Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г. выпуск I4.
УДК.519.3:51:62-50.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЙ В ГИБРИДНЫХ СИСТЕМАХ

Ф.М.Кириллова, С.В.Стрельцов /Минск/

Для систем, поведение которых описывается совокупностью дифференциальных и разностных уравнений (гибридные системы) получен принцип максимума в терминальной задаче оптимального управления.

I. Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-h),y(t),y(t-h),u(t),t),\quad t\in[0,t_1]=T,\\ &y(t)=p(x(t),x(t-h),y(t-h),u(t),t),\quad z(t)=g_0(t),\ t\in(-h,0]=T_0 \end{aligned}\right\} \quad /1/$$

$$x'(t)=\{x_1(t),\dots,x_n(t)\};\ y'(t)=\{y_1(t),\dots,y_m(t)\};\ z'(t)=\{x'(t),y'(t)\},$$

где $u(t)$ - кусочно-непрерывные функции, со значениями из ограниченного множества U ; $u(t)\in U,\quad t\in T.$

Назовем уравнения /I/ гибридной системой управления. На траекториях /I/ исследуем задачу минимизации функционала

$$J(u)=\varphi(z(t_1)). \quad /2/$$

Пусть функции $f(x,v,y,w,u,t)$; $p(x,v,w,u,t)$; $\dfrac{\partial f(x,v,y,w,u,t)}{\partial x}$;

$$\frac{\partial p(x,v,w,u,t)}{\partial t};\quad \frac{\partial f(x,v,y,w,u,t)}{\partial v};\ \frac{\partial p(x,v,w,u,t)}{\partial v};\ \frac{\partial f(x,v,y,w,u,t)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(x,v,y,w,u,t)}{\partial w};\quad \frac{\partial p(x,v,w,u,t)}{\partial w};\quad \varphi(z);\quad \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z};\quad g_0(t)$$

непрерывны по совокупности переменных.

2. Обозначим через $z(t)$, $\tilde{z}(t)=z(t)-\Delta z(t)$ траектории системы /I/, соответствующие управлениям $u(t)$, $\tilde{u}(t)=u(t)-\Delta u(t)$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t)=\ &f(\tilde{x}(t),\tilde{x}(t-h),\tilde{y}(t),\tilde{y}(t-h),\tilde{u}(t),t)-\\ &-f(x(t),x(t-h),y(t),y(t-h),u(t),t),\\ \Delta y(t)=\ &p(\tilde{x}(t),\tilde{x}(t-h),\tilde{y}(t-h),\tilde{u}(t),t)-\\ &-p(x(t),x(t-h),y(t-h),u(t),t),\quad t\in T,\\ \Delta z(t)=\ &0,\qquad t\in(-h,0]=T_0. \end{aligned}\right\}.$$

Получим формулу для приращения функционала $\Delta J(u)$, пользуясь схемой [1,2] . Введем вспомогательную функцию $\psi'(t)=\{\psi^1(t),\psi^2(t-h)\}$ такую, что $\psi(t_1)=-\partial\varphi(z(t_1))/\partial z$, последовательность $\{\theta_i\}=\{\theta_i:\theta_i=\theta_{i+1}-h,$ $\theta_l=t_1,\ \ l=\left[\dfrac{t_1}{h}\right]+1\}$ и скалярные функции

$$H_1(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h), \psi^1(t), u(t)t) =$$
$$= \psi^{1'}(t), f(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h), u(t), t),$$

$$H_2(x(t), x(t-h), y(t-h), \psi^2(t-h), u(t)t) =$$
$$= \psi^{2'}(t-h)p(x(t), x(t-h), y(t-h), u(t), t).$$

Далее для краткости в функциях многих переменных будем писать только те переменные, которые претерпевают изменения, и переменную t . Используя тождества:

$$\int_0^{t_1} \psi^{1'}(t)\Delta\dot{x}(t)dt - \int_0^{t_1}(\tilde{H}_1(t) - H_1(\cdot, t))dt \equiv 0,$$

где $\tilde{H}_1(t) = H_1(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-h), \tilde{y}(t), \tilde{y}(t-h), \psi^1(t), \tilde{u}(t), t)$;

$$\sum_{i=0}^{l-1} \psi^{2'}(\theta_i)\Delta y(\theta_{i+1}) - \sum_{i=0}^{l-1} \psi^{2'}(\theta_{i-1})\Delta y(\theta_i) \equiv \psi^{2'}(\theta_{l-1})\Delta y(\theta_l),$$

получим

$$\Delta J(u) = \frac{\partial\varphi(z(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1) + \frac{\partial\varphi(z(t_1))}{\partial y}\Delta y(t_1) + 0_1(\|\Delta z(t_1)\|) =$$

$$= \psi^{1'}(t_1)\Delta x(t_1) - \psi^{2'}(t_1 - h)\Delta y(t_1) + 0_1(\|\Delta z(t_1)\|) =$$

$$= -\psi^{1'}(t_1)\Delta x(t_1) + \int_0^{t_1}\psi^{1'}(t)\Delta\dot{x}(t)dt - \int_0^{t_1}(\tilde{H}_1(t) - H_1(\cdot, t))dt -$$

$$-\sum_{i=0}^{l-1}\psi^{2'}(\theta_i)\Delta y(\theta_{i+1}) + \sum_{i=0}^{l-1}\psi^{2'}(\theta_{i-1})\Delta y(\theta_i) + 0_1(\|\Delta z(t_1)\|) =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1}\Delta_{\tilde{u}} H_2(x(\theta_{i+1}), x(\theta_i), y(\theta_i), \psi^2(\theta_i), u(\theta_{i+1}), \theta_{i+1}) -$$

$$-\int_0^{t_1}\Delta_{\tilde{u}} H_1(x(t), x(t-h), y(t), y(t-h), \psi^1(t), u(t), t)dt -$$

$$-\psi^{1'}(t_1)\Delta x(t_1) + \int_0^{t_1}\psi^{1'}(t)\Delta\dot{x}(t)dt -$$

$$-\int_0^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot, \tilde{u}, t)}{\partial x}\Delta x(t)dt - \int_0^{t_1-h}\frac{\partial H_1(\cdot, \tilde{u}, t+h)}{\partial v}\Delta x(t)dt -$$
$$-\int_0^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot, \tilde{u}, t)}{\partial y}\Delta_{\tilde{u}} p(\cdot, t)dt - \int_0^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot, \tilde{u}, t)}{\partial y}\frac{\partial p(\cdot, \tilde{u}, t)}{\partial x}\Delta x(t)dt -$$

$$- \int_0^{t_1-h} \frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial v} \Delta x(t)dt -$$
$$- \int_0^{t_1-h} \left[\frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial y} \frac{\partial p(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial v} + \frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial w}\right] \Delta y(t)dt -$$
$$- \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\tilde u,\theta_i)}{\partial x} \Delta x(\theta_{i+1}) - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\tilde u,\theta_i)}{\partial v} \Delta x(\theta_i) -$$
$$- \sum_{i=0}^{l-1} \left[\frac{\partial H_2(\cdot,\tilde u,\theta_i)}{\partial w} - \varphi^2(\theta_{i-1})\right] \Delta y(\theta_i) +$$
$$+ o_2(\|\Delta z(t)\|).$$

В /4/ сделаем следующие преобразования:

1/ $$\sum_{i=0}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\theta_i)}{\partial x} \Delta x(\theta_{i+1}) - \sum_{i=0}^{l-1}\Big(\sum_{j=i}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial x}\Big)\left[\Delta x(\theta_{i+1})-\Delta x(\theta_i)\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \Big(\sum_{j=i}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial x}\Big)\Delta \dot x(t)dt;$$

2/ $$\sum_{i=0}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\theta_i)}{\partial v} \Delta x(\theta_i) = \sum_{i=0}^{l-2} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \Big(\sum_{j=i+1}^{l-1} \frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial v}\Big)\Delta \dot x(t)dt;$$

3/ обозначим величину $\frac{\partial H_1(\cdot,u,t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(\cdot,u,t)}{\partial v} + \frac{\partial H_1(\cdot,u,t)}{\partial w}$ через $Q(u,t)$, а $\int_0^{t_1-h} Q(\tilde u,t+h)\Delta y(t)dt$ через $\bar Q$.

В членах с запаздыванием сделаем замену переменной, положив $s=t-h$:

$$\bar Q = \int_0^{\theta_{l-1}} Q(\tilde u,t+h)\Delta_{\tilde u}\, p(\cdot,u,t)dt + \int_0^{\theta_{l-1}} Q(\tilde u,t+h)\frac{\partial p(\cdot,\tilde u,t)}{\partial x}\Delta x(t)dt +$$
$$+ \int_0^{\theta_{l-2}} Q(\tilde u,t+2h)\frac{\partial p(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial v}\Delta x(t)dt +$$
$$+ \int_0^{\theta_{l-2}} Q(\tilde u,t+2h)\frac{\partial p(\cdot,\tilde u,t+h)}{\partial w}\Delta y(t)dt + o_1(\|\Delta z(t)\|).$$

Продолжая делать замену переменной $s=t-h$ в членах с запаздывающим аргументом до тех пор, пока последний интеграл не станет равным нулю, получаем

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{l-1} \int_0^{\theta_{l-k}} F_0(\tilde{u},k,t)\Delta_{\tilde{u}} p(\cdot,u,t)dt + \sum_{k=1}^{l-1} \int_0^{\theta_{l-k}} F_1(\tilde{u},k,t)\Delta x(t)dt +$$

$$+ \sum_{k=2}^{l-1} \int_0^{\theta_{l-k}} F_2(\tilde{u},k,t)\Delta x(t)dt + O_3(\|\Delta x(t)\|).$$

Здесь введены обозначения:

$$F_0(u,k,t) = Q(u,t+kh)\cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\partial p(\cdot,u,t+(j+1)h)}{\partial w};$$

$$F_1(u,k,t) = Q(u,t+kh)\cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\partial p(\cdot,u,t+(j+1)h)}{\partial w}\cdot \frac{\partial p(\cdot,u,t)}{\partial x};$$

$$F_2(u,k,t) = Q(u,t+(k+1)h)\cdot \prod_{j=1}^{k-2} \frac{\partial p(\cdot,u,t+(j+1)h)}{\partial w}\cdot \frac{\partial p(\cdot,u,t+h)}{\partial v};$$

и учтено, что $\prod_{j=1}^{0} a_j \equiv 1$.

Далее, заметим, что

$$\int_0^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,t)}{\partial x}\Delta x(t)dt = \int_0^{t_1}\left(\int_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x}d\tau\right)\Delta\dot{x}(t)dt;$$

$$\sum_{k=1}^{l-1}\int_0^{\theta_{l-k}} F_0(\tilde{u},k,t)\Delta_{\tilde{u}} p(\cdot,t)dt = \sum_{i=0}^{l-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{k=1}^{l-1-i} F_0(\tilde{u},k,t)\Delta_{\tilde{u}} p(\cdot,t)dt;$$

$$\sum_{k=1}^{l-1}\int_0^{\theta_{l-k}} F_1(\tilde{u},k,t)\Delta x(t)dt = \sum_{k=1}^{l-1}\int_0^{\theta_{l-k}}\left(\int_t^{\theta_{l-k}} F_1(\tilde{u},k,\tau)d\tau\right)\Delta\dot{x}(t)dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{k=1}^{l-1-i}\left(\int_t^{\theta_{l-k}} F_1(\tilde{u},k,\tau)d\tau\right)\Delta\dot{x}(t)dt;$$

$$\sum_{k=2}^{l-1}\int_0^{\theta_{l-k}} F_2(\tilde{u},k,t)\Delta x(t)dt = \sum_{k=2}^{l-1}\int_0^{\theta_{l-k}}\left(\int_t^{\theta_{l-k}} F_2(\tilde{u},k,\tau)d\tau\right)\Delta\dot{x}(t)dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-3}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{k=2}^{l-1-i}\left(\int_t^{\theta_{l-k}} F_2(\tilde{u},k,\tau)d\tau\right)\Delta\dot{x}(t)dt.$$

Имеем

$$\Delta \mathcal{J}(u) = -\sum_{i=0}^{l-1}\Delta_{\tilde{u}} H_2(\cdot,\theta_i) - \int_0^{t_1}\Delta_{\tilde{u}} H_1(\cdot,t)dt -$$

$$-\int_0^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot,\tilde{u},t)}{\partial y}\Delta_{\tilde{u}} p(\cdot,t)dt - \sum_{i=0}^{l-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\sum_{k=1}^{l-1-i} F_0(\tilde{u},k,t)\Delta_{\tilde{u}} p(\cdot,t)dt +$$

$$+\sum_{i=0}^{l-1}\left(\psi^2(\theta_{i-1})-\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_i)}{\partial w}\right)\Delta y(\theta_i)+\int_0^{t_1}\psi^{1'}(t)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\int_0^{t_1}\psi^{1'}(t_1)\Delta\dot x(t)dt-\int_0^{t_1}\left(\int_t^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,\tau)}{\partial x}d\tau\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\int_0^{t_1-h}\left(\int_t^{t_1-h}\frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,\tau+h)}{\partial v}d\tau\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\int_0^{t_1}\left(\int_t^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,\tau)}{\partial y}\cdot\frac{\partial p(\cdot,\tilde u,\tau)}{\partial x}d\tau\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\int_0^{t_1-h}\left(\int_t^{t_1-h}\frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,\tau+h)}{\partial y}\cdot\frac{\partial p(\cdot,\tilde u,\tau+h)}{\partial v}d\tau\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{l-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\sum_{k=1}^{l-1-i}\left(\int_t^{\theta_{l-k}}F_1(\tilde u,k,\tau)d\tau\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{l-3}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\sum_{k=2}^{l-1-i}\left(\int_t^{\theta_{l-k}}F_2(\tilde u,k,\tau)d\tau\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{l-1}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\left(\sum_{j=i}^{l-1}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial x}\right)\Delta\dot x(t)dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{l-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i-1}}\left(\sum_{j=i+1}^{l-1}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial v}\right)\Delta\dot x(t)dt+O_4(\|\Delta x(t)\|).$$

Определим функции $\psi^1(t)$ и $\psi^2(t)$ следующим образом:

$$\psi^1(t)=\psi^1(t_1)+\int_t^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x}d\tau+\int_t^{t_1-h}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau+h)}{\partial v}d\tau+$$

$$+\int_t^{t_1}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial y}\cdot\frac{\partial p(\cdot,\tau)}{\partial x}d\tau+\int_t^{t_1-h}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau+h)}{\partial y}\cdot\frac{\partial p(\cdot,\tau+h)}{\partial v}d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{l-1-i}\left(\int_t^{\theta_{l-k}}F_1(u,k,\tau)d\tau\right)+\sum_{k=2}^{l-1-i}\left(\int_t^{\theta_{l-k}}F_2(u,k,\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{j=i}^{l-1}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial x}+\sum_{j=i+1}^{l-1}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial v};\quad t\in[\theta_i,\theta_{i+1}),\ i=\overline{0,l-3},$$

$$\psi^1(t) = \psi^1(t_1) + \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x} d\tau + \int\limits_t^{t_1-h} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau+h)}{\partial v} d\tau +$$

$$+ \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(\cdot,\tau)}{\partial x} d\tau + \int\limits_t^{t_1-h} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau+h)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(\cdot,\tau+h)}{\partial v} d\tau +$$

$$+ \int\limits_t^{t_1-h} f_1(u,k,\tau) d\tau + \frac{\partial H_2(\cdot,t_1-2h)}{\partial x} + \frac{\partial H_2(\cdot,t_1-h)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial H_2(\cdot,t_1-h)}{\partial v}; \quad t \in [t_1-2h, t_1-h),$$

$$\psi^1(t) = \psi^1(t_1) + \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x} d\tau + \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p(\cdot,\tau)}{\partial x} d\tau +$$

$$+ \frac{\partial H_2(\cdot,t_1-h)}{\partial x}, \quad t \in [t_1-h, t_1),$$

$$\psi^1(t_1) = -\frac{\partial \varphi(z(t_1))}{\partial x};$$

$$\psi^2(\theta_{i-1}) = \frac{\partial H_2(\cdot,\theta_i)}{\partial w}, \quad \psi^2(t_1-h) = -\frac{\partial \varphi(z(t_1))}{\partial y}, \quad i = \overline{0,\ell-1}.$$

Используя /6/, из /5/ получаем

$$\Delta J(u) = -\sum_{i=0}^{\ell-1} \Delta_{\tilde u} H_2(\cdot,\theta_i) - \int\limits_0^{t_1} \Delta_{\tilde u} H_1(\cdot,t) dt + R. \qquad /7/$$

Здесь $R = -R_1 - R_2 - R_3 - R_4 + O_4(\|\Delta z(t)\|)$,

$$R_1 = \int\limits_0^{t_1} \frac{\partial H_1(\cdot,\tilde u,t)}{\partial y} \Delta_{\tilde u} p(\cdot,t) dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\ell-2} \int\limits_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{k=1}^{\ell-1-i} f_0(\tilde u,k,t) \Delta_{\tilde u} p(\cdot,t) dt,$$

$$R_2 = \int\limits_0^{t_1} \Big(\int\limits_t^{t_1} \Delta_{\tilde u} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x} d\tau \Big) \Delta \dot x(t) dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1-h} \Big(\int\limits_t^{t_1-h} \Delta_{\tilde u} \frac{\partial H_1(\cdot,\tau+h)}{\partial v} d\tau \Big) \Delta \dot x(t) dt +$$

$$+\int_0^{t_1}\Big(\int_t^{t_1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial y}\cdot\frac{\partial p(\cdot,\tau)}{\partial x}d\tau\Big)\Delta x(t)dt+$$

$$+\int_0^{t_1-h}\Big(\int_t^{t_1-h}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau+h)}{\partial v}\cdot\frac{\partial p(\cdot,\tau+h)}{\partial v}d\tau\Big)\Delta\dot x(t)dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\Big(\sum_{k=1}^{\ell-1-i}\int_t^{\theta_{\ell-k}}\Delta_{\tilde u}f_1(u,k,\tau)d\tau\Big)\Delta\dot x(t)dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell-3}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\Big(\sum_{k=2}^{\ell-1-i}\int_t^{\theta_{\ell-k}}\Delta_{\tilde u}f_2(u,k,\tau)d\tau\Big)\Delta\dot x(t)dt,$$

$$R_3=\sum_{i=0}^{\ell-1}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\Big(\sum_{j=i}^{\ell-1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,u,\theta_j)}{\partial x}\Big)\Delta\dot x(t)dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\Big(\sum_{j=i+1}^{\ell-1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,u,\theta_j)}{\partial v}\Big)\Delta\dot x(t)dt,$$

$$R_4=\sum_{i=0}^{\ell-1}\Big(\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,u,\theta_i)}{\partial w}\Big)\Delta y(\theta_i).$$

3. Пусть

$$\Delta_{\varepsilon,\theta'}u(t)=\begin{cases}0, & t\,\bar\in\,[\theta',\theta'+\varepsilon)\\ \tilde u-u(t), & t\in[\theta',\theta'+\varepsilon),\end{cases}\qquad /9/$$

где θ', ε - произвольные числа; $\theta'\in T$, $\theta'+\varepsilon\in T$, $\varepsilon>0$, $\tilde u$ - произвольная точка из U.

Введем последовательность:

$$\{\theta'_i\}=\{\theta'_i:\theta'_i=\theta'+ih,\ i=\overline{0,p},\ \theta'_p\le t_1<\theta'_{p+1}\}.$$

Из /3/ имеем:

$$\|\Delta y(t)\|\le L(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(t-h)\|+\|\Delta y(t-h)\|)+\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t)\|,$$

$$\|\Delta x(t)\|\le\int_0^t[L(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(t-h)\|+\|\Delta y(t)\|+\|\Delta y(t-h)\|)+\|\Delta_{\tilde u}f(\cdot,u,t)\|]dt.$$

Л е м м а. Пусть функции $f(x,v,y,w,u,t)$, $p(x,v,w,u,t)$ удовлетворяют условиям п.I. Тогда при специальном приращении управления /9/, где ε достаточно мало, величина $\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|$ имеет порядок ε, а величина $\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\|\sim\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,\theta')\|$ при всех $t\in T$, $\theta'\in T$, $\tilde u\in U$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольных $\theta'\in T$ и $\tilde u\in U$ в силу /9/ $\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\equiv 0$, $\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\equiv 0$ при $t\in[0,\theta']$. Оценим $\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|$ и $\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\|$ на отрезке $(\theta',\theta'+\varepsilon]$. В силу малости ε имеем $\theta'+\varepsilon<\theta'+h$. Учитывая, что $\Delta_{\varepsilon,\theta'}z(t-h)\equiv 0$, получаем

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\|\le L\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|+\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t)\|,$$

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|\le\int_{\theta'}^{\theta'+\varepsilon}(L\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t)\|+\|\Delta_{\tilde u}f(\cdot,t)\|)dt+L(1+L)\int_{\theta'}^{t}\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|dt.$$

Следовательно [3],

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\| \le \exp[L(1+L)\varepsilon]\cdot\int_{\theta'}^{\theta'+\varepsilon}(L\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t)\|+\|\Delta_{\tilde u}f(\cdot,t)\|)dt = O(\varepsilon)$$

и $\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\| \le \|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t)\| + O'(\varepsilon)$. Теперь при $t\in[\theta'+\varepsilon,\theta'+h]$ имеем

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\| \le L\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|,$$

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\| \le O(\varepsilon)+L(1+L)\int_{\theta'+\varepsilon}^{t}\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|dt,$$

и, значит,

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\| \le O(\varepsilon)\cdot\exp L(1+L)h = O_1(\varepsilon),\ \|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\| < O_1'(\varepsilon).$$

Итак, $\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\| \le O_2(\varepsilon)$, $t\in[\theta',\theta'+h]$,

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\| \le \|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t)\| + O_2'(\varepsilon), \qquad t\in[\theta',\theta'+h].$$

Можно показать, что

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\| \le O_3(\varepsilon), \qquad t\in[\theta'+ih,\theta'+(i+1)h],$$

$$\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\| \le iL\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,t-ih)\|+O'_{i+2}(\varepsilon), \quad t\in[\theta'+ih,\theta'+(i+1)h],\ i=\overline{0,p}.$$

Следовательно, для любого $t\in(\theta',t_1]$

$$\left.\begin{aligned}&\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}x(t)\|\sim\varepsilon,\\&\|\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(t)\|\sim\|\Delta_{\tilde u}p(\cdot,\theta')\|.\end{aligned}\right\} \qquad /10/$$

Оценим остаточный член R в /7/ при специальном приращении управления /9/. Имеем $R_1\sim\varepsilon\cdot\Delta_{\tilde u}p(\cdot,\theta')$. Далее,

$$\int_0^{t_1}\Big(\int_t^{t_1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x}d\tau\Big)\Delta\dot x(t)dt=\Big(\int_t^{t_1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,\tau)}{\partial x}d\tau\Big)\Delta x(t)\Big|_0^{t_1}+$$

$$+\int_0^{t_1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,t)}{\partial x}\Delta x(t)dt=\int_{\theta'}^{\theta'+\varepsilon}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,t)}{\partial x}\Delta x(t)dt=$$

$$=\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_1(\cdot,\theta^*)}{\partial x}\Delta x(\theta^*)\varepsilon\sim\varepsilon^2, \qquad \theta^*\in[\theta',\theta'+\varepsilon],$$

откуда следует, что $R_2\sim\varepsilon^2$.

Если $\theta'\ne\theta_i$ и ε достаточно мало, то $R_3=0$ (все коэффициенты под знаком интеграла при $\Delta\dot x(t)$ равны нулю). Если же $\theta'=\theta_i$, то $\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial \vartheta}\ne 0$ при $\theta_j=\theta'$, а $\theta_i=\theta'-h$ и

$$\sum_{i=0}^{\ell-2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\Big(\sum_{j=i+1}^{\ell-1}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta_j)}{\partial\vartheta}\Big)\Delta\dot x(t)dt=$$

$$=\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta')}{\partial\vartheta}(\Delta x(\theta')-\Delta x(\theta'-h))=0,$$

так как в силу /9/ $\Delta x(\theta')=0$ и $\Delta x(\theta'-h)=0$. Имеем

$$R_3=\int_{\theta'}^{\theta'+\varepsilon}\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta')}{\partial x}\Delta\dot x(t)dt=\Delta_{\tilde u}\frac{\partial H_2(\cdot,\theta')}{\partial x}\Delta x(\theta'+\varepsilon)\sim\varepsilon;$$

$R_4=0$, так как $\Delta_{\tilde u}\dfrac{\partial H_2(\cdot,\theta_i)}{\partial w}\neq 0$ при $\theta_i=\theta'$, но $\Delta_{\varepsilon,\theta'}y(\theta')=0$;

$$O_4(\|\Delta z(t)\|)=O_4(\|\Delta_{\tilde u}\rho(\cdot,\theta')\|)O_4(\varepsilon)+O_4(\varepsilon)+O_4(\|\Delta_{\tilde u}\rho(\cdot,\theta')\|).$$

4. Предположим, что множество $\rho(x,v,w,U,t)$ выпукло при фиксированных x,v,w,t.

Пусть $u(t)=u^\circ(t)$ – оптимальное управление; $z^\circ(t)$ – соответствующая ему траектория; $\psi^\circ(t)=\begin{Bmatrix}\psi^{1\circ}(t)\\ \psi^{2\circ}(t-h)\end{Bmatrix}$ – решение /6/ вдоль $u^\circ(t)$ и $z^\circ(t)$, тогда

$$\Delta_{\tilde u}J(u^\circ)\geq 0 \quad \text{для любого } \tilde u\in U. \qquad /11/$$

Подставим $\Delta_{\varepsilon,\theta'}u^\circ(t)$ в /7/. При $\theta'=\theta_i$ в силу результатов п.3 для любого $\varepsilon>0$ получим

$$\Delta_{\varepsilon,\theta'}J(u^\circ)=-\Delta_{\tilde u}H_2(\cdot,\theta')+O(\|\Delta_{\tilde u}\rho(\cdot,\theta')\|)+O(\varepsilon)\geq 0,$$

а, значит, и $[-\Delta_{\tilde u}H_2(\cdot,\theta')+O(\|\Delta_{\tilde u}\rho(\cdot,\theta')\|]\geq 0$.

Докажем, что

$$-\Delta_{\tilde u}H_2(\cdot,\theta')\geq 0. \qquad /12/$$

Допустим противное, Тогда существует $\tilde u$, при котором $\Delta_{\tilde u}H_2(\cdot,\theta')=\eta>0$. Построим управление u_{ε_1} такое, что $\Delta_{u_{\varepsilon_1}}\rho(\cdot,\theta')=\varepsilon_1\Delta_{\tilde u}\rho(\cdot,\theta')$; $0<\varepsilon_1\leq 1$. Имеем $-\varepsilon_1\eta+O(\varepsilon_1)\geq 0$ для ε_1, $0<\varepsilon_1\leq 1$, что невозможно. Значит, при $\theta'=\theta_i$ выполняется /12/. При $\theta'\neq\theta_i$ для достаточно малых ε отрезок $[\theta',\theta'+\varepsilon]$ содержится только в одном из интервалов (θ_i,θ_{i+1}) и $\Delta_{\tilde u}H_2(\cdot,\theta_i)=0$, $i=\overline{0,l-1}$. В силу результатов п.3 имеем $\Delta_{\varepsilon,\theta'}J(u^\circ)=-\Delta_{\tilde u}H_1(\cdot,\theta')\varepsilon+O(\|\Delta_{\tilde u}\rho(\cdot,\theta')\|)+O(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon>0$. Поэтому

$$\Delta_{\tilde u}H_1(\cdot,\theta')\geq 0 \qquad /13/$$

(в противном случае существует $\tilde u$ такое, что $\Delta_{\tilde u}H_1(\cdot,\theta')=\eta_1>0$). Итак, нами доказано утверждение [4].

Т е о р е м а. Пусть для функций $f(x(t),x(t-h),y(t),y(t-h),u(t),t)$, $\rho(x(t),x(t-h),y(t-h),u(t),t)$ и $\varphi(z)$ выполнены условия п.1, множество $\rho(x,v,w,U,t)$ выпукло при фиксированных x,v,w,t. Если $u^\circ(t)$, $u^\circ\in U$, оптимальное управление, $z^\circ(t)$ – соответствующая ему траектория; $\psi^\circ(t)=\begin{Bmatrix}\psi^{1\circ}(t)\\ \psi^{2\circ}(t-h)\end{Bmatrix}$ – решение /6/ вдоль $u^\circ(t)$ и $z^\circ(t)$, то справедливы неравенства:

1/ $H_1(x^\circ(t),x^\circ(t-h),y^\circ(t),y^\circ(t-h),\psi^{1\circ}(t),u^\circ(t),t)\geq$
$\geq H_1(x^\circ(t),x^\circ(t-h),y^\circ(t),y^\circ(t-h),\psi^{1\circ}(t),u,t)$ при $t\in T\setminus\{\theta_i\}$,

2/ $H_2(x^0(t), x^0(t-h), y^0(t-h), \psi^{2^0}(t-h), u^0(t), t) \geq$
$\geq H_2(x^0(t), x^0(t-h), y^0(t-h), \psi^{2^0}(t-h), u, t)$ при $t \in \{\theta_i\}$

для всех $u \in U$.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 сентября 1974 г.

Л и т е р а т у р а

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления, Минск, "Наука и техника", 1974.

2. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимое условие оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления.-"ДАН Аз.ССР", № 5, 1972.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов, М.,"Наука", 1971.

4. Кириллова Ф.М., Ахундов А.А., Стрельцов С.В. Оптимизация гибридных систем управления - В кн.: Ш Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики, тезисы докладов,Новосибирск 1974.