Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1974 г. выпуск 13.
УДК.519.3.

# О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА Л.С.ПОНТРЯГИНА

В.П.Носоченко

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot u_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad /1/$$

с граничными условиями

$x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad x_i(t_1) = x_{i1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$
при ограничении на управляющие параметры $u \in \Omega(u_1, \ldots, u_m)$.

Пусть правые части системы /1/ является непрерывно-дифференцируемыми функциями в $R^n \times R^1 \times R^m$, $x_{i0}$, $x_{i1}$, $t_0$ – заданные фиксированные числа, где $x_{i0}, x_{i1} \in R^n$, $t_0 \in R^1$,

$$\Omega(u_1, \ldots, u_m) = \left\{ u : \sum_{k=1}^{m} u_k^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Рассмотрим для системы /1/ задачу об оптимальном быстродействии Обозначим

$$h_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = f_i(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k$$

и определим

$\Delta = \Delta(h_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m), \Omega, x_0, x_1)$
как множество всех управлений $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, определенных на различных отрезках $t_0 \leq t \leq t_1$, таких, что при $\tau_0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \tau_1$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad x_i(t_1) = x_{i1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что $\Delta$ не пусто, и для заданной константы $A$ рассмотрим класс $\Delta(Lip\,A) \subset \Delta$ управлений $u(t)$, непрерывных и удовлетворяющих условию Липшица

$$|u(t') - u(t'')| \leq A\,|t' - t''|$$

для всех пар $t'$, $t''$ из некоторого отрезка $[t_0, t_1] \subset [\tau_0, \tau_1]$.

Будем считать допустимыми управлениями такие управления $u(t)$, которые принадлежат $\Delta(Lip\,A)$. Управление $u^*(t)$ называется оптимальным, если $t_1^* - t_0 \leq t_1 - t_0$ для каждого управления $u(t)$ из $\Delta(Lip\,A)$.

Предположим, что

а) $\Delta(Lip\,A)$ не пусто,

б) существует такое положительное $B < \infty$, что $|x(t)| < B$ для всех решений $x(t)$, соответствующих управлениям из $\Delta(Lip\,A)$. Тогда, согласно [1], существует оптимальное управление $u^*(t) \subset \Delta(Lip\,A)$.

Введем в рассмотрение вектор $p(t)$, компоненты которого удовлетворяют совокупности дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{p}_i = -\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial h_s(x_1,\dots,x_n;\ u_1,\dots,u_m)}{\partial x_i} \qquad i=1,2,\dots,n. \quad /2/$$

Так как граничные условия для $p(t)$ не заданы, то уравнения /2/ определяют семейство решений $p(t)$. Рассмотрим функцию

$$H(x,p,u) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} p_i u_k$$

при помощи которой уравнения /I/, /2/ можно записать в виде

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H(x,p,u)}{\partial p_i}, \qquad i=1,2,\dots,n, \quad /3/$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial x_i}, \qquad i=1,2,\dots,n. \quad /4/$$

Пусть $u^*(t)$ - оптимальное управлейие. Тогда из принципа максимума следует, что существует непрерывное нетривиальное решение $p^*(t) = \{p_1^*(t), p_2^*(t),\dots,p_n^*(t)\}$ сопряженной системы /4/ такое, что для любого момента времени $t\in[t_0, t_1]$ выполнено условие максимума

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t)) = \max_{u\subset\Omega} H(x^*(t), p^*(t), u),$$

где $x^*(t)$ - оптимальная траектория, соответствующая оптимальному управлению $u^*(t)$.

Условие максимума позволяет определить оптимальное управление $u^*(t)$. Для этого в каждый момент времени $t$ необходимо найти $u^*$ доставляющее максимум функции

$$H(x^*(t), p^*(t), u) = \sum_{i=1}^{n} p_i^*(t) f_i(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} p^*(t) u_k$$

при условии $u_1^2(t)+u_2^2(t)+\dots+u_m^2(t)=1$. Для решения этой задачи рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(p^*(t),\mu(t),u(t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} p_i^*(t) u_k(t) + \mu(t)\Big(\sum_{k=1}^{m} u_k^2(t) - 1\Big),$$

где $\mu(t)$ - множитель Лагранжа.

Задача нахождения максимума функции $H(x^*(t), p^*(t), u)$ по $u\subset\Omega$ эквивалентна нахождению $\max\limits_{u}\min\limits_{\mu} L(p^*(t), u(t), \mu(t))$.

Приравнивая нулю частные производные по $u_k$ и $\mu$, получаем:

$$\frac{\partial L(p^*(t), \mu^*(t), u^*(t))}{\partial u_k(t)} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} p_i^*(t) + 2\mu^*(t) u_k^*(t) = 0 \quad /5/$$

$$\frac{\partial L(p^*(t), \mu^*(t), u^*(t))}{\partial \mu(t)} = \sum_{k=1}^{m} u_k^{*2}(t) - 1 = 0 \quad /6/$$

Решая совместно /5/, /6/ и учитывая, что максимум выражения

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} p_i^*(t) u_k(t)$$

достигается при одинаковых знаках $u$ и $p^*$, получаем

$$\mu^*(t)=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ik}p_i^*(t)\right)^2}}{2},\quad u_k^*(t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_{ik}p_i^*(t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ik}p_i^*(t)\right)^2}} \qquad /7/$$

Так как оптимальное время перехода из точки $x_0=\{x_{10},\dots,x_{n0}\}$ в точку $x_1=\{x_{11},\dots,x_{n1}\}$ неизвестно, то требуется еще одно дополнительное условие, которое позволило бы определить время $t_1^*$. Таким условием является требование (см.[2])

$$H(x^*(t_1),\ u^*(t_1),\ p^*(t_1))=1 \qquad /8/$$

Подставляя $u_k^*(t)$, определенные по формуле /7/, в уравнение /8/ получаем дополнительное краевое условие, которое в совокупности с исходными краевыми условиями

$$x_i(t_0)=x_{i0},\quad x_i(t_1)=x_{i1},\quad i=1,2,\dots,n,$$

позволяет найти решение системы /3/, /4/ и оптимальное время $t_1^*$. Поскольку решение системы /3/, /4/ полностью определяется начальными условиями $x(t_0)$, $p^*(t_0)$ и временем $t_1^*$, то задача состоит в нахождении $p_0^*=p^*(t_0)$ и времени $t_1^*$ таких, чтобы решение $x(t_1^*)$ совпадало с заданным $x(t_1)$ на правом конце. Для нахождения $p_0^*$, $t_1^*$ используем итерационный процесс, основанный на методе Ньютона-Рафсона. Как и во всех задачах, в которых приходится рассматривать итерационный процесс, проблемой является выбор начального приближения. В нашем случае для решения нелинейной краевой задачи в качестве начального приближения для $p_0^*$, $t_1^*$ принимается решение $p_0^*$, $t_1^*$ линейной краевой задачи. Последняя получается в результате линеаризации системы /I/ относительно приближенного решения $x^0(t)$, являющегося решением свободной системы

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,\dots,x_n),\qquad i=1,2,\dots,n, \qquad /9/$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0)=x_{i0},\qquad i=1,2,\dots,n.$$

Линеаризованная система при этом имеет вид:

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}u_k+c_i,\qquad i=1,2,\dots,n, \qquad /10/$$

где

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{(x_1^0(t),\dots,x_n^0(t))},\quad c_i=f_i(x_1^0(t),\dots,x_n^0(t))-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{(x_1^0(t),\dots,x_n^0(t))}\cdot x_j^0(t)$$

Сопряженная система в этом случае принимает вид:

$$\dot{p}_i=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_j,\qquad i=1,2,\dots,n. \qquad /II/$$

Обозначим

$$\eta_i(x_1,\dots,x_n;\ u_1,\dots,u_m)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+\sum_{k=1}^{m} b_{ik}u_k+c_i\ ,\qquad i=1,2,\dots,n.$$

Производя те же выкладки, что и для нелинейной задачи, получаем оптимальное управление для линейной задачи в виде /7/. Но так как оптимальное управление зависит от $p^*(t)$ и $t_1^*$, а $p^*(t)$, как решение системы /II/, в свою очередь, зависит от $p_0^*=p^*(t_0)$, то нашей целью является нахождение $p_0^*$, $t_1^*$. Задавая всевозможные $p_0, t_1$ и решая систему /IO/, /II/, получаем поле решений $\tilde{x}(p_0,t_1)$, которое в дальнейшем используется для итераций. Таким образом, чтобы найти $p_0^*$, $t_1^*$, мы должны решить векторное уравнение

$$g(p_0,t_1)=x_1^*, \qquad /12/$$

где $g=\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n,\tilde{H}\}$, $\quad x_1^*=\{x_1,\dots,x_n,1\}$.

Обозначим $\lambda_{i0}=p_{i0}$, $\lambda_{n+1,0}=t_1$. Тогда /I2/ можно записать в виде:

$$g(\lambda_0)=x_1^*, \qquad /13/$$

где $\lambda_0=\{\lambda_{10},\lambda_{20},\dots,\lambda_{n+1,0}\}$.

Как отмечалось выше, для решения векторного уравнения /I3/, согласно [3], используем итерационный процесс, основанный на методе Ньютона-Рафсона, который имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda_0^k)\,\delta\lambda_0^k&=x_1^*-g(\lambda_0^k),\\ \lambda_0^{k+1}&=\lambda_0^k+\delta\lambda_0^k,\end{aligned} \qquad /14/$$

$k$ - номер итерации.

Предполагается, что $\lambda_0^0$ известно. Здесь $\Gamma(\lambda_0^k)$ есть матрица Якоби вектор-функции $g(\lambda_0^k)$, которая определяется следующим образом.

Предположим, что решение уравнений системы /I/ удовлетворяет всем необходимым условиям непрерывности и дифференцируемости. Тогда согласно [4] имеем

$$\left[\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \lambda_0^k}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial x^k}{\partial \lambda_0^k}\right]=\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial x^k}{\partial \lambda_0^k}\right]+\left[\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}\right]\left[\frac{\partial \lambda^k}{\partial \lambda_0^k}\right] \qquad /15/$$

с начальными условиями:

$$\left[\frac{\partial x^k}{\partial \lambda_0^k}\right]=\left[0\right],\qquad \left[\frac{\partial \lambda^k}{\partial \lambda_0^k}\right]=\left[1\right]$$

Данное матричное уравнение интегрируется одновременно с основными дифференциальными уравнениями /IO/, /II/, а вычисление коэффициентов $\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ производится вдоль траекторий, определяемых решением $x^k(x_0,\lambda_0^k)$ и $\lambda^k(\lambda_0^k,x_0)$. Добавляя к матрице $\left[\frac{\partial x^k}{\partial \lambda_0^k}\right]$ размерности $n\times(n+1)$ строку, элементами которой являются

$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\lambda^k_{10}}, \dots, \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\lambda^k_{n+1,0}}$ , получаем матрицу $(n+1)$-го порядка, где

$$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\lambda^k_{j0}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i(x_0,\lambda^k_0)\cdot\frac{\partial\eta(x,\lambda)}{\partial\lambda^k_{j0}} + \eta_i(x,\lambda)\frac{\partial\lambda_i(x_0,\lambda^k_0)}{\partial\lambda^k_{j0}}\right),$$

$$j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Полученная матрица есть не что иное, как матрица Якоби вектор-функции $g(\lambda^k_0)$ . Из /14/ видно, что на каждом шаге итерации приходится решать систему линейных алгебраических уравнений $(n+1)$-го порядка относительно $\delta\lambda^k_0$ с матрицей $\Gamma(\lambda^k_0)$ . После того как $\delta\lambda^k_0$ найдено, в итерационную формулу /14/ вводится параметр $0<\beta<1$ и рассматривается функция промаха /невязки/

$$\Phi(k,\beta) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}(g_i(\lambda^k_0+\beta\delta\lambda^k_0) - x^*_i)^2}\,.$$

Вычисляются $\Phi(k,0)$ , $\Phi(k,1)$ . При условии $\Phi(k,1)<\Phi(k,0)$ схема сохраняется, в противном случае вычисляется $\Phi(k,1/2)$ . При условии $\Phi(k,1/2)<\Phi(k,0)$ вновь используется схема Ньютона-Рафсона, в противном случае находится $\Phi(k,1/4)$ и т.д.. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $\Phi(k,\beta)<\varepsilon$ , где $\varepsilon$ - наперед заданное фиксированное число. Найденное $\lambda^*_0$ используется в качестве начального приближения для нелинейной задачи, и весь описанный выше алгоритм нахождения $\lambda^*_0$ повторяется, а вместе с этим определяются оптимальные управление и время.

Введение параметра $\beta$ обосновано тем, что на отдельных этапах итераций величина шага $\delta\lambda^k_0$ оказывается слишком большой и итерационный процесс либо зацикливается, либо расходится в окрестности искомого решения. Последнее связано с тем, что метод Ньютона-Рафсона использует информацию только об исходной точке итерации. На основании этой информации, дающей, по существу, представление о функции в малой окрестности исходной точки, прогнозируется положение нуля, и по найденному направлению производится следующий шаг. В то же время точность тейлоровского разложения функции $g(\lambda^k_0)$ падает по мере удаления от исходной точки. Вышеизложенный метод был применен к решению конкретной задачи, описываемой следующей системой уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha_1}{x_1^2}\left(1+\frac{3\alpha_2}{2x_1^2}+\frac{3\alpha_3}{2x_1^2}\cos(2x_4)\right)+x_1+2x_3+\frac{x_3^2}{x_1}+a_0u_1,$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{\alpha_1\alpha_3}{x_1^4}\sin(2x_4)-2x_2-\frac{x_2x_3}{x_1}+a_0u_2,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{x_3}{x_1}.$$

при ограничении на управляющие параметры $u_1^2+u_2^2-1=0$ и краевых условиях:

$$x_1(0)=x_{10},\qquad x_1(t_1)=-x_{10},$$
$$x_2(0)=x_{20},\qquad x_2(t_1)=x_{20},$$
$$x_3(0)=x_{30},\qquad x_3(t_1)=-x_{30},$$
$$x_4(0)=x_{40},\qquad x_4(t_1)=x_{40},$$

где $x_{i0}$ $(i=1,\dots,4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $a_0$ - фиксированные числа. Линеаризация системы производилась относительно заданного приближенного решения $x^0(t)=(x_1^0,0,0,x_4^0)$, в результате которой линеаризованная система принимает вид:

$$\dot x_1=x_2,$$
$$\dot x_2=3x_1+2x_3-\frac{3\cdot\alpha_1\alpha_3}{2\cdot(x_1^0)^4}\cos(2x_4^0)+a_0u_1,$$
$$\dot x_3=-\frac{\alpha_1\alpha_3}{(x_1^0)^4}\sin(2x_4^0)-2x_2+a_0u_2,$$
$$\dot x_4=\frac{x_3}{x_1^0}.$$

Компоненты вектора оптимального управления $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$ и вектора $p(t)=(p_1(t),\dots,p_n(t))$ имеют вид:

$$p_1(p_0,t)=-3(p_{20}\sin t+(2p_{30}-p_{10})(1-\cos t)-2p_{40}(t-\sin t)/x_1^0+p_{10},$$
$$p_2(p_0,t)=p_{20}\cos t-(2p_{30}-p_{10})\sin t-2p_{40}(1-\cos t)/x_1^0,$$
$$p_3(p_0,t)=p_{30}-2(2p_{30}-p_{10})(1-\cos t)+3p_{40}\cdot t/x_1^0-(2p_{20}+\frac{4p_{40}}{x_1^0})\sin t,$$
$$p_4(p_0,t)=p_{40},$$
$$u_1(t)=\frac{p_2(p_0,t)}{\sqrt{p_2^2(p_0,t)+p_3^2(p_0,t)}},\qquad u_2(t)=\frac{p_3(p_0,t)}{\sqrt{p_2^2(p_0,t)+p_3^2(p_0,t)}}.$$

Функции $p_i(t)$, $i=1,\dots,4$, являются решением системы уравнений:

$$\dot p_1=-3p_2,$$
$$\dot p_2=2p_3-p_1,$$
$$\dot p_3=-2p_2-p_4/x_1^0,$$
$$\dot p_4=0.$$

Начальное приближение $p_{10}^0, p_{20}^0, p_{30}^0, p_{40}^0, t_1^0$, линейной краевой задачи

$$x_1=x_2,$$
$$x_2=3x_1+2x_3+a_0\frac{p_2(p_0,t)}{\sqrt{p_2^2(p_0,t)+p_3^2(p_0,t)}}-\frac{3\cdot\alpha_1\alpha_3}{2(x_1^0)^4}\cos(2x_4^0),$$
$$x_3=-\frac{\alpha_1\alpha_3}{(x_1^0)^4}\sin(2x_4^0)-2x_2+a_0\frac{p_3(p_0,t)}{\sqrt{p_2^2(p_0,t)+p_3^2(p_0,t)}},$$
$$x_4=\frac{x_3}{x_1}$$

при тех же краевых условиях выбирается из условия

$$\sin\frac{t_1}{2}\int_0^{t_1}\gamma(\rho_{10},\ldots,\rho_{40},\xi)\sin\frac{\xi-t_1}{2}\,d\xi+x_{20}\sin^2\frac{t'}{2}+x_{10}\sin\frac{t_1}{2}\cos\frac{t_1}{2}=0,$$

получающегося в результате интегрирования линейной системы с использованием краевых условий. Функция $\gamma(\rho_{10},\ldots,\rho_{40},t)$ при этом имеет вид:

$$\gamma(\rho_{10},\ldots,\rho_{40},t)=\frac{\rho_3(\rho_0,t)\left[\frac{d\rho_2(\rho_0,t)}{dt}\cdot\rho_3(\rho_0,t)-\rho_2(\rho_0,t)\frac{d\rho_3(\rho_0,t)}{dt}\right]}{\sqrt{(\rho_2^2(\rho_0,t)+\rho_3^2(\rho_0,t))^3}}+$$

$$+\frac{2\rho_3(\rho_0,t)\left[\rho_2^2(\rho_0,t)+\rho_3^2(\rho_0,t)\right]}{\sqrt{(\rho_2^2(\rho_0,t)+\rho_3^2(\rho_0,t))^3}}\quad.$$

Поступила в ред.-изд.отдел.
23 сентября 1974 г.

Литература

1. Ли.Е.,Маркус Л. Оптимальное управление нелинейными процессами.-В кн.: Кибернетический сборник. Вып.2, М.,1966.

2. Розоноэр Л.П. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем.-"Автоматика и телемеханика", 1959, т.XX,№10-12.

3. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач. ч.I-II,"Наукова думка". Киев, 1966.

4. Ingram Hugo L. Optimal guindance with transition partial derivative matrices. IAF Paper, 1968, N AD 8, 1-13.