau})$.

Таким образом, общее число наборов, по которым берется $\sum^{**}$, не превосходит

$$C_n^s\,C_n^{\tau-2s} + O(C_n^{\tau}) = O(C_n^{\tau}).$$

Отсюда и из /16/ следует, что

$$\sum{}^{**}|R^*(S_1,\ldots,S_\tau)| = O((n-1)!\,2^{\tau-1}/e^{2+\tau^2/2n}\,\tau!).$$

Таким образом, с учетом /29/ получаем, что при $\sqrt[3]{n} < \tau < c\sqrt{n}$

$$H_n(\tau) \sim (n-1)!\,2^{\tau-1}/(\tau!\,e^{2+\tau^2/2n}).$$

Тем самым теорема I полностью доказана.

§ 5. О неприменимости неравенства Чебышева

Пусть $G(n,k)$ означает множество всех неориентированных графов (без петель и кратных ребер) с n нумерованными вершинами и k реб-

рами. Если считать, что каждый граф $G \in G(n,k)$ выбирается случайно так, что все выборки равновероятны и независимы, то при любом u 0 для случайной величины $\xi(n,k)$, равной числу гамильтоновых циклов в случайно выбранном графе, справедливо следующее неравенство Чебышева:

$$P\left\{|\xi(n,k)-M\xi(n,k)|\geq u\right\}\leq \mathcal{D}\xi(n,k)/u^2,$$

где $M\xi(n,k)$ и $\mathcal{D}\xi(n,k)$ суть математическое ожидание и дисперсия величины $\xi(n,k)$. Полагая $u=\frac{1}{2}M\xi(n,k)$, имеем

$$P\left\{|\xi(n,k)-M\xi(n,k)|\geq \frac{1}{2}M\xi(n,k)\right\}\leq 4\mathcal{D}\xi(n,k)/M^2\xi(n,k),$$

а следовательно,

$$P\left\{\xi(n,k)=0\right\}\leq 4\mathcal{D}\xi(n,k)/M^2\xi(n,k).$$

Таким образом, справедливость гипотезы, высказанной в начале настоящей статьи, была бы установлена, если бы удалось доказать справедливость соотношения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathcal{D}\xi(n,k)/M^2\xi(n,k)=0 \qquad /30/$$

при $k\geq n(\ln n+c)$.

Известно (см., например, [10], стр. 233), что

$$\mathcal{D}\xi(n,k)=M\xi^2(n,k)-M^2\xi(n,k).$$

Следовательно, соотношение /30/ эквивалентно равенству

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M\xi^2(n,k)/M^2\xi(n,k)=1. \qquad /31/$$

К сожалению, это равенство имеет место не для всех $k\in[n(\ln n+c), C_n^2]$, а только для таких k, когда $\lim_{n\to\infty} k/n^{3/2}=\infty$. Поэтому в случае $\lim_{n\to\infty} k/n^{3/2}<\infty$ справедливость сформулированной гипотезы нельзя доказать с привлечением лишь указанного неравенства Чебышева. Мы не будем выяснять невыполнимость равенства /31/ при всевозможных k, а остановимся лишь на случае, когда $k=[n\sqrt{n}]$.

Итак, пусть $C(G)$ означает число гамильтоновых циклов в графе $G\in G(n,k)$. Тогда

$$M\xi(n,k)=\frac{1}{|G(n,k)|}\sum_{G\in G(n,k)} C(G). \qquad /32/$$

Обозначим через $G(C)$ число графов $G\in G(n,k)$, в которых содержится гамильтонов цикл C. Тогда, очевидно, имеем

$$\sum_{G\in G(n,k)} C(G) = \sum G(C), \qquad /33/$$

где суммирование в правой части осуществляется по всем гамильтоновым циклам. Так как $G(C)=C_{C_n^2-n}^{k-n}$, число гамильтоновых циклов в полном n-вершинном графе равно $(n-1)!/2$, а $|G(n,k)|=C_{C_n^2}^{k}$, то из /32/ и /33/ следует, что

$$M\xi(n,k)=(n-1)!\,C_{C_n^2-n}^{k-n}\,/2C_{C_n^2}^{k}. \qquad /34/$$

Далее, пусть $G(n,k,C_1,C_2)$ означает множество тех графов $G\in G(n,k)$,

в каждом из которых имеются гамильтоновы циклы C_1 и C_2. Тогда, очевидно,

$$M\xi^2(n,\kappa) = \sum |G(n,\kappa,C_1,C_2)| \,/\, |G(n,\kappa)| =$$

$$= \sum |G(n,\kappa,C_1,C_2)| \,/\, C^{\kappa}_{C_n^2}, \qquad /35/$$

где суммирование осуществляется по всем упорядоченным парам гамильтоновых циклов (C_1, C_2) (не исключается случай, когда $C_1 = C_2$). Так как

$$\sum_{(C_1,C_2)} |G(n,\kappa,C_1,C_2)| = \sum_{C_1}\sum_{C_2} |G(n,\kappa,C_1,C_2)|,$$

число циклов C_1 равно $(n-1)!/2$, а величина $\sum_{C_2} |G(n,\kappa,C_1,C_2)|$ не зависит от вида цикла C_1, то

$$\sum_{C_1}\sum_{C_2} |G(n,\kappa,C_1,C_2)| =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2} \sum_{C_2} |G(n,\kappa,C,C_2)|.$$

где C есть цикл, который мы уже рассматривали ранее. Следовательно,

$$M\xi^2(n,\kappa) = \frac{(n-1)!}{2} \sum_{C_2} |G(n,\kappa,C,C_2)| \,/\, C^{\kappa}_{C_n^2}$$

Пусть

$$\sum_{C_2} |G(n,\kappa,C,C_2)| = \sum_{t=0}^{n} \sum_{C_2}{}_{t} |G(n,\kappa,C,C_2)|,$$

где $\sum_{C_2}{}_t$ означает суммирование по тем гамильтоновым циклам C_2, которые имеют по t общих ребер с циклом C. Таким образом

$$M\xi^2(n,\kappa) > \frac{(n-1)!}{2} \sum_{t=0}^{2\sqrt{n}} \sum_{C_2}{}_t |G(n,\kappa,C,C_2)| \,/\, C^{\kappa}_{C_n^2}$$

Так как число графов, в которых содержится цикл C_2, имеющий t общих ребер с циклом C, равно $C^{\kappa-2n+t}_{C_n^2-2n+t}$, то, используя теорему I, получаем

$$\sum_{C_2}{}_t |G(n,\kappa,C,C_2)| \sim \frac{(n-1)!\, 2^{t-1}}{t!\, e^{2+t^2/2n}}\, C^{\kappa-2n+t}_{C_n^2-2n+t}$$

Следовательно,

$$M\xi^2(n,\kappa) > \sum_{t=0}^{2\sqrt{n}} \frac{\{(n-1)!\}^2 2^t}{t!\, 4e^{2+t^2/2n}}\, C^{\kappa-2n+t}_{C_n^2-2n+t} (1-o(1))/C^{\kappa}_{C_n^2}.$$

Отсюда и из /34/ получаем

$$\frac{M\xi^2(n,\kappa)}{M^2\xi(n,\kappa)} > \sum_{t=0}^{2\sqrt{n}} \frac{2^t C^{\kappa}_{C_n^2}\, C^{\kappa-2n+t}_{C_n^2-2n+t}}{t!\, e^{t+t^2/2n} (C^{\kappa-n}_{C_n^2-n})^2} \cdot (1-o(1)) =$$

$$= \sum_{t=0}^{2\sqrt{n}} \frac{2^t \prod_{s=1}^{n-1} (C_n^2 - s) \prod_{s=0}^{n-t-1} (\kappa - n - s)}{t!\, e^{t+t^2/2n} \prod_{s=0}^{n-t-1} (C_n^2 - n - s) \prod_{s=0}^{n-1} (\kappa - s)} (1-o(1)). \qquad /36/$$

В свою очередь, при $t = O(n)$ имеют место следующие легко проверяемые

соотношения:

$$\prod_{s=0}^{n-1}(C_n^2-s) \sim (C_n^2)^n/e, \qquad /37/$$

$$\prod_{s=0}^{n-r-1}(C_n^2-n-s) \sim (C_n^2)^{n-r}/e^5. \qquad /38/$$

Далее имеем

$$\prod_{s=0}^{n-r-1}(k-n-s)=(k-n)^{n-r}\prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-\frac{s}{k-n}\right)=$$

$$=(k-n)^{n-r}exp\left\{\sum_{s=1}^{n-r-1} ln\left(1-\frac{s}{k-n}\right)\right\}.$$

Используя разложение

$$ln\left(1-\frac{s}{k-n}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-n}\right)^j/j$$

и производя тождественные преобразования, убеждаемся в том, что

$$\prod_{s=0}^{n-r-1}(k-n-s)\sim(k-n)^{n-r}exp\left\{-\frac{(n-r)^2}{2(k-n)}-\frac{(n-r)^3}{6(k-n)^2}-O(1)\right\}. \qquad /39/$$

Наконец, повторяя рассуждения, проведенные при установлении /39/, убеждаемся в справедливости соотношения

$$\prod_{s=0}^{n-1}(k-s)\sim k^r(k-n)^{n-r}exp\left\{\frac{(n-r)^r}{2(k-n)}-\frac{(n-r)^3}{6(k-n)^2}\right\}. \qquad /40/$$

Подставляя /37/ - /40/ в /36/ и производя сокращения, получаем

$$\frac{M\xi^2(n,k)}{M^2\xi(n,k)}>\sum_{r=0}^{2\sqrt{n}}\frac{2^r e^2 (C_n^2)^r}{r!\,e^{r^2/2n}\,k^r\,exp\left\{\frac{(n-r)^2}{k-n}+O(1)\right\}}=$$

$$=\sum_{r=0}^{2\sqrt{n}}\frac{n^{2r}(1-O(1))}{r!\,e^{r^2/2n}\,k^r exp\left\{(n-r)^2/(k-n)\right\}}$$

В свою очередь, при $r<2\sqrt{n}$ и $k=[n\sqrt{n}]$ имеем

$$exp\{(n-r)^2/(k-n)\}\sim exp\left(\frac{n^2}{k}+1-\frac{2nr}{k}\right).$$

Поэтому при больших n

$$\frac{M\xi^2(n,k)}{M^2\xi(n,k)}>\frac{1}{exp\left(\frac{n^2}{k}+1\right)}\sum_{r=0}^{2\sqrt{n}}\frac{n^{2r}e^{2nr/k}}{r!\,e^{r^2/2n}k^r}(1-O(1))>$$

$$>\frac{1}{exp\left(\frac{n^2}{k}+1\right)}\sum_{r=0}^{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}\frac{n^{2r}e^{2nr/k}}{r!\,k^r\,e^{(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})^2/2n}}(1-O(1))\sim$$

$$\sim\text{(ибо } exp\{(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})^2/2n\}\sim\sqrt{e}\text{)}\sim$$

$$\sim\frac{1}{exp\left(\frac{n^2}{k}+1{,}5\right)}\sum_{r=0}^{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}\frac{n^{2r}e^{2nr/k}}{r!\,k^r} \qquad /41/$$

В свою очередь

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{n^{2r}e^{2nr/k}}{r!\,k^r}=exp\left\{\frac{n^2}{k}e^{2n/k}\right\}.$$

Кроме того, легко проверить, что

$$\sum_{r=\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}^{\infty} \frac{n^{2r} e^{2nr/\kappa}}{r!\,\kappa^{r}} = o\left(\exp\left\{\frac{n^2}{\kappa} e^{2n/\kappa}\right\}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{r=0}^{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}} \frac{n^{2r} e^{2nr/\kappa}}{r!\,\kappa^{r}} \sim \exp\left\{\frac{n^2}{\kappa} e^{2n/\kappa}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n^2}{\kappa} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{\kappa}\right)^{s} / s!\right\} = (\text{ибо } \kappa = [n\sqrt{n}]) \sim$$

$$\sim \exp\left\{\frac{n^2}{\kappa}\left(1+\frac{2n}{\kappa}\right)\right\} \sim \exp\left(\frac{n^2}{\kappa}+2\right).$$

Отсюда и из /41/ получаем

$$\frac{M\xi^2(n,\kappa)}{M^2\xi(n,\kappa)} > \left\{\exp\left(\frac{n^2}{\kappa}+2\right) / \exp\left(\frac{n^2}{\kappa}+1{,}5\right)\right\}(1-o(1)) =$$

$$= \sqrt{e}\,(1-o(1)) \geqslant C > 1.$$

Тем самым невыполнимость равенства /31/ и, следовательно, неприменимость неравенства Чебышева для доказательства гипотезы установлены.

Автор выражает благодарность В.А.Перепелице за внимательный просмотр рукописи и ряд полезных замечаний.

Поступила в ред.-изд.отдел
12 ноября 1972 г.

Литература

1. Palasti I.,A lineáris teljes gráf Hamilton-köreinek közös éleiről. Matematikai Lapok, 1969, v. 20, N 1-2, c. 71-98.

2. Palasti I., Adott Hamilton-körrel egy közös tartalmazo Hamilton-körök leszámlálása. Matematikai Lapok, 1969, v. 20, N3-4, c. 289-304.

3. Palasti I.,On the common edges of Hamilton-cycles of complete linear graph. Combinatorical Theory and its Applications, North-Holland Publ., Amsterdam-London, 1970, c. 829-868.

4. Palasti, Recursion formula for enumeration of the number of possible Hamiltonian cycles having common edges with a given one.

5. Palasti I., Enumeration of the number of Hamilton-cycles having a common edge with a given cycles. Congés International des Mathématiciens, Nice, 1970, p. 261.

6. Nemetz T., On the number of Hamilton-cycles having common edges of given number with a fixed Hamilton-cycle. Matematikai Lapok, 1970, v. 21, N 1-2, p. 65-81.

7. Palasti I., On Hamilton-cycles of random graphs. Periodica Mathematica Hungarica, 1971, v. I, N 2, p. 107-112.

8. Перепелица В.А. О двух задачах из теории графов. ДАН СССР, 1970, т. 194, № 6.

9. Moon J.W., Almost all graphs have a spanning cycle. Canad. Math. Bull., 1972, v. 15, N1, p. 39-41.

10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. I. М., 1967.