Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г. выпуск I4.
УДК.517.949.2.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

А.А.Ахундов /Минск/

Исследуется задача управляемости систем, состоящих из совокупности дифференциальных и разностных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия относительной управляемости, выраженные через решения определяющего уравнения.

I. Постановка задачи. Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ay(t) + A_1 x(t), \\ y(t) = By(t-h) + B_1 x(t) + B_2 x(t-h) + Cu(t), \quad t \in [0,T] \end{cases} \qquad /1/$$

с начальными условиями:

$$x_0(\cdot) = \{x(\theta) = x_0(\theta), \ -h \le \theta < 0, \ x(0) = x_0\}, \qquad /2/$$

$$y_0(\cdot) = \{y(\theta) = y_0(\theta), \ -h \le \theta < 0\}. \qquad /3/$$

Назовем ее гибридной системой управления. Используя соответствия

$$\begin{aligned} &x(t) \to X_k(s), \ x(t-h) \to X_k(s-h), \ \dot{x}(t) \to X_{k+1}(s), \\ &y(t) \to Y_k(s), \ y(t-h) \to Y_k(s-h), \ u(t) \to U_k(s), \end{aligned} \qquad /4/$$

получим соотношения

$$\begin{cases} X_{k+1}(s) = AY_k(s) + A_1 X_k(s), \\ Y_k(s) = BY_k(s-h) + B_1 X_k(s) + B_2 X_k(s-h) + CU_k(s), \end{cases} \qquad /5/$$

которые назовем определяющей системой уравнений [I] . Начальные условия определим следующим образом:

$$X_i(s) \equiv Y_i(s) \equiv 0 \ \forall s, \ s<0; \ U_0(s) = \begin{cases} E & s=0, \\ 0 & s \ne 0; \end{cases} \qquad /6/$$

$$X_0(s) \equiv U_j(s) \equiv 0 \ \forall s \quad (i = 0,1,2,\dots; \ j = 1,2,3,\dots).$$

О п р е д е л е н и я. I. Система /I/ относительно управляема по x на отрезке $(0,T]$, если для любых начальных функций $x_0(\cdot)$, $y_0(\cdot)$ и для любого n -вектора c существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$ такое, что для соответствующей траектории $x(t)$ выполняется соотношение $x(T) = c$.

2. Система /I/ относительно управляема по y на отрезке $(0,T]$, если для любых начальных функций $x_0(\cdot)$, $y_0(\cdot)$ и для любого n -вектора ℓ существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$ такое, что для существующей траектории $y(t)$ выполняется соотношение $y(T) = \ell$.

3. Система /I/ относительно управляема по $\{x, y\}$ на отрезке $(0,T]$, если для любых начальных функций $x_0(\cdot)$, $y_0(\cdot)$ и n -мерных

векторов c, ℓ существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$ такое, что для существующих траекторий $x(t)$, $y(t)$ выполняются соотношения $x(T)=c$, $y(T)=\ell$.

Ниже выясняются условия относительной управляемости. Везде предполагаем, что $T\in(mh,(m+1)h]$; $m, m>0$ – фиксированное целое число.

2. Относительная управляемость по x на $(0,T]$.

Т е о р е м а I. Система относительно управляема по x на отрезке $(0,T]$ тогда и только тогда, когда

$$\text{ранг}\left\{X_k(s):\ s=0,h,\dots,mh;\ k=0,1,\dots,n(m+1)-1\right\}=n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система /I/–/3/ эквивалентна системе

$$\dot x(t)=\sum_{i=0}^{m}G_i\,x(t-ih)+\sum_{i=0}^{m}P_i\,u(t-ih)+\varphi_m(t) \qquad /7/$$

с начальным условием /2/. Здесь $G_0=A_1+AB_1$, $G_i=AB^{i-1}\{B_2+BB_1\}$; $\varphi_m(t)$ – некоторая функция, полностью определяемая начальными данными /2/, /3/.

Уравнение /7/ получается путем последовательной подстановки $y(t)$ из второго уравнения системы /I/ в первое предполагаем, что $x(t)\equiv y(t)\equiv u(t+h)\equiv 0$ при $t<-h$). Как известно [I], определяющее уравнение системы /7/ имеет вид

$$X_{k+1}(s)=\sum_{i=0}^{m}G_i\,X_k(s-ih)+\sum_{i=0}^{m}P_i\,U_k(s-ih) \qquad /8/$$

с начальными условиями /6/. Критерий относительной управляемости системы /7/ следует из [I,2]. Осталось показать, что множество решений определяющего уравнения /8/ с начальными условиями /6/ полностью совпадет с множеством решений $X_k(\cdot)$ системы /5/ с начальными условиями /6/.

Действительно, после первой подстановки $Y_k(s)$ из второго соотношения системы /5/ в первое получим

$$X_{k+1}(s)=\{A_1+AB_1\}X_k(s)+AB_2X_k(s-h)+ABY_k(s-h).$$

Если $m=0$, то, как следует из начальных условий /6/,

$$X_k(s-h)\equiv Y_k(s-h)\equiv 0.$$

Если $m>0$, то после второй подстановки будем иметь:

$$X_{k+1}(s)=G_0X_k(s)+AB_2X_k(s-h)+AB\{B_1X_k(s-h)+B_2X_k(s-2h)+BY_k(s-2h)\}=$$
$$=G_0X_k(s)+G_1X_k(s-h)+AB\{B_2X_k(s-2h)+BY_k(s-2h)\}.$$

Как и в первом случае, если $m=1$, то

$$X_k(s-2h) \equiv Y_k(s-2h) \equiv 0.$$

Методом индукции нетрудно доказать, что после $m+1$ подстановки полученное соотношение полностью совпадет с соотношением /8/. На этом доказательство утверждения завершается.

3. Относительная управляемость по y на $(0,T]$. Из уравнения /7/ получаем

$$x(t) = \int_0^t \sum_{i=0}^m F(t,\tau+ih)P_i u(\tau)d\tau + c_m(t), \quad t \in [0,T], \qquad /9/$$

где $c_m(t) = \int_0^t F(t,\tau)\varphi_m(\tau)d\tau$, а $F(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = -\sum_{i=0}^m F(t,\tau+ih)G_i, \qquad \tau \le t, \qquad /10/$$

с начальными условиями

$$F(t,t)=E, \qquad F(t,\tau) \equiv 0, \qquad \tau > t. \qquad /11/$$

Нетрудно убедиться, что второе уравнение системы /I/ эквивалентно уравнению

$$y(t) = B_1 x(t) + \sum_{i=1}^m B^{i-1}\{B_2 + BB_1\} x(t-ih) +$$

$$+ \sum_{i=0}^m B^i C u(t-ih) + d_m(t), \qquad /12/$$

здесь $d_m(t)$ - функция полностью определяемая начальными условиями/2//3/. Введем обозначения

$$K_0 = B_1, \quad K_i = B^{i-1}\{B_2 + BB_1\} \quad (i = 1,2,\dots,m). \qquad /13/$$

В этих обозначениях уравнение /12/ примет вид:

$$y(t) = \sum_{\alpha=0}^m K_\alpha x(t-\alpha h) + \sum_{\alpha=0}^m B^\alpha C u(t-\alpha h) + d_m(t). \qquad /14/$$

Учитывая /9/, получим

$$y(t) = \sum_{\alpha=0}^m K_\alpha \int_0^{t-\alpha h} \sum_{i=0}^m F(t-\alpha h,\tau+ih)P_i u(\tau)d\tau + \sum_{\alpha=0}^m B^\alpha C u(t-\alpha h) + d_m(t). \quad /15/$$

Из /15/, используя /11/, при $t=T$ имеем

$$y(T) = \int_0^T \sum_{\alpha=0}^m \sum_{i=0}^m K_\alpha F(T-\alpha h,\tau+ih)P_i u(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^m B^\alpha C u(T-\alpha h) + d_m(T). \qquad /16/$$

Определим функцию $\psi(g,\tau)$:

$$\psi(g,\tau)=g'\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{i=0}^{m}K_\alpha F(T-\alpha h,\tau+ih)P_i . \qquad /17/$$

Из [2] следует: для того чтобы задача управляемости имела решение, необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из следующих условий

а) $g'B^iC \neq 0 \quad \forall g\in R_n\setminus\{0\} \qquad (i=0,1,\dots,m)$;

б) $\psi(g,\tau)\neq 0 \quad \forall g\in R_n\setminus\{0\}, \quad \tau\in[0,T]$.

Можно подсчитать, что

$$\psi^{(\ell)}(g,\tau)=(-1)^\ell g'\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{K_0=0}^{m}\dots\sum_{K_\ell=0}^{m}K_\alpha F(T-\alpha h,\tau+\sum_{s=0}^{\ell}K_s h)\times$$

$$\times B_{K_\ell}\dots B_{K_1}P_{K_0} . \qquad /18/$$

Пусть $\beta_\ell=\sum_{s=0}^{\ell}K_s$. Запишем /18/ в компактном виде

$$\psi^{(\ell)}(g,\tau)=(-1)^\ell g'\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{\{K_0,\dots,K_\ell\}=0}^{m}K_\alpha F(T-\alpha h,\tau+\beta_\ell h)B_{K_\ell}\dots B_{K_1}P_{K_0} . \qquad /19/$$

Здесь символом $\sum_{\{K_0,\dots,K_\ell\}=0}^{m}$ обозначена сумма $\sum_{K_0=0}^{m}\dots\sum_{K_\ell=0}^{m}$.

Исследуем величину

$$\Delta\psi^{(\ell)}(g,\tau)=(-1)^\ell g'\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{\{K_0,\dots,K_\ell\}=0}^{m}K_\alpha\{F(T-\alpha h,\tau+\beta_\ell h-0)-$$

$$-F(T-\alpha h,\tau+\beta_\ell h+0)\}B_{K_\ell}\dots B_{K_1}P_{K_0} . \qquad /20/$$

При $\tau\neq T-(\alpha+\beta_\ell)h$, $\Delta\psi^\ell(g,\tau)\equiv 0$. Рассмотрим случай, когда $\tau=T-(\alpha+\beta_\ell)h$. Введем функцию $\varphi_{\alpha,\ell}(\tau)=F(T-\alpha h,\tau+\beta_\ell h-0)-F(T-\alpha h,\tau+\beta_\ell h+0)$. Очевидно, что

$$\varphi_{\alpha,\ell}(T-(\alpha+\beta_\ell)h)=E, \qquad /21/$$

а в остальных случаях $\varphi_{\alpha,\ell}(\tau)\equiv 0$. Представим /20/ в следующем виде:

$$\Delta\psi^{(\ell)}(g,\tau)=(-1)^\ell g'\sum_{\{K_0,\dots,K_\ell\}=0}^{m}\{K_0\varphi_{0,\ell}(\tau)+\dots+K_m\varphi_{m,\ell}(\tau)\}B_{K_\ell}\dots B_{K_1}P_{K_0} . \qquad /22/$$

Принимая во внимание /21/, имеем

$$\Delta\psi^{(\ell)}(g,T-(\alpha+\beta_\ell)h)=(-1)^\ell g'K_\alpha B_{K_\ell}\dots B_{K_1}P_{K_0} . \qquad /23/$$

Из второго соотношения /5/ методом шагов получаем

$$Y_K(s)=\sum_{\alpha=0}^{m}K_\alpha X_K(s-\alpha h)+\sum_{\alpha=0}^{m}B^\alpha CU_K(s-\alpha h). \qquad /24/$$

Учитывая /8/ , имеем

$$Y_{k+1}(s)=\sum_{\alpha=0}^{m}K_\alpha\Big\{\sum_{i=0}^{m}G_i X_k(s-(\alpha+i)h)+\sum_{i=0}^{m}P_i U_k(s-(\alpha+i)h)\Big\}+\sum_{\alpha=0}^{m}B^\alpha C U_{k+1}(s-\alpha h)=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{i=0}^{m}K_\alpha G_i X_k(s-(\alpha+i)h)+\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{i=0}^{m}K_\alpha P_i U_k(s-(\alpha+i)h)+$$
$$+\sum_{\alpha=0}^{m}B^\alpha C U_{k+1}(s-\alpha h). \qquad /25/$$

Нетрудно подсчитать, что для $\ell\leq k$ имеет место соотношение

$$Y_{k+1}(s)=\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{\{k_0,\dots,k_\ell\}=0}^{m}K_\alpha G_{k_0}\cdots G_{k_\ell}X_{k-\ell}(s-(\alpha+\beta_\ell)h)+R_{k_0\dots k_\ell}(s). \qquad /26/$$

Здесь

$$R_{k_0\dots k_\ell}(s)=\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{\{k_0,\dots,k_\ell\}=0}^{m}K_\ell G_{k_0}\cdots G_{k_{\ell-1}}P_{k_\ell}U_{k-\ell}(s-(\alpha+\beta_\ell)h)+R_{k_0\dots k_{\ell-1}}(s); \qquad /27/$$

$$R_{k_0}(s)=\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{k_0=0}^{m}K_\alpha P_{k_0}U_k(s-(\alpha+k_0)h)+\sum_{\alpha=0}^{m}B^\alpha C U_{k+1}(s-\alpha h). \qquad /28/$$

Пусть $\alpha_\ell=\alpha+\beta_\ell$. Нетрудно убедиться, что

$$Y_{k+1}(\alpha_k h)=(-1)^k\Delta\psi^{(k)}(\mathscr{g},T-\alpha_k h). \qquad /29/$$

Т е о р е м а 2. Система /I/ относительно управляема по y на отрезке $(0,T]$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

в) ранг $\{Y_{k+1}(ih), B^iC: i=0,1,\dots,m;\ k=0,1,\dots,n(m+1)-1\}=n.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неоходимость. Пусть система. относительно управляема на отрезке $(0,T]$, а условие в) не выполняется, т.е.

ранг $\{Y_{k+1}(s):\ s=0,h,\dots,mh;\ k=0,1,\dots,n(m+1)-1\}<n.$ /30/

Из /30/ следует существование ненулевого вектора $\mathscr{g}_0\in R_n$ такого,что

$$\mathscr{g}_0'Y_{k+i}(s)=0,\quad s=0,h,\dots,mh;\quad k=0,1,\dots,n(m+1)-1.$$

Имеем

$$0=\mathscr{g}_0'Y_{k+1}(\alpha_k h)\big|_{\alpha_k=i}=\mathscr{g}_0'K_\alpha G_{k_0}\cdots G_{k_{k-1}}P_{k_k}=(-1)^k\Delta\psi^{(k)}(\mathscr{g}_0,T-\alpha_k h)\big|_{\alpha_k=i}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\psi(\mathscr{g},\tau)=\mathscr{g}'K\Phi(T,\tau)P, \qquad /31/$$

где

$$\varphi(T,\tau)=\begin{bmatrix} F(T,\tau) & F(T,\tau+h) & F(T,\tau+2h) & \dots & F(T,\tau+mh) \\ F(T,\tau+h) & F(T,\tau+2h) & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ F(T,\tau+2h) & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ F(T,\tau+mh) & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad P=\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$$

$K=[K_0\, K_1, \dots, K_m]$. Здесь использовано свойство $F(t,s)=F(t-s,0)$. Дифференцируя $\varphi(T,\tau)$ по τ , получаем

$$\frac{\partial\varphi(T,\tau)}{\partial\tau} = -\varphi(T,\tau)G, \qquad /32/$$

где

$$G=\begin{bmatrix} G_0 & & & 0 \\ G_1 & G_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ G_m & & G_1 & G_0 \end{bmatrix}$$

Из /31/ имеем

$$\psi^{(i)}(g,\tau)=(-1)^i g' K\varphi(T,\tau)G^i P. \qquad /33/$$

Отсюда понятно, что $\psi(g,\tau)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка $n(m+1)$ ($n(m+1)\times n(m+1)$- размерность матрицы G) . Применяя технику из [2] , получаем

$$\psi(g_0,\tau)\equiv 0,$$

что противоречит условию б). Необходимость доказана.

Достаточность доказывается по схеме из [2] .

З а м е ч а н и е. При выполнении условия в) теоремы 2 ранг $\{K\}=n$. Это следует из равенства ранг$\{K\}$ = ранг$\{KG^iP: i=\overline{0,n(m+1)-1}\}$. (см. /33/ .).

4. Относительная управляемость по $\{x,y\}$ на $(0,T]$.

Т е о р е м а 3. Система /I/ относительно управляема на отрезке $(0,T]$, когда выполняются условия:

ранг $\{X_k(s): s=0,h,\dots,mh;\ k=0,1,\dots,n(m+1)-1\}=n$; /34/

ранг $\{B^iC:\ i=0,1,\dots,m\}=n$. /35/

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M - множество точек вида $T-ah$, $a=0,1,\dots,m$:

$$M=\{T-ah:\ a=0,1,\dots,m\}$$

Представим /9/ и /16/ в следующем виде:

$$x(T)=\int\limits_{[0,T]\setminus M}\sum_{i=0}^{m}F(T,\tau+ih)P_i u(\tau)d\tau+C_m(T); \qquad /36/$$

$$y(T) = \int\limits_{[0,T]\setminus M} \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{i=0}^{m} K_\alpha F(T-\alpha h, \tau+ih) P_i u(\tau)d\tau + \sum_{\alpha=0}^{m} B^\alpha C u(T-\alpha h) + d_m(T). \quad /37/$$

Пусть $u_\ell(\cdot)$ - управление, при котором $x(T)=\ell$. Из /37/ при $u(\cdot)=u_\ell(\cdot)$ и $y(T)=c$ получаем

$$q = \sum_{\alpha=0}^{m} B^\alpha C u(T-\alpha h), \quad /38/$$

где

$$q = c - d_m(T) - \int\limits_{[0,T]\setminus M} \sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{i=0}^{m} K_\alpha F(T-\alpha h, \tau+ih) P_i u_\ell(\tau)d\tau .$$

Из /36/, /38/ следует, что для относительной управляемости по $\{x,y\}$ достаточно выполнения соотношений /34/, /36/ при произвольных векторах ℓ, q. Можно показать, что это равносильно условиям /34/, /35/.

Аналогичная схема исследования пригодна для изучения задач наблюдения общих линейных гибридных систем [3] .

Поступила в ред.-изд.отдел.
23 сентября 1974 г.

Л и т е р а т у р а

I. Kirillova F.M.,Gabasov R.,Zevnjak R.M., Kopeikina T.B., Krachotko V.V. On the General Control Theory of Multiconnected Systems. 2nd IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems. Technical Papers. Preprints. Dusseldorf, I97I.

2. Габасов Р.,Кириллова Ф.М. "Качественная теория оптимальных процессов". Изд-во "Наука", I97I.

3. Кириллова Ф.М.,Ахундов А.А., Стрельцов С.В. "Оптимизация гибридных систем управления". Ш Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тезисы докладов. Новосибирск, I974.