Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г. выпуск I4.
УДК.51.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

С.В.Севастьянов

В настоящей работе рассмотрен вопрос о нахождении асимптотически оптимального решения в задаче календарного распределения n наименований плана по l периодам времени [4] и в задаче Джонсона о нахождении расписания обработки n деталей на m станках [2]. Обе задачи сведены к задаче об n векторах, и последняя решена в том смысле, что построен алгоритм малой трудоемкости, который при $m = O(n)$ гарантирует получение асимптотически точного решения.

§ I. Формулировка задач и определения

Сформулируем некоторую общую задачу.

З а д а ч а I. Дано множество матриц с неотрицательными коэффициентами, причем число строк n много больше числа столбцов m. Каждой матрице $A=(a_{ij})$ сопоставлено множество $S(A)$ ее допустимых расписаний (их смысл будет определен позже), и задана неотрицательная целевая функция $\eta(s, A)$, $s \in S(A)$. Допустимое расписание s_0 матрицы A называется оптимальным расписанием матрицы A, если

$$\eta(s_0, A) = \min_{s \in S(A)} \eta(s, A).$$

Задача состоит в том, чтобы построить достаточно эффективный алгоритм, который бы для каждой матрицы A находил ее оптимальное расписание. Условимся алгоритм считать достаточно эффективным, если с ростом n его трудоемкость растет не быстрее чем n^c, где c - не зависящая от n константа.

Поскольку в рассматриваемых задачах мощность множества $S(A)$, как правило, порядка $(n!)^m$ [3], то решение таких задач методом полного перебора вариантов $s \in S(A)$ оказывается неэффективным. Уже на протяжении 20 лет,с тех пор, как была опубликована известная работа Джонсона [2], поиски эффективных алгоритмов для многих сравнительно простых задач теории расписаний пока что остаются безуспешными. Поэтому становится актуальной задача построения достаточно эффективных алгоритмов, которые эти задачи решали бы в асимптотическом смысле (см., например, работу [I]).

Попытка применить асимптотический подход к задаче Джонсона была предпринята в работе [5].Здесь установлено одно достаточное условие, при выполнении которого активное(т.е.неуплотняемое) расписание для задачи Джонсона удовлетворяет условию асимптотической оптимальности в том смысле,что его относительное уклонение от оптимума с ростом n становится сколь угодно малым. Однако указанное условие является чересчур жестким: смысл его в том, что разница в загрузке выделенной пары станков не должна превосходить некоторой константы, какой бы набор деталей мы ни взяли.

Определение. Оператор ρ, сопоставляющий каждой матрице A ее допустимое расписание $s^* \in S(A)$, назовем асимптотически оптимальным решением задачи I, если

$$\eta(\rho(A), A) - \eta(s_0, A) \leq \varphi(m) \cdot \|A\|_1 ,$$

где $\|A\|_1 = \max\limits_{i,j} a_{ij}$, $\varphi(m)$ - некоторая положительная функция от m, т.е. значение целевой функции от такого решения отличается от искомого минимума на величину, не зависящую от n.

Значение оператора $\rho(A)$ назовем асимптотически оптимальным расписанием для исходной матрицы A. Приведем теперь постановки конкретных задач, рассматриваемых в настоящей работе. Сформулируем задачу календарного распределения, известную также как задача объемно-календарного планирования [4].

Задача 2. Дано n деталей, m станков. Известна матрица $A=(a_{ij})$ $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ времен обработки деталей на станках. Найти разбиение $\mathcal{M}_n^{\ell}=\{\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_{\ell}\}$ множества $\mathcal{N}=\{1,2,\dots,n\}$ на ℓ непересекающихся подмножеств, минимизирующее функционал

$$\eta_1(\mathcal{M}_n^{\ell}, A) = \max_{1\leq s,\, t\leq \ell}\ \max_{1\leq j\leq m} \Big(\sum_{i\in\mathcal{N}_s} a_{ij} - \sum_{i\in\mathcal{N}_t} a_{ij} \Big). \qquad /1/$$

Иными словами, нужно равномерно распределить загрузку станков по ℓ календарным периодам.

Сформулируем асимптотический аналог задачи. Для этого введем в рассмотрение n векторов из R^m:

$$\mathfrak{A}_n = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \text{где } a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}).$$

Положим $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Для любых натуральных n, m в пространстве $\mathcal{A}_n^m$ матриц размером $n \times m$ введем норму

$$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} \|a_i\| .$$

Задача 2' (асимптотический аналог задачи календарного распределения). Найти функцию $\varphi_1(m)$ и оператор ρ, который по данной матрице A находил бы достаточно эффективным способом такое ее допустимое расписание $(\mathcal{M}_n^{\ell})^* = \rho(A)$, что

$$\eta_1(\rho(A), A) \leq \varphi_1(m) \cdot \|A\|_2 .$$

Чтобы решить задачу 2', мы рассмотрим некоторый оператор ρ и, оценивая для него значение $\eta_1(\rho(A), A)$, получим функцию $\varphi_1(m)$. Для этого введем ортогональные проекторы

$$P_1 : R^m \to L \quad \text{и} \quad P_2 : R^m \to L^* ,$$

где $L=\{x\in R^m \mid (x,a)=0\}$, а $L^*=\{ta \mid t\in R\}$ - ортогональное дополнение L.

Допустим, что мы умеем решать некоторую задачу 3, которая формулируется следующим образом.

Задача 3 (задача об n векторах) . I) Найти функцию $\psi(m)$ такую, чтобы для любого m и для всякой совокупности векторов $\mathcal{B}=\{b_i \in R^m \mid i=1,2,\dots,n\}$, обладающей свойством

$$\sum_{b_i \in \mathcal{B}} b_i = 0 , \qquad /2/$$

существовала последовательность сложения $\tau^*=(i_1, \dots, i_n)$ векторов из $\mathcal{B}$, при которой для любого $1 \le j \le n$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{j} b_{i_k} \right| \le \psi(m) \cdot \max_{1 \le i \le n} |b_i| .$$

Обоснование эффективного способа нахождения искомой перестановки τ^*.

Так как для векторов из $p_1 < \mathcal{A} >$ выполняется соотношение /2/ и подпространство L имеет размерность $(m-1)$, то при сформулированном выше допущении (о том что нам известен метод решения задачи 3) , мы можем эффективно найти такую перестановку τ^* , что для любого $1 \le j \le n$

$$|p_1(a^j)| \le \psi(m-1) \cdot \max_{1 \le i \le n} |p_1(a_i)| \le \psi(m-1) \cdot \|A\|_2 , \qquad /3/$$

где $a^j = \sum_{k=1}^{j} a_{i_k}$.

Искомое разбиение $(\mathcal{M}_n^l)^* = \{N_1, \dots, N_l\}$ мы получим, если "разрежем" найденную перестановку τ^* на l частей по следующему принципу.

Векторы $p_2(\sum_{i \in N_1} a_i), \dots, p_2(\sum_{i \in N_l} a_i)$ должны как можно меньше отличаться по модулю. Так как все векторы a_i имеют положительную проекцию на вектор a , то вектор $p_2(a^j)$ монотонно возрастает по модулю с ростом j и, следовательно, для любого $1 \le k \le l$ легко найти $j = j(k)$, минимизирующее функцию

$$\nu(j) = \left| \frac{k}{l} a - p_2(a^j) \right| .$$

После этого в качестве N_s берем отрезок перестановки τ^* от номера $j(s-1)+1$ до $j(s)$, т.е. $N_s = \{i_{j(s-1)+1}, \dots, i_{j(s)}\}$.

Для полученного разбиения $(\mathcal{M}_n^l)^* = \{N_1, \dots, N_l\}$ оценим величину $\eta_1((\mathcal{M}_n^l)^*, A)$. Обозначим $c_s \doteq \sum_{i \in N_s} a_i$. По определению,

$$\eta_1((\mathcal{M}_n^l)^*, A) = \max_{1 \le s, t \le l} \max_{1 \le i \le m} (c_s(i) - c_t(i)) =$$

$$= \max_{1 \le s, t \le l} \max_{1 \le i \le m} |(c_s - c_t)(i)| , \qquad /4/$$

где запись $a(i)$ означает i -ю координату вектора a . Выражение, стоящее в правой части /4/, оценим сверху, исходя из свойств вектора $c_s - c_t$. Так как $c_s = a^{j(s)} - a^{j(s-1)}$, а для a^j выполняется соотношение /3/, то

$$|p_1(c_s)| \le 2\psi(m-1) \cdot \|A\|_2 .$$

и, следовательно,

$$|p_1(c_s - c_t)| \le 4\psi(m-1) \cdot \|A\|_2 . \qquad /5/$$

Кроме того, из способа разреза перестановки τ^* следует, что

$$|\rho_2(c_s - c_t)| \le 2 \max_{1\le i\le n} |\rho_2(a_i)| \le 2\|A\|_2 . \qquad /6/$$

С учетом /5/ и /6/ для любых $1 \le s$, $t \le \ell$ и для любого $i = 1, 2, \dots, m$ получим

$$|(c_s - c_t)(i)| \le |c_s - c_t| = \sqrt{\rho_1^2(c_s - c_t) + \rho_2^2(c_s - c_t)} \le 2\|A\|_2 \sqrt{4\varphi^2(m-1)+1} .$$

Возвращаясь к /4/, имеем

$$\eta_1((\mathcal{M}_n^\ell)^*, A) \le 2\sqrt{4\varphi^2(m-1)+1}\ \|A\|_2 . \qquad /7/$$

В качестве искомой функции $\varphi_1(m)$ достаточно взять $2\sqrt{4\varphi^2(m-1)+1}$. Таким образом, нахождение асимптотически оптимального календарного распределения (т.е. задачу 2$'$) мы свели к задаче 3.

§ 2. Задача Джонсона

Задача 4. Дано n деталей, m станков. Известна матрица $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ времен обработки деталей на станках. Найти матрицу (расписание) $T = (t_{ij})$ (где t_{ij} – время начала обработки i-й детали на j-м станке), удовлетворяющую следующим требованиям:

1°. $\min\limits_{i,j} t_{ij} = 0$;

2°. для любых $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le m-1$ верно $t_{ij} + a_{ij} \le t_{i,j+1}$;

3°. для любых i, j, k интервалы $(t_{ij}, t_{ij} + a_{ij})$ и $(t_{kj}, t_{kj} + a_{kj})$ не пересекаются;

4°. значение целевой функции $\eta_2(T, A) \doteq \max\limits_{i,j}(t_{ij} + a_{ij})$ минимально.

Расписание T, удовлетворяющее требованиям 1° – 3°, назовем допустимым.

Будем искать асимптотически оптимальное решение задачи 4, причем, для каждой матрицы A будем искать ее асимптотически оптимальное расписание на множестве таких допустимых расписаний, в которых детали проходят через каждый станок в одной и той же последовательности $\tau = (i_1, \dots, i_n)$. Такое расписание будем называть порожденным перестановкой τ и обозначать через $T(\tau)$.

Определение. Расписание $T(\tau)$ назовем уплотняемым, если существуют t_{ij} и $\varepsilon > 0$ такие, что при уменьшении t_{ij} на ε расписание остается допустимым.

Так как ясно, что уплотнение расписания не увеличивает значения целевой функции, то достаточно ограничиться рассмотрением только неуплотняемых расписаний.

Лемма 1. Для вского неуплотняемого расписания $T(\tau)$, порожденного перестановкой $\tau = (i_1, \dots, i_n)$, целевая функция от него имеет следующую аналитическую форму:

$$\eta_2(T(\tau), A) = \max_{1\le k_1 \le k_2 \le \dots \le k_{m-1} \le n} \left(\sum_{\ell=1}^{k_1} a_{i_\ell 1} + \sum_{\ell=k_1}^{k_2} a_{i_\ell 2} + \dots + \sum_{\ell=k_{m+1}}^{n} a_{i_\ell m} \right) \doteq \mu(\tau). \qquad /8/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты записи докажем лемму для перестановки $\tau = (1, 2, \ldots, n)$.

Запишем условия неуплотняемости:

$$t_{i1} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{j1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad /9/$$

$$t_{1k} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{1j}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad /10/$$

$$t_{ij} = max\{ t_{i-1,j} + a_{i-1,j};\ t_{i,j-1} + a_{i,j-1} \}. \qquad /11/$$

Докажем по индукции, что для любых $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ выполняется равенство:

$$t_{ij} = \max_{0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{j-1} \leq i} \left(\sum_{l=1}^{K_1} a_{l1} + \sum_{l=K_1}^{K_2} a_{l2} + \ldots + \sum_{l=K_{j-1}}^{i-1} a_{lj} \right). \qquad /12/$$

Для $i = 1$, $1 \leq j \leq m$ с учетом /10/ имеем:

$$t_{1j} = \sum_{l=1}^{j-1} a_{1l} = \max_{1 \leq K \leq j-1} \sum_{l=K}^{j-1} a_{1l} =$$

$$= \max_{0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{j-1} \leq 1} \left(\sum_{l=1}^{K_1} a_{l1} + \sum_{l=K_1}^{K_2} a_{l2} + \ldots + \sum_{l=K_{j-1}}^{0} a_{lj} \right).$$

Для $1 \leq i \leq n$, $j = 1$ с учетом /9/ имеем:

$$t_{i1} = \sum_{l=1}^{i-1} a_{l1} = \max_{K \in \varnothing} \sum_{l=1}^{i-1} a_{l1}.$$

Предположим, что для t_{ij}, где $i \leq i_0$, $j \leq j_0$, $i+j < i_0 + j_0$ равенство /12/ доказано.

Докажем его для $i = i_0$, $j = j_0$. Из /11/, /12/ и индукционного предположения имеем:

$$t_{i_0 j_0} = max\{ t_{i_0-1,j_0} + a_{i_0-1,j_0};\ t_{i_0,j_0-1} + a_{i_0,j_0-1} \} =$$

$$= max\Big\{ \max_{0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{j_0-1} \leq i_0-1} \left(\sum_{l=1}^{K_1} a_{l1} + \sum_{l=K_1}^{K_2} a_{l2} + \ldots + \sum_{l=K_{j_0-1}}^{i_0-1} a_{lj_0} \right),$$

$$\max_{0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{j_0-2} \leq i_0} \left(\sum_{l=1}^{K_1} a_{l1} + \sum_{l=K_1}^{K_2} a_{l2} + \ldots + \sum_{l=K_{j_0-2}}^{i_0} a_{l,j_0-1} \right) \Big\}. \qquad /13/$$

Приведем графическую интерпретацию выражения, стоящего в правой части соотношения /13/. Для этого изобразим часть матрицы A при $1 \leq i \leq i_0$, $1 \leq j \leq j_0$ рис. I и 2. Указанное выражение равно максимуму двух чисел: α и β соответственно, где α есть максимум сумм вдоль ступенчатых траекторий, идущих из ячейки I в ячейку 3 (рис. I). Множество таких траекторий обозначим $\Delta_{1,3} = \{\delta\}$. Величина β есть максимум сумм вдоль траекторий из $\Delta_{1,2}$ (рис. 2).

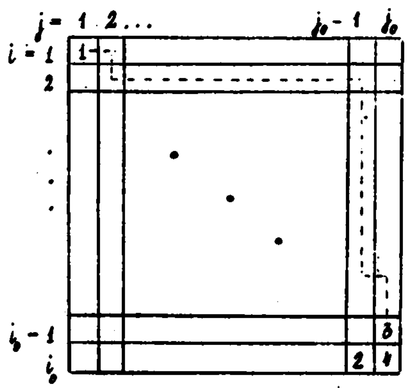

Рис.I.

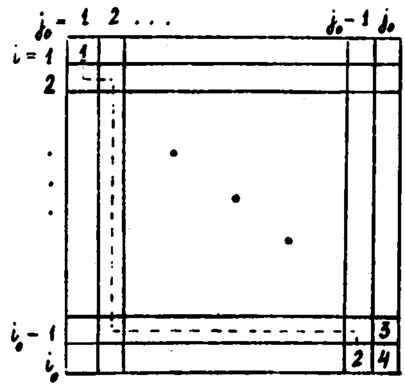

Рис.2.

Сумму вдоль траектории δ обозначим $S(\delta)$, тогда

$$\alpha = \max_{\delta\in\Delta_{1,3}} S(\delta); \qquad \beta = \max_{\delta\in\Delta_{1,2}} S(\delta).$$

Если взять произвольную траекторию $\delta\in\Delta_{1,4}$, то она проходит через ячейку 2 либо через ячейку 3, следовательно,

$$S(\delta)\le \alpha + a_{i_0 j_0} \quad \text{и} \quad S(\delta)\le \beta + a_{i_0 j_0}.$$

С другой стороны, можно найти траектории δ_1 и $\delta_2 \in \Delta_{1,4}$ такие, что

$$S(\delta_1) = \alpha + a_{i_0 j_0} \quad \text{и} \quad S(\delta_2) = \beta + a_{i_0 j_0},$$

следовательно,

$$\max_{\delta\in\Delta_{1,4}} S(\delta) = \max\{\alpha + a_{i_0 j_0}, \beta + a_{i_0 j_0}\} = \max\{\alpha,\beta\} + a_{i_0 j_0},$$

откуда имеем

$$t_{i_0 j_0} = \max\{\alpha,\beta\} - \max_{\delta\in\Delta_{1,4}} S(\delta) - a_{i_0 j_0},$$

что и доказывает соотношение /I2/.

Из /I2/ и равенства $\eta_{\ell_2}(T(\tau), A) = t_{nm} + a_{nm}$ легко получить утверждение леммы.

Введем функционал

$$\mu'(\tau) \doteq \max_{0<k_1<\dots<k_{m-1}<n} \Big(\sum_{\ell=1}^{k_1} a_{i_\ell 1} + \sum_{\ell=k_1+1}^{k_2} a_{i_\ell 2} + \dots + \sum_{\ell=k_{m-1}+1}^{n} a_{i_\ell m} \Big) \qquad /I4/$$

и обозначим $\quad K(A) = \max\limits_{1\le j\le m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$.

Легко видеть, что

$$\mu'(\tau) \le \mu(\tau) \le \mu'(\tau) + (m-1)\,\|A\|_1 . \qquad /I5/$$

Кроме того, для любого допустимого расписания T имеем для $\eta_{\ell_2}(T,A)$ нижнюю оценку

$$K(A) \le \eta_{\ell_2}(T,A). \qquad /I6/$$

Сформулируем задачу, которая, как будет выведено из /I5/ и /I6/, является асимптотическим аналогом задачи 4.

З а д а ч а 4'. Найти функцию $\varphi_2(m)$ и оператор ρ, который для данной матрицы A эффективным способом находит такую перестановку τ^*, что $\mu'(\tau^*) \le K(A) + \varphi_2(m)\cdot \|A\|_1$

Решим задачу 4′ при условии, что задача 3 решена. Возьмем произвольную перестановку $\tau=(i_1,\dots,i_n)$ и "разрежем" ее на m частей. Получим некоторое разбиение $\mathcal{M}_n^m=\{\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_m\}$ множества $\mathcal{N}=\{1,2,\dots,n\}$. Пусть $\mathcal{M}(\tau)$ – множество всех разбиений, получаемых разрезанием τ на m частей. В соответствии с обозначениями § I имеем $c_s \doteq \sum_{i\in\mathcal{N}_s} a_i$. Используя последнее равенство и элементарные свойства ортогональных проекторов P_1 и P_2, получаем оценку для функционала /I4/:

$$\mu'(\tau)\le \max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\sum_{i=1}^m c_i(i)=\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\Big(\sum_{i=1}^m P_1c_i(i)+\sum_{i=1}^m P_2c_i(i)\Big)\le$$
$$\le\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\sum_{i=1}^m P_1c_i(i)+\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\sum_{i=1}^m P_2c_i(i)). \qquad /17/$$

Учитывая, что векторы P_2c_i и a параллельны, имеем:

$$\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\sum_{i=1}^m P_2c_i(i)\le\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\sum_{i=1}^m\max_{1\le j\le m}P_2c_i(j)=$$
$$=\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\max_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^n P_2c_i(j)=\max_{1\le j\le m}a(j)=K(A).$$

Отсюда, обозначая $c^i=\sum_{j=1}^i c_j$ и подставляя в /I7/, получаем для функционала /I4/ следующую оценку:

$$\mu'(\tau)\le K(A)+\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\Big(\sum_{i=1}^m P_1c^i(i)-\sum_{i=1}^m P_1c^{i-1}(i)\Big)=$$
$$=K(A)+\max_{\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau)}\sum_{i=1}^m(P_1c^i(i)-P_1c^i(i+1)). \qquad /18/$$

Пусть выполнено предположение о том, что мы умеем решать задачу 3. Тогда, используя решение задачи, мы можем эффективно найти перестановку τ^*, такую, что для любого $1\le j\le n$ выполняется неравенство $|P_1a^j|\le\psi(m-1)\cdot\|A\|_2$ см. /3/, и следовательно, при любом разбиении $\mathcal{M}_n^m\in\mathcal{M}(\tau^*)$ для всякого $i=1,2,\dots,m$ имеем

$$|P_1c^i|\le\psi(m-1)\cdot\|A\|_2. \qquad /19/$$

Известно, что

$$\max_{\alpha^2+\beta^2\le\gamma^2}(\alpha+\beta)=\max_{\alpha^2+\beta^2=\gamma^2}(\alpha+\beta)=\gamma\sqrt{2}. \qquad /20/$$

Из /I8/, /I9/ и /20/ получаем оценку

$$\mu'(\tau^*)\le K(A)+(m-1)\sqrt{2}\,\psi(m-1)\cdot\|A\|_2\le$$
$$\le K(A)+\sqrt{2m}\,(m-1)\psi(m-1)\cdot\|A\|_1. \qquad /21/$$

Соотношение /2I/ означает, что решение задачи 4′ найдено. Вернемся теперь к задаче 4. Из /I5/, /I6/ и /2I/ следует:

$$K(A)\le\eta_2(T_{opt},A)\le\eta_2(T(\tau^*),A)=\mu(\tau^*)\le$$
$$\le K(A)+(m-1)\|A\|_1+\sqrt{2m}\,\psi(m-1)\cdot(m-1)\|A\|_1=$$
$$=K(A)+(m-1)(1+\sqrt{2m}\,\psi(m-1))\,\|A\|_1, \qquad /22/$$

т.е. $T(\tau^*)$ является асимптотически оптимальным расписанием (решением задачи Джонсона) для исходной матрицы A.

§ 3. Задача об n векторах

Решим задачу, сформулированную в § I, индукцией по размерности пространства R^m. Для m = I значение $\varphi(1)$ = I и искомая перестановка тривиально находится. Пусть дана совокупность векторов $\mathcal{B}=\{b_i \in R^m \mid i=1,2,\ldots,n\}$, такая что

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0,$$

и пусть мы умеем решать задачу 3 для R^{m-1}. Разобьем пространство R^m произвольной гиперплоскостью L на два полупространства R_1^m и R_2^m и обозначим $\sum\limits_{b_i \in \mathcal{B}\cap R_1^m} b_i = B$; тогда $\sum\limits_{b_i \in \mathcal{B}\cap R_2^m} b_i = -B$. Без ограничения общности можно считать, что $B \notin L$. Тогда любой вектор $b \in R^m$ однозначно разлагается в сумму своих косоугольных проекций: проекции на L (обозначим ее $\rho_1(b)$) и проекции на прямую $\{tB \mid t \in R\}$ (обозначим ее $\rho_2(b)$). Так как $\sum\limits_{b_i \in \mathcal{B}\cap R_1^m} \rho_1(b_i) = 0$, то мы можем найти такую последовательность τ_1, сложения векторов из $\rho_1 < \mathcal{B} \cap R_1^m >$, что все промежуточные суммы не выходят из шара радиуса $\varphi(m-1)\cdot \max\limits_{b_i \in \mathcal{B}\cap R_1^m} |\rho_1(b_i)|$. Аналогично находится перестановка τ_2 для векторов из $\rho_1 < \mathcal{B} \cap R_2^m >$. Искомую последовательность τ^* сложения векторов из $\mathcal{B}$ получим, чередуя номера перестановки τ_1 с номерами из τ_2 так, что если полученная промежуточная сумма лежит в R_1^m, то надо брать очередной номер из τ_2 и наоборот. При таком порядке сложения для любого вектора промежуточной суммы b' выполняются соотношения:

$$|\rho_2(b')| \leq b(\mathcal{B}) \cdot \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad /23/$$

$$|\rho_1(b')| \leq 2\varphi(m-1)\cdot b(\mathcal{B}) \cdot \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad /24/$$

где $b(\mathcal{B}) = \max\limits_{b_i \in \mathcal{B}} |b_i|$, а φ - угол между вектором B и нормалью N к плоскости L (рис. 3).

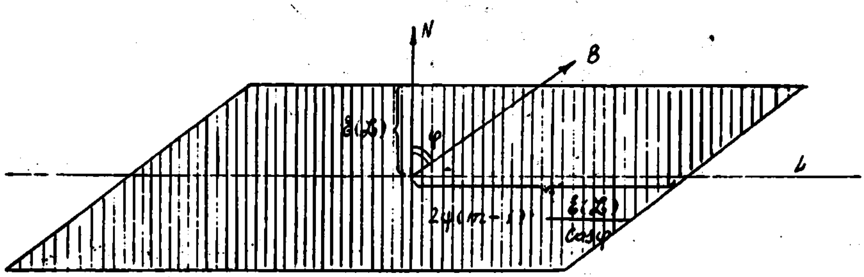

Рис. 3.

Из /23/ и /24/ следует, что для любого j

$$|b^j| \le \frac{b(\mathcal{B})}{\cos\varphi}\sqrt{(2\psi(m-1)+\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{b(\mathcal{B})}{\cos\varphi}\sqrt{4\varphi^2(m-1)+1+4\psi(m-1)\cdot\sin\varphi} \le \frac{b(\mathcal{B})}{\cos\varphi}(2\psi(m-1)+1). \qquad /25/$$

В качестве $\psi(m)$ достаточно взять $\frac{1}{\cos\varphi}(2\psi(m-1)+1)$. Видно, что чем меньше угол φ, тем меньше значение $\psi(m)$. Найдем такую гиперплоскость L, чтобы угол φ был меньше некоторого, наперед заданного угла φ_0. Для этого найдем максимальный по модулю вектор $b\in\mathcal{B}$, т.е. такой, что $|b|=b(\mathcal{B})$, и в качестве первого приближения возьмем гиперплоскость L с градиентом N_1, направленным вдоль вектора b. Вычислим вектор $B(N_1)=\sum\limits_{b_i\in\mathcal{B};(b_i,N_1)>0} b_i$. Если угол между векторами $B(N_1)$ и N_1 больше φ_0, то в качестве следующего приближения берем гиперплоскость с нормалью $N_2 \doteq B(N_1)$ и вычисляем $B(N_2)$ и т.д. Оценим число шагов, за которое мы с гарантией получим искомую гиперплоскость. Так как на каждом шаге $|B(N_i)|$ увеличивается по крайней мере в $\frac{1}{\cos\varphi_0}$ раз, а максимальная по модулю сумма векторов из $\mathcal{B}$ не больше $\frac{n}{2}b(\mathcal{B})$, то таких шагов будет не более чем

$$\frac{\ln\frac{n}{2}}{\ln\frac{1}{\cos\varphi_0}} = \frac{\ln n-\ln 2}{-\ln\cos\varphi_0},$$

т.е. порядка $\ln n$. Так как на каждом шаге на подсчет вектора суммы $B(N_i)$ затрачивается порядка n операций типа сравнений, то всего мы затратили на m-м индукционном шаге порядка $n\ln n$ операций. Легко видеть, что если величина m ограничена сверху, то на нахождение искомой перестановки c^* затрачивается порядка $n\ln n$ операций. При этом

$$\psi(m) = a\psi(m-1)+b,$$

где $a \doteq \frac{2}{\cos\varphi_0}$, $b \doteq \frac{1}{\cos\varphi_0}$. Следовательно,

$$\psi(m) = a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b+\ldots+b =$$

$$= a^{m-1}+b\cdot\frac{a^{m-1}-1}{a-1} = \frac{a+b-1}{a-1}a^{m-1}-\frac{b}{a-1} =$$

$$= \frac{3-\cos\varphi_0}{2-\cos\varphi_0}\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi_0}\right)^{m-1}-\frac{1}{2-\cos\varphi_0},$$

откуда видно, что в качестве $\psi(m)$ можно взять

$$\psi(m) = \frac{3-\cos\varphi_0}{2-\cos\varphi_0}\left(\frac{2}{\cos\varphi_0}\right)^{m-1}. \qquad /26/$$

Чем меньший угол φ_0 мы будем брать, тем меньше будет значение функции $\psi(m)$, но тем больше будет трудоемкость вычислений.

§ 4. Некоторые замечания о функции $\psi(m)$

Из соотношений /7/ и /22/ видно, что функция $\psi(m)$ может быть использована не только для оценки отклонения асимптотически оптимального решения от оптимального в задачах 2 и 4, но и для оценки самого оптимального решения. С этой точки зрения полезно иметь функцию $\psi(m)$ принимающую как можно меньшие значения, чтобы оценки искомого оптимума были точнее. Вычислим более точное значение $\psi(m)$. Если в описанном в § 3 алгоритме на каждом индукционном шаге брать такую гиперплоскость L с градиентом N, что векторы $B(N)$ и N параллельны, то угол $\varphi = 0$ и, следовательно из соотношения /25/ получим:

$$\psi(m)=\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{(2\psi(m-1)+\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi}=\sqrt{4\psi^2(m-1)+1},$$

откуда $\psi^2(m)=4\psi^2(m-1)+1$. Таким образом, учитывая $\psi^2(1)=1$, имеем

$$\psi^2(m)=4^{m-1}+4^{m-2}+\ldots+1=\frac{4^m-1}{4-1},$$

откуда видно, что функция

$$\psi(m)=\frac{2^m}{\sqrt{3}} \qquad /27/$$

удовлетворяет требованиям задачи 3.

В качестве искомой гиперплоскости достаточно взять гиперплоскость с градиентом $b_M \doteq \sum_{b_i\in\mathcal{L}';\ \mathcal{L}'\subset\mathcal{L}} b_i$, где подмножество $\mathcal{L}'$ такое, что

$$|b_M| = \max_{\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}}\Big|\sum_{b_i\in\mathcal{L}'} b_i\Big| .$$

Вопрос о нахождении перестановки τ^* в этом случае сводится к вопросу о нахождении эффективным способом вектора b_M.

Но и в полученном значении $\psi(m)$ мы не избавились от ее экспоненциального характера, так как он является следствием примененного нами индуктивного метода. Вероятно, существенного уменьшения значения функции ψ можно добиться только неиндуктивным методом.

Покажем метод нахождения $\psi(2)$, не использующий переход к одномерному пространству. Пусть дана совокупность векторов $\mathcal{L}=\{b_i\in R^2 \mid i=\overline{1,n}\}$, обладающая свойством /2/. Будем строить перестановку $\tau^*=\{i_1,\ldots,i_n\}$ по индукции, определяя каждую последующую ее координату по всем предыдущим. Введем обозначения: $\mathcal{L}_k(\tau)=\{b_i\in\mathcal{L} \mid i=i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ $(1\le k\le n)$. Для вектора $x\in R^2$ введем подмножества плоскости $\Pi=R^2$:

$$K^+(x)=\{y\in\Pi \mid (\widehat{y,x})\le 60^\circ\},$$
$$K^-(x)=-K^+(x)$$
$$\Pi^+(x)=\{y\in\Pi \mid (y,x)\ge 0\};\ \Pi^-(x)=-\Pi^+(x).$$

Пусть даны векторы x и y . Возьмем вектор y' такой, что $y' \neq 0$, $(y', y) = 0$, $(y', x) \leq 0$ (рис.5) и положим $\Pi_x(y) \doteq \Pi^+(y')$.

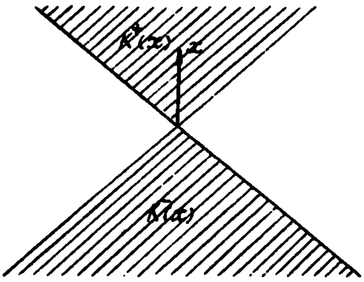

Рис. 4.

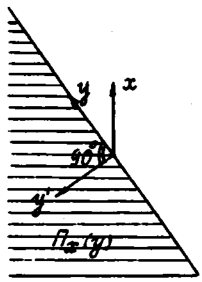

Рис. 5.

В качестве i_1 возьмем произвольное $1 \leq i \leq n$, тогда $|b'| \leq \delta(\mathcal{B})$. Процесс нахождения последовательности τ разобьем на этапы так, что если в конце этапа мы имеем подпоследовательность $i_1, \ldots, i_s$, то $|b^s| \leq \delta(\mathcal{B})$. Пусть мы уже нашли $i_1, \ldots, i_s$, причем $|b^s| \leq \delta(\mathcal{B})$. Возьмем вектор $b_i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_s(\tau)$, имеющий наибольший угол с b^s ,и положим $i_{s+1} := i$. Если $b_{i_{s+1}} \in K^-(b^s)$, то этап закончен (так как в этом случае имеем $|b^{s+1}| \leq \delta(\mathcal{B})$) . Иначе во множестве $\Pi_{b^s}(b_{i_{s+1}}) \cap$ $\cap\, \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{s+1}(\tau)$ берем вектор b_i (согласно /2/ это множество непусто), образующий с $b_{i_{s+1}}$ наименьший угол, и полагаем $i_{s+2} := i$. Этот угол будет, очевидно, больше 120° (см. рис.6), следовательно $|b_{i_{s+1}} + b_{i_{s+2}}| \leq \delta(\mathcal{B})$.

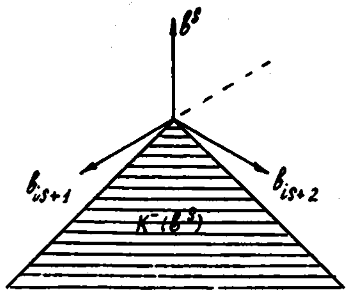

Рис. 6

Если $b_{i_{s+1}} + b_{i_{s+2}} \in K^-(b^s)$, то этап закончен. Иначе во множестве $\Pi_{b^s}(b_{i_{s+1}} + b_{i_{s+2}}) \cap \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{s+2}(\tau)$ берем вектор b_i , образующий наименьший угол с вектором $b_{i_{s+1}} + b_{i_{s+2}}$ и полагаем $i_{s+3} := i$. Проверяем условие

$$b_{i_{s+1}} + b_{i_{s+2}} + b_{i_{s+3}} \overset{?}{\in} K^-(b^s)$$

и в случае невыполнения его продолжаем процесс построения τ описанным выше способом. Пусть этап закончился нахождением $i_{s+\ell}$ -го члена последовательности τ . Из описания алгоритма ясно, что для любого $1 \leq k \leq \ell$

$$b \doteq b_{i_{s+1}} + \ldots + b_{i_{s+k}} \in \Pi \setminus K^{+}(b^{s}) \quad \text{и} \quad |b| \leq \varepsilon'(\mathcal{B}),$$

следовательно

$$|b^{s} + b| \leq \sqrt{3}\, \varepsilon(\mathcal{B}),$$

откуда для любого $1 \leq s \leq n$ получаем

$$|b^{s}| \leq \sqrt{3}\, \varepsilon(\mathcal{B}).$$

Из полученной оценки видно, что в качестве значения $\varphi(2)$ достаточно взять

$$\varphi(2) = \sqrt{3}. \qquad /28/$$

По существу, мы описали алгоритм построения перестановки τ^{*} , трудоемкость которого составляет порядка n^{2} операций.

Для сравнения индуктивный метод в применении к R^{2} дает значение

$$\varphi(2) = \sqrt{2^{2}+1} = \sqrt{5} .$$

Это еще раз подтверждает вывод о том, что необходимо искать неиндуктивные методы решения задачи 3.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность В.А.Перепелице за ценные советы и постоянное внимание к работе.

Поступила в ред-изд.отдел
31 октября 1974 г.

Л и т е р а т у р а

1. Перепелица В.А. Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах. - "Проблемы кибернетики", Вып. 26, М.,"Наука", 1973.

2. Johnson S.M. Optimal Two and Three-Stage Production Schedules with Set-up Times Included.- "Naval Research Legistics Quqterly", I, 1954.

3. Перепелица В.А. Об одной задаче теории расписаний.- "Кибернетика", № 5, Киев, "Наукова думка", 1966.

4. Шкурба В.В., Подчасова Т.П., Пшичук А.Н., Тур Л.П. Задачи календарного планирования и методы их решения. Киев, "Наукова думка", 1966.

5. Португал В.М. Исследование асимптотического поведения решений задачи Джонсона. "Кибернетика", № I, Киев, "Наукова думка",1971.