Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г. выпуск I4.
УДК.519.3:62-50

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ,ОПИСЫВАЕМЫМ ПОЧТИ-ЛИНЕЙНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

О.Г.Проворова

Пусть состояние управляемого объекта характеризуется функцией $u(t,x)$, которая в области $Q=\{(t,x): 0<t\leq T, 0<x<1\}$ является решением следующей задачи:

$$u_t = u_{xx} + f(u) \qquad t>0, \qquad 0<x<1 \qquad /1/$$

$$u(0,x)=0, \quad (0\leq x\leq 1), \quad u_x(t,0)=0 \qquad t\geq 0 \qquad /2/$$

$$u_x(t,1)+\alpha u(t,1)=\alpha p(t), \quad \alpha=const>0, \quad t\geq 0, \qquad /3/$$

где $p(t)$ - измеримая функция, почти всюду на отрезке $[0,T]$ по модулю не превосхрдящая единицы. $f_u\leq K$; $f(u)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента.

Требуется найти такое управление $p(t)$, на котором функционал

$$J[p]=\int_0^1 [u(T,x)-u_0(x)]^2 dx+\beta\int_0^T p^2(t)dt \qquad /4/$$

принимает наименьшее возможное значение. Здесь $u_0(x)\in W_2^1(0,1)$.

Под решением при каждом конкретном управлении следует понимать функцию $u(t,x)$, которая удовлетворяет уравнению внутри области и условию /2/ в обычном смысле, а условию /3/ в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T [u_x(t,1-\varepsilon)+\alpha u(t,1-\varepsilon)-\alpha p(t)]\,\varphi(t)dt = 0 \qquad /5/$$

для любой функции $\varphi(t)\in C_0^\infty(0,T)$.

Аналогичная задача в случае, когда $f(u)\equiv 0$, рассматривалась в ряде работ (например, [1], [2], [3]).

Л е м м а. Предположим, что $p(t)$ - измеримая функция, $f_u\leq K$, тогда решение $u(x,t)$ задачи /1/-/3/ существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как в [2], нетрудно получить, что $|u(t,x)|<1$; $|u_x(t,x)|< 2\alpha$.

Найдется такая последовательность $p_n(t)$ функций, что $|p_n(t)|\leq 1$,

$$p_n(t)\in C_0^\infty(0,T), \qquad \int_0^T [p_n(t)-p(t)]^2 dt \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Пусть $u_n(t,x)$ - решение задачи /1/-/3/, когда управлением служит $p_n(t)$. Используя оценки из [4], можно показать, что найдется подпоследовательность $u_{n_k}(t,x)$, сходящаяся к $u(t,x)$ при $0\leq x<1$ с производными до второго порядка, условия /1/, /2/ выполняются в

обычном смысле. Кроме того, $u_{n_k}(t,x) \xrightarrow[n_k\to\infty]{C_x[0,1]} u(t,x)$ и $u_{n_k}(t,x)$, $\frac{\partial u_{n_k}(t,x)}{\partial x}$ сходятся слабо в $L_2(Q)$ к $u(t,x)$ и $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ соответственно. Справедливость условия /3/ доказывается так же, как в [2].

Т е о р е м а I. Существует хотя бы одно управление $\rho(t)$, для которого функционал

$$\mathcal{J}[\rho] = \int_0^1 [u_1(T,x)-u_0(x)]^2 dx + \beta\int_0^T \rho^2(t)dt$$

принимает наименьшее возможное значение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ функций $\rho_n(t)$, каждая из которых обращается в нуль в некоторой ε_n - окрестности точки $t=0$, причем $|\rho_n(t)|<1$, $\mathcal{J}[\rho_n]\to\mathcal{J}$, где $\mathcal{J}=\inf\mathcal{J}[\rho]$, а нижняя грань берется по всем управлениям. Из последовательности $\rho_n(t)$ можно выбрать подпоследовательность $\rho_{n_k}(t)$, слабо сходящуюся в $L_2[0,T]$ к некоторой функции $\rho(t)$. Далее так же, как в лемме, докажем, что некоторая подпоследовательность $u_{n_k}(t,x)$ сходится к $u(t,x)$ - решению задачи /1/-/3/, соответствующему $\rho(t)$, причем, $\mathcal{J}[\rho]=\mathcal{J}$. В дальнейшем нам потребуется оценка приращения при переходе от одного управления к другому.

Пусть ρ_1, ρ_2 - два управления, отличающиеся лишь на множестве γ_ε (меры ε) отрезка $[0,T]$, u_1, u_2 - решения соответствующих краевых задач. Обозначим $\Delta\rho=\rho_1-\rho_2$, $\Delta u=u_1-u_2$, тогда $\Delta u(t,x)$ является решением следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} &\Delta u_t = \Delta u_{xx} + f_u(\theta)\Delta u, \qquad f_u(\theta) = \int_0^1 f_u(u_1+\tau(u_2-u_1))d\tau \\ &\Delta u_x(0,t)=0, \quad \Delta u(x,0)=0 \\ &\Delta u_x(1,t)+\alpha\Delta u(1,t) = \alpha\Delta\rho. \end{aligned} \tag{6}$$

Покажем, что для приращения справедлива оценка

$$\int_0^1 [\Delta u(x,T)]^2 dx < K_1\,\varepsilon^{4/3}, \tag{7}$$

где K_1 не зависит от ρ_1, ρ_2, а зависит только от данных задачи. В самом деле, заметим, что $\Delta u = W_1 + W_2$, где $W_1(t,x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &W_{1t} = W_{1xx} \\ &W_1(x,0)=0, \quad W_{1x}(t,0)=0 \\ &W_{1x}(1,t)+\alpha W_1(1,t) = \alpha\Delta\rho(t), \end{aligned} \tag{8}$$

а $W_2(t,x)$ - решением задачи

$$\begin{aligned} &W_{2t} = W_{2xx} + f_u(\theta)W_2 + f_u(\theta)W_1 \\ &W_2(0,x)=0, \qquad W_{2x}(t,0)=0 \\ &W_{2x}(1,t) + \alpha W_2(1,t) = 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Из [1] следует, что $\int_0^1 [W_1(x,t)]^2 dx \leq C\varepsilon^{4/3}$, где C не зависит от β_1, β_2.

$$\int_0^1 [W_2(T,x)]^2 dx \leq K_2 \int_0^T\int_0^1 f_u^2(\theta)\, W_1^2(x,t)\,dx\,dt \leq K_3 \varepsilon^{4/3},$$

где K_3 не зависит от β_1, β_2. Следовательно,

$$\int_0^1 |\Delta u(T,x)|^2 dx \leq K_1 \varepsilon^{4/3}.$$

Для получения необходимых условий оптимальности введем вспомогательную функцию $v(t,x)$, определяемую как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &v_t + v_{xx} = -f_u(u)v \\ &v(T,x) = -2[u(T,x) - u_0(x)] \\ &v_x(t,0) = 0; \quad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = 0. \end{aligned} \qquad /10/$$

Обобщенное решение $v(t,x) \in W_2^{2,1}(Q)$ задачи /10/, определяемое следующим соотношением

$$\int_0^T\int_0^1 (v_t\varphi - v_x\varphi_x + f_u v\varphi)\,dx\,dt = \alpha\int_0^T v(t,1)\varphi(t,1)\,dt$$

и $\lim\limits_{t\to T-0} \int_0^1 \{v(t,x) + 2[u(T,x) - u_0(x)]\}^2 dx =$

$$= \int_0^1 \{v(T,x) + 2[u(T,x) - u_0(x)]\}^2 dx = 0$$

существует и единственно [5]. Следовательно, каждое управление однозначно определяет функцию $v(t,x)$.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы управление $p(t)$ в краевой задаче /1/-/3/ было оптимальным, т.е. чтобы на соответствующем ему решении $u(t,x)$ этой задачи функционал $J[p]$ принимал наименьшее возможное значение, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$h(v(t,1), p(t)) \;(=)\; \sup_{|p|\leq 1} h(v(t,1), p), \qquad /12/$$

$h = \alpha v p - \beta p^2$, $v(t,x)$ - решение задачи /10/, соответствующее $p = p(t)$, а символ $(=)$ означает равенство, справедливое почти при всех t из отрезка $[0,T]$.

Доказательство можно получить тем же методом, который применялся в [1] в случае, когда $f(u) \equiv 0$.

Пусть $p(t)$ произвольное допустимое управление, а $u(t,x)$, $v(t,x)$ - соответствующие решения краевых задач /1/-/3/ и /10/. Дадим управлению $p(t)$ произвольное допустимое условиями задачи приращение Δp, $p + \Delta p$ - измеримая, по модулю почти всюду на отрезке $[0,T]$ не пре-

восходящая единицы функция. Тогда функция $u(t,x)$ получает приращение $\Delta u(t,x)$, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned}&\Delta u_t = \Delta u_{xx} + f_u(u)\Delta u + f''(\theta)\Delta u^2, \quad f''(\theta) = \int_0^1 f''(u + t\Delta u)dt\\ &\Delta u(0,x) = 0, \qquad \Delta u_x(t,0) = 0\\ &\Delta u_x(t,1) + \alpha\Delta u(t,1) = \alpha\Delta\rho.\end{aligned} \qquad /13/$$

Рассмотрим соответствующее приращение функционала

$$\Delta\mathcal{J}[\rho] = \int_0^1 \{2[u(T,x) - u_0(x)]\Delta u(T,x) + [\Delta u(T,x)]^2\}dx + \beta\int_0^T [2\rho + \Delta\rho]\Delta\rho dt.$$

Полагая в /11/ $\psi = \Delta u$, и проводя выкладки, аналогичные [1], с учетом, что Δu удовлетворяет /13/, получим

$$\int_0^1 v(T,x)\Delta u(T,x)dx - \int_0^T\int_0^1 f''(\theta)(\Delta u)^2 v dx dt = -\alpha\int_0^T \Delta\rho(t)v(t,1)dt.$$

И окончательно,

$$\Delta\mathcal{J}[\rho] = \int_0^T\int_0^1 f''(\theta)(\Delta u)^2 v dx dt + \int_0^1 [\Delta u(T,x)]^2 dx - \alpha\int_0^T \Delta\rho(t)v(t,1)dt + \beta\int_0^T [2\rho(t) + \Delta\rho(t)]\Delta\rho(t)dt.$$

Если положить $h(v(t,1)\rho) = \alpha v(t,1)\rho - \beta\rho^2$, тогда

$$\Delta\mathcal{J}[\rho] = -\int_0^T [h(v(t,1), \rho - \Delta\rho) - h(v,\rho)]dt + \int_0^T\int_0^1 f''(\theta)(\Delta u)^2 v dx dt + \int_0^1 [\Delta u(T,x)]^2 dx.$$

Докажем, что если управление оптимально, то $h(v,\rho)$ почти всюду достигает на нем максимума.

Если управление ρ оптимально, то $\mathcal{J}[\rho_1] - \mathcal{J}[\rho] \geq 0$. Предположим, что $h(v(t,1),\rho)$ не достигает почти всюду максимума, тогда можно указать множество γ_η из $[0,T]$ ненулевой меры η и управление $\rho_1(t)$ такие, что будут выполняться неравенства

$$\mathcal{J}[\rho_1] - \mathcal{J}[\rho] \geq 0$$

$$\Delta h_\rho = h(v(t,1), \rho_1(t)) - h(v(t,1), \rho(t)) > 0$$

для всех $t \in \gamma_\eta$. Обозначим через $\gamma_\eta(n)$ ту часть множества γ_η, для которой $\Delta h_\rho > \frac{1}{n}$, когда $t \in \gamma_\eta(n)$. Тогда можно указать натуральное N такое, что $\Delta h_\rho > \frac{1}{N}$ для $t \in \gamma_\eta(N)$ и при этом $mes\,\gamma_\eta(N) = \varepsilon > 0$.

Введем вспомогательное управление

$$\rho_N(t) = \begin{cases} \rho_1(t), & t \in \gamma_\eta(N) \\ \rho(t), & t \notin \gamma_\eta(N). \end{cases}$$

Тогда

$$J[\rho_N(t)] - J[\rho(t)] \geq 0 . \qquad /16/$$

С другой стороны,

$$\int_0^T [h(v(t,1), \rho_N(t)) - h(v(t,1), \rho(t))]dt \geq \frac{\varepsilon}{N} ,$$

$$\int_0^T \int_0^1 f'(\theta) v(\Delta u)^2 dx dt \leq K_3 \varepsilon^{4/3}$$

$$\int_0^1 [\Delta u(x,T)]^2 dx \leq K_1 \varepsilon^{4/3} .$$

Следовательно, из /15/ получаем

$$J[\rho_N] - J[\rho(t)] < -\frac{\varepsilon}{N} + K_3 \varepsilon^{4/3} + K_1 \varepsilon^{4/3} \leq -\varepsilon \left[\frac{1}{N} - (K_3 + K_1)\varepsilon^{1/3}\right] < 0$$

при достаточно малом ε, а это противоречит /16/. Таким образом, $\rho(t)$ находится из условия, что

$$h(v(t,1), \rho(t)) = \alpha v(t,1)\rho(t) - \beta \rho^2(t)$$

достигает максимума на ρ.

Если $\rho(t)$ - множество всех измеримых ограниченных функций, то

$$\rho(t) = \frac{\alpha}{2\beta} v(t,1).$$

Если же $|\rho(t)| \leq 1$, то запишем $h(v,\rho)$ в виде

$$h = -\beta [\rho - (\alpha/2\beta)v(t,1)]^2 - (\alpha^2/4\beta^2)v^2(t,1).$$

Отсюда видно, что

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, & \varphi(t) \geq 1 \\ \varphi(t), & |\varphi(t)| \leq 1 \\ -1 & \varphi(t) \leq -1 , \end{cases}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{2\beta} v(t,1).$$

Поступила в ред.-изд.отдел
3 января 1975 г.

Литература

1. Егоров А.И. Об условиях оптимальности в одной задаче управления процессом теплопередачи. "Журн.вычислит.математики и мат.физики", 1972, т.12, №3, с.791-799.

2. Егоров Ю.В. Некоторые задачи теории оптимального управления, "Журн.вычислит.математики и мат.физики", 1963, т.№5, с887-904.

3.Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М.,"Наука", 1967, 474 с.

4.Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными-"Труды Моск.мат.о-ва", 1967,т.16,с.325-346.

5.Ладыженская О.А.,Солонников В.А.,Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.,"Наука",1967,736 с.