Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г. выпуск 15.
УДК.519.95.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ СИСТЕМЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.В.Васильев /г.Иркутск/

§ I Постановка задачи

Пусть в каждой точке (s,t) из заданного прямоугольника $\Pi = S \times T$, $S=[s_0,s_k]$, $T=[t_0,t_k]$, зависимость между управлением $u(s,t)\in E^r$ и состояниями $\{x(s,t)\in E^n, y(s,t)\in E^m\}$ процесса определяется уравнениями:

$$x_s(s,t) = f^{(1)}(x(s,t), y(s,t), u(s,t), s, t)$$
$$y_s(s,t) = f^{(2)}(x(s,t), y(s,t), u(s,t), s, t) \qquad /I.I/$$

с начальными условиями:

$$x(s_0,t) = x^0(t), \quad y(s,t_0) = y^0(s). \qquad /I.2/$$

Здесь вектор-функции $f^{(i)}(x,y,u,s,t)$, $i=1,2$, непрерывны по (s,t), в каждой точке $(s,t)\in\Pi$ непрерывны по (x,y,u), непрерывно дифференцируемы по (x,y) до 2-го порядка, удовлетворяют условию Липшица по u вместе с первыми производными по (x,y), $x^0(t)$, $y^0(s)$ - заданные непрерывные функции.

Под допустимыми управлениями будем понимать кусочно-непрерывные на Π вектор-функции $u(s,t)$, выбираемые в каждом (s,t) из некоторого ограниченного и замкнутого множества V евклидова пространства E^r:

$$u(s,t)\in V. \qquad /I.3/$$

При указанных предположениях для каждого допустимого управления решение задачи /I.I/ - /I.2/ существует и единственно [I] на некотором подпрямоугольнике прямоугольника Π в классе кусочно-непрерывных по t, абсолютно-непрерывных по s функций $x(s,t)$ и кусочно-непрерывных по s, абсолютно-непрерывных по t функций $y(s,t)$. Будем считать, что это решение однозначно продолжимо на весь прямоугольник Π.

Качество процесса оценим функционалом

$$J(u) = \int_T F_1(x(s_k,t),t)dt + \int_S F_2(y(s,t_k),s)ds +$$
$$+ \iint_\Pi F_3(x(s,t), y(s,t), u(s,t), s, t)\,ds\,dt, \qquad /I.4/$$

где подынтегральные скалярные функции непрерывно-дифференцируемы по (x,y) до второго порядка, $F_3(x,y,u,s,t)$ удовлетворяют условию Липшица по u вместе со своими частными производными по (z, y). Управление $u^0(s,t)$, доставляющее функционалу /I.4/ наименьшее значение на решениях /I.I/-/I.2/ при допустимых /I.3/, будем называть оптимальным.

Системами /I.I/ - /I.2/ описываются многие явления физики и техники, поэтому процесс управления /I.I/-/I.4/ довольно часто возникает при моделировании конкретных технических процессов, например [2].

В работе [2] при исследовании оптимального процесса с помощью принципа максимума [3] была замечена возможность появления особого управления, т.е. такого, вдоль которого необходимое условие оптимальности типа принципа максимума неэффективно. Исследованию этой ситуации и посвящена настоящая статья. Следует заметить, что несмотря на интенсивное развитие исследований особых управлений в системах с сосредоточенным параметром (см., например, [4]), в распределенных параметрах этот вопрос еще мало разработан. Отчасти это связано с тем, что в отличие от принципа максимума прямое распространение необходимых условий оптимальности высокого порядка, имеющихся в процессах с сосредоточенным параметром, на распределенные наталкивается на принципиальные трудности, которые преодолеваются нестандартными способами в каждом конкретном случае [5].

§ 2. Формула приращения

Для упрощения записи введем некоторые обозначения, а также приведем ряд предварительных результатов.

Пусть

$$\chi(s,t)=\begin{bmatrix} z(s,t) \\ y(s,t) \end{bmatrix}, \quad D\chi(s,t)=\begin{bmatrix} z_s(s,t) \\ y_t(s,t) \end{bmatrix}, \quad f(\chi,u,s,t)=\begin{bmatrix} f^{(1)}(z,y,u,s,t) \\ f^{(2)}(z,y,u,s,t) \end{bmatrix}.$$

Тогда процесс /I.I/ имеет вид:

$$D\chi(s,t)=f(\chi,u,s,t). \qquad /2.I/$$

Предположим далее, что $\chi(\cdot,\cdot)=\chi(s,t)$, $(s,t)\in\Pi$, - элементы банахова пространства, например, $\chi(\cdot,\cdot)\in L_2^{n+m}\Pi$, и управления $u(\cdot,\cdot)=u(s,t)$, $(s,t)\in\Pi$, - также элементы банахова пространства, например $u(\cdot,\cdot)\in L_1^{r}\Pi$. Пусть $f(\chi,u,\cdot,\cdot)\ : L_2^{n}{}^{m}\Pi\times L_1^{r}\Pi\to L_2^{n+m}\Pi$. Эти предположения согласуются с сформулированными выше условиями существования решения системы /I.I/ - /I.2/. Из Этих же условий для произвольных (χ^1,u^1), (χ^2,u^2) следуют обобщенные неравенства Липшица:

$$\|f^{(i)}(\chi^1,u^1,s,t)-f^{(i)}(\chi^2,u^2,s,t)\|\le K(\|z^1(s,t)-z^2(s,t)\|+$$
$$+\|y^1(s,t)-y^2(s,t)\|+\|u^1(s,t)-u^2(s,t)\|),\quad i=1,2,$$

$$\left\|\frac{\partial f^{(i)}(\chi^1,u^1,s,t)}{\partial\chi}-\frac{\partial f^{(i)}(\chi^2,u^2,s,t)}{\partial\chi}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant \mathcal{K}(\|x^1(s,t)-x^2(s,t)\|+\|y^1(s,t)-y^2(s,t)\|+$$
$$+\|u^1(s,t)-u^2(s,t)\|),\quad i=1,2,\quad \mathcal{K}>0,\ \mathcal{K}<+\infty. \qquad /2.2/$$

Здесь $\|a(s,t)\|$ - евклидова норма в каждом (s,t) в отличие от $\|a(\cdot,\cdot)\|$ - элемента $a(\cdot,\cdot)=a(s,t),(s,t)\in\Pi$, банахова пространства.

Пусть также как обычно символ Δf означает полное приращение, а $\Delta_\chi f$ - частное приращение.

Если допустимому $u=u(s,t)$ соответствует состояние $\chi=\chi(s,t)$, а допустимому $\tilde u=u(s,t)-\Delta u(s,t)$ состояние $\tilde\chi=\chi(s,t)+\Delta\chi(s,t)$, то

$$D\Delta\chi(s,t)=\Delta f(\chi,u,s,t),\quad \Delta x(s_0,t)=\Delta y(s,t_0)=0. \qquad /2.3/$$

П р е д л о ж е н и е I. При выполнении условия /2.3/ для $\|\Delta x(s,t)\|$ и $\|\Delta y(s,t)\|$ справедливо

$$\|\Delta x(s,t)\|\leqslant \mathcal{K}_1\left[\int_{s_0}^{s}\|\Delta u(\xi,t)\|d\xi+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(\xi,\tau)\|d\tau d\xi\right],$$
$$\|\Delta y(s,t)\|<\mathcal{K}_2\left[\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(s,t)\|d\tau+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}\|\Delta u(\xi,\tau)\|d\tau d\xi\right],\quad \mathcal{K}_i<+\infty. \qquad /2.4/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из оценки по норме интегрального вида системы /2.3/ с учетом неравенств /2.2/, к которому последовательно применяется лемма Гронуолла и неравенство Вендроффа [6].

Пусть далее

$$\psi(s,t)=\begin{bmatrix}p(s,t)\\ q(s,t)\end{bmatrix}\in E^{n+m},\quad p(s,t)\in E^n,\quad q(s,t)\in E^m,$$

причем $\psi(\cdot,\cdot)\in L_2^{n+m}\Pi$.

Введем в рассмотрение: скалярную скобку

$$\langle\psi(\cdot,\cdot),\chi(\cdot,\cdot)\rangle_\Pi=\iint_\Pi\psi(s,t)'\chi(s,t)dsdt=\iint_\Pi[p'(s,t)x(s,t)+$$
$$+q(s,t)'y(s,t)]dsdt,$$

где $'$, - символ транспонирования;

скалярные функции

$$H_0(\psi,\chi,u,s,t)=p(s,t)'f^{(1)}(\chi,u,s,t)-q(s,t)'f^{(2)}(\chi,u,s,t),$$
$$H(\psi,\chi,u,s,t)=H_0(\psi,\chi,u,s,t)-F_3(\chi,u,s,t);$$

функционалы

$$\mathcal{H}_0(\psi,\chi,u)=\iint_\Pi H_0(\psi,\chi,u,s,t)dsdt,$$
$$\mathcal{H}(\psi,\chi,u)=\iint_\Pi H(\psi,\chi,u,s,t)dsdt,$$

$$\varphi(x)=\int_T F_1(z(s_k,t),t)\,dt+\int_S F_2(y(s,t_k),s)\,ds.$$

По аналогии с [7 , 8] определим вариационные производные $\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)/\delta Dx(s,t)$, $\delta\varphi(x)/\delta Dx(s,t)$ соотношениями:

$$\Delta_x\mathcal{H}(\psi,x,u)=\left\langle\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta Dx(\cdot,\cdot)},\ D\Delta x(\cdot,\cdot)\right\rangle_\Pi+$$
$$+\,O_1^{\psi}(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|)-O_2(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|), \qquad /2.5/$$
$$\Delta_x\varphi(x)=\left\langle\frac{\delta\varphi(x)}{\delta Dx(\cdot,\cdot)},\ D\Delta x(\cdot,\cdot)\right\rangle_\Pi+O_3(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|),$$

где $O_i(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|)/\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|\to 0$, при $\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|\to 0$, $i=1,2$, $\dfrac{\|O_1(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|)\|}{\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|}\to 0$, когда $\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|\to 0$ при ограниченном ψ.

Предложение 2. Для поставленной задачи /I.I/-/I.4/

$$\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta Dx(s,t)}=\begin{bmatrix}\displaystyle\int_s^{s_k}\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)}{\partial z}\,ds\\ \displaystyle\int_t^{t_k}\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)}{\partial y}\,dt\end{bmatrix}, \qquad /2.6/$$

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta Dx(s,t)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1(z(s_k,t),t)}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2(y(s,t_k),s)}{\partial y}\end{bmatrix}. \qquad /2.7/$$

Доказательство. Вначале покажем справедливость формулы /2.6/. Для этого запишем разложение в ряд Тейлора

$$\Delta_x\mathcal{H}(\psi,x,u)=\iint_\Pi\left[\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)'}{\partial z}\Delta z(s,t)+\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)'}{\partial y}\Delta y(s,t)\right]ds\,dt+$$
$$+\iint_\Pi\psi'(s,t)\,O^1(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt-\iint_\Pi O_2(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt.$$

К первому слагаемому в правой части с учетом /2.3/ применим правило интегрирования по частям, например,

$$\iint_\Pi\frac{\partial}{\partial s}\left[-\int_s^{s_k}\frac{\partial H(\psi,x,u,\xi,t)}{\partial z}\,d\xi\right]'\Delta z(s,t)\,ds\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_k}-\left[\int_s^{s_k}\frac{\partial H(\psi,x,u,\xi,t)}{\partial z}\,d\xi\right]'\Delta z(s,t)\Bigg|_{s=s_0}^{s=s_k}dt+\iint_\Pi\int_s^{s_k}\frac{\partial H(\psi,x,u,\xi,t)}{\partial z}\,d\xi\,\Delta z_s(s,t)\,ds\,dt.$$

Произведем оценку остаточных членов

$$0\le|O_2(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|)|=\left|\iint_\Pi O_2(\|\Delta x(s,t)\|)\,ds\,dt\right|\le$$

$$\leqslant \mathcal{K}\iint_{\Pi}\|\Delta \chi(s,t)\|^2 ds dt \leqslant \mathcal{K}\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2 ,$$

$$0\leqslant |O_1^{\psi}(\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|)|\leqslant |\iint_{\Pi}\psi(s,t)'\, O^1(\|\Delta\chi(s,t)\|)\, ds dt| \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K}\iint_{\Pi}\|\psi(s,t)\|\,\|\Delta\chi(s,t)\|^2 ds dt \leqslant \mathcal{K}M\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2 , \qquad /2.8/$$

где $M \geqslant \|\psi(\cdot,\cdot)\|$, $M < +\infty$.

Справедливость формулы /2.6/ показана. Справедливость /2.7/ следует из вида функционала $\varphi(\chi)$ и начальных условий /2.3/. Очевидно также, что

$$\Delta_\chi \mathcal{H}(\psi,\chi,u) = \left\langle \frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta D\chi(\cdot,\cdot)},\ D\Delta\chi(\cdot,\cdot)\right\rangle_\Pi + \frac{1}{2}\left\langle \Delta_\chi \frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta D\chi(\cdot,\cdot)},\ D\Delta\chi(\cdot,\cdot)\right\rangle_\Pi + O_4^{\psi}(\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2) - O_5(\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2),$$

$$\Delta_\chi \varphi(\chi) = \left\langle \frac{\delta\varphi(\chi)}{\delta D\chi(\cdot,\cdot)},\ D\Delta\chi(\cdot,\cdot)\right\rangle_\Pi + \frac{1}{2}\left\langle \Delta_\chi \frac{\delta\varphi(\chi)}{\delta D\chi(\cdot,\cdot)},\ D\Delta\chi(\cdot,\cdot)\right\rangle_\Pi + O_3(\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2), \qquad /2.9/$$

где $O_i(\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2)/\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|^2 \longrightarrow 0$, при $\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\| \longrightarrow 0$.

Кроме того,

$$\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta\psi(s,t)} = f(\chi,u,s,t), \quad \Delta_\psi \frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta D\chi(s,t)} = \frac{\delta\mathcal{H}_0(\psi,\chi,u)}{\delta D\chi(s,t)}, \quad \Delta_\psi \mathcal{H}_0(\psi,\chi,u) = \left\langle \Delta\psi(\cdot,\cdot),\ \frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta\psi(\cdot,\cdot)}\right\rangle_\Pi . \qquad /2.10/$$

Теперь переходим непосредственно к изучению формулы приращения функционала /I.4/ на решениях системы /2.I/. Для нетривиальных функций $\psi(s,t)$, $\Delta\psi(s,t)$ приращение функционала можно представить в виде:

$$\Delta J(u) = \int_T \Delta F_1(z(s_k,t),t)\,dt + \int_S \Delta F_2(y(s,t_k),s)\,ds + \iint_\Pi \Delta F_3(\chi,u,s,t)\,ds dt \iint_\Pi \psi(s,t)'\left[D\Delta\chi(s,t) - \Delta f(\chi,u,s,t)\right] ds dt + \frac{1}{2}\iint_\Pi \Delta\psi(s,t)'\left[D\Delta\chi(s,t) - \Delta f(\chi,u,s,t)\right] ds dt =$$

$$= \Delta_\chi\varphi(\chi) + \langle\psi(\cdot,\cdot),\ D\Delta\chi(\cdot,\cdot)\rangle_\Pi + \frac{1}{2}\langle\Delta\psi(\cdot,\cdot),\ D\Delta\chi(\cdot,\cdot)\rangle_\Pi -$$

$$- \Delta_u\mathcal{H}(\psi,\chi,u) - \Delta_\chi\mathcal{H}(\psi,\chi,\tilde{u}) - \frac{1}{2}\Delta_\chi\mathcal{H}_0(\Delta\psi,\chi,\tilde{u}) -$$

$$- \frac{1}{2}\left\langle\Delta\psi(\cdot,\cdot),\ \Delta_u\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta\psi(\cdot,\cdot)}\right\rangle_\Pi .$$

В правой части полученного равенства по формулам /2.6/, /2.7/, /2.9/ проведем необходимые разложения. Далее, с учетом формул /2.IO/ заметим, что

$$\Delta\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta D\chi(s,t)} = \frac{\delta\mathcal{H}_0(\Delta\psi,\tilde{\chi},\tilde{u})}{\delta D\chi(s,t)} + \Delta_\chi\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,\tilde{u})}{\delta D\chi(s,t)} + \Delta_u\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,\chi,u)}{\delta D\chi(s,t)} . \qquad /2.II/$$

Вектор-функции $\psi(s,t)$ и $\Delta\psi(s,t)$ подчиним "сопряженным" уравнениям

$$\psi(s,t) = -\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\mathcal{D}x(s,t)} + \frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta\mathcal{D}x(s,t)}, \qquad /2.12/$$

$$\Delta\psi(s,t) = -\Delta\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\mathcal{D}x(s,t)} + \Delta\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta\mathcal{D}\,x(s,t)}, \qquad /2.13/$$

причем [1] решения системы /2.12/ при заданном управлении и ему соответствующем состоянии существуют и единственны на всем Π.

Тогда

$$\Delta J(u) = -\Delta_u\mathcal{H}(\psi,x,u) - \frac{1}{2}\Big[\big\langle \Delta_u\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta\mathcal{D}x(\cdot,\cdot)}, \mathcal{D}\Delta x(\cdot,\cdot)\big\rangle_\Pi +$$
$$+\big\langle\Delta\psi(\cdot,\cdot), \Delta_u\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta\psi(\cdot,\cdot)}\big\rangle_\Pi\Big] + o_5(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|^2) +$$
$$+ o_6(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|^2) - o_1^{\Delta\psi}(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|) - o_4^{\psi}(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|)^2. \qquad /2.14/$$

§ 3. Необходимое условие оптимальности первого порядка

Формулу приращения минимизируемого функционала /2.14/ рассмотрим на "специальном" приращении /игольчатая вариация/.

Пусть

$$\Delta_c u(s,t) = \begin{cases} v - u(s,t), & (s,t)\in\Pi_c,\ v\in V,\ \Pi_c\subset\Pi, \\ / & \Pi_c = \{(s,t):\ s\in(\xi-\varepsilon,\xi],\\ & t\in(\tau-\varepsilon,\tau],\ \varepsilon>0\} \\ 0, & (s,t)\in\Pi/\Pi_c. \end{cases}$$

Из формул /2.4/ очевидно, что

$$\|\Delta_c z(s,t)\| \le \begin{cases} 0, & (s,t)\in\Pi_1, \\ K\varepsilon, & (s,t)\in\Pi_2\cup\Pi_c, \\ K\varepsilon^2, & (s,t)\in\Pi_3\cup\Pi_4, \end{cases} \qquad \|\Delta_c y(s,t)\| \le \begin{cases} 0, & (s,t)\in\Pi_1, \\ K\varepsilon, & (s,t)\in\Pi_3\cup\Pi_c, \\ K\varepsilon^2, & (s,t)\in\Pi_2\cup\Pi_4. \end{cases} \qquad /3.1/$$

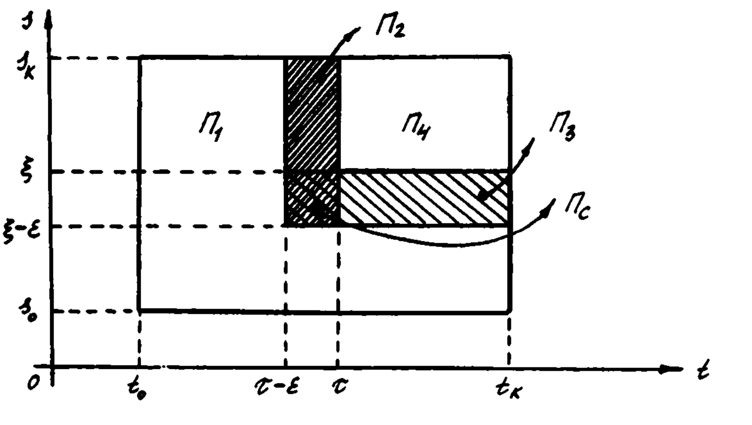

Рис. I

С помощью таких же рассуждений, что и в предложении I, для решения сопряженной системы /2.12/ нетрудно получить:

$$\|\Delta p(s,t)\| \leq \mathcal{K}\left\{\int_s^{s_K}\|\Delta u(s,t)\|ds+\int_s^{s_K}\|\Delta z(s,t)\|ds+\right.$$
$$+\int_s^{s_K}\|\Delta y(s,t)\|ds+\int_s^{s_K}\int_t^{t_K}(\|\Delta z(s,t)\|+\|\Delta y(s,t)\|+\|\Delta u(s,t)\|)dsdt+$$
$$\left.+\|\Delta z(s_K,t)\|\right\};$$

$$\|\Delta q(s,t)\| \leq \mathcal{K}\left\{\int_t^{t_K}\|\Delta u(s,t)\|dt+\int_t^{t_K}\|\Delta z(s,t)\|dt+\int_t^{t_K}\|\Delta y(s,t)\|dt+\right.$$
$$\left.+\int_s^{s_K}\int_t^{t_K}(\|\Delta z(s,t)\|+\|\Delta y(s,t)\|+\|\Delta u(s,t)\|)dsdt+\|\Delta y(s,t_K)\|\right\}.$$

Для специального приращения с учетом /3.I/ из них следует:

$$\|\Delta p(s,t)\| \leq \begin{cases}\mathcal{K}\varepsilon, & (s,t)\in\Pi_6,\\ \mathcal{K}\varepsilon^2, & (s,t)\in\Pi/\Pi_6,\end{cases} \qquad \|\Delta q(s,t)\| \leq \begin{cases}\mathcal{K}\varepsilon, & (s,t)\in\Pi_5,\\ \mathcal{K}\varepsilon^2, & (s,t)\in\Pi/\Pi_5.\end{cases} \qquad /3.2/$$

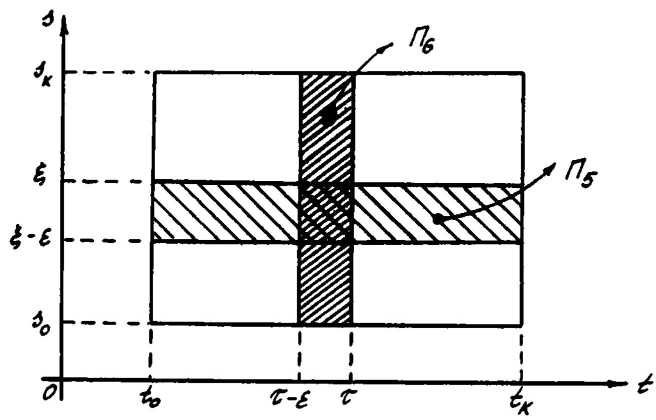

Рис. 2

Пусть

$$\Delta_u^c\mathcal{H}(\psi,\chi,u)=\iint_\Pi\Delta_u^c H(\psi,\chi,u,s,t)dsdt,$$

$$\Delta_u^c H(\psi,\chi,u,s,t)=H(\psi(s,t),\chi(s,t),v,s,t)-H(\psi(s,t),\chi(s,t),u(s,t),s,t).$$

Заметим, что остаточный член $\overset{\Delta\psi}{O_1}(\|\Delta\chi(\cdot,\cdot)\|)$ на специлаьном приращении в силу оценок /3.I/-/3.2/ имеет порядок ε^4 .

Вектор-функции $\psi(s,t)$ и $\Delta\psi(s,t)$ подчиним "сопряженным"уравнениям

$$\psi(s,t) = -\frac{\delta\varphi(x)}{\delta Dx(s,t)} + \frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta Dx(s,t)}, \qquad /2.12/$$

$$\Delta\psi(s,t) = -\Delta\frac{\delta\varphi(x)}{\delta Dx(s,t)} + \Delta\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta D\,x(s,t)}, \qquad /2.13/$$

причем [1] решения системы /2.12/ при заданном управлении и ему соответствующем состоянии существуют и единственны на всем Π.

Тогда

$$\Delta\mathcal{J}(u) = -\Delta_u\mathcal{H}(\psi,x,u) - \frac{1}{2}\Big[\Big\langle\Delta_u\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta Dx(\cdot,\cdot)}, D\Delta x(\cdot,\cdot)\Big\rangle_\Pi +$$
$$+\Big\langle\Delta\psi(\cdot,\cdot), \Delta_u\frac{\delta\mathcal{H}(\psi,x,u)}{\delta\psi(\cdot,\cdot)}\Big\rangle_\Pi\Big] + o_5(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|^2) +$$
$$+ o_6(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|^2) - o_1^{\Delta\psi}(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|) - o_4^{\psi}(\|\Delta x(\cdot,\cdot)\|)^2. \qquad /2.14/$$

§ 3. Необходимое условие оптимальности первого порядка

Формулу приращения минимизируемого функционала /2.14/ рассмотрим на "специальном" приращении /игольчатая вариация/.

Пусть

$$\Delta_c u(s,t) = \begin{cases} v - u(s,t),\ (s,t)\in\Pi_c,\ v\in V,\ \Pi_c\subset\Pi, \\ / \qquad \Pi_c = \{(s,t):\ s\in(\xi-\varepsilon,\xi], \\ \qquad\quad t\in(\tau-\varepsilon,\tau],\ \varepsilon>0\} \\ 0, \qquad (s,t)\in\Pi/\Pi_c. \end{cases}$$

Из формул /2.4/ очевидно, что

$$\|\Delta_c x(s,t)\| \le \begin{cases} 0, & (s,t)\in\Pi_1, \\ K\varepsilon, & (s,t)\in\Pi_2\cup\Pi_c, \\ K\varepsilon^2, & (s,t)\in\Pi_3\cup\Pi_4, \end{cases} \qquad \|\Delta_c y(s,t)\| \le \begin{cases} 0, & (s,t)\in\Pi_1, \\ K\varepsilon, & (s,t)\in\Pi_3\cup\Pi_c, \\ K\varepsilon^2, & (s,t)\in\Pi_2\cup\Pi_4. \end{cases} \qquad /3.1/$$

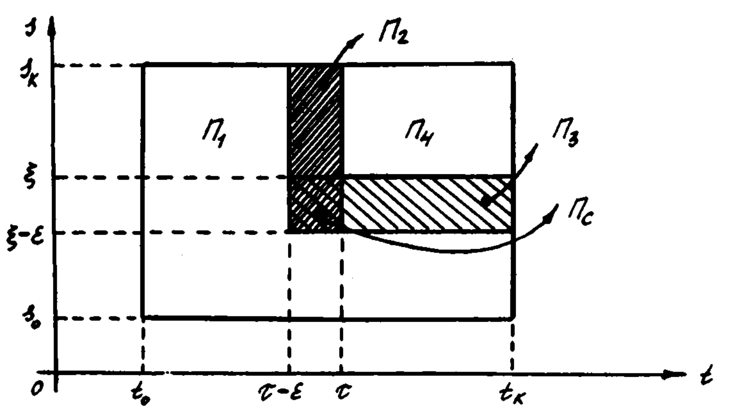

Рис. I

ций $q(s,t)$ по t в каждом s . Это обосновывает возможность перехода от интегральной формы сопряженной задачи к дифференциальной,т.е. к виду /3.5/-/3.6/.

Теорема доказана.

Как уже отмечалось, сформу ованное необходимое условие оптимальности первого порядка, которое является естественным обобщением принципа максимума Л.С.Понтрягина, применялось для исследования оптимальных процессов вида /I.I/-/I.4/ многими авторами, например [2 , 3] . Полученная здесь формула /3.3/ позволяет получить условие оптимальности более высокого порядка, которое может быть использовано, когда соотношение /3.4/ тождественно выполняется вдоль любого допустимого управления, т.е. в случае особых управлений.

§ 4. Необходимое условие оптимальности особого управления

Определение I. Допустимое управление $u=u(s,t)$ называется особым на множестве $\Omega\subset\Pi$ не нулевой меры, если

$$\Delta_u H(\psi,x,u,s,t)\equiv 0, \quad (s,t)\in\Omega .$$

Таким образом, если оптимальное управление $u^0(s,t)$ особое на $\Omega\subset\Pi$, то функция $H(\psi,x^0,u,s,t)$ не зависит от управления $u(s,t)$ на множестве $\mathcal{V}\times\Omega$. Поэтому в точках $(s,t)\in\Omega$ необходимое условие оптимальности /3.4/ не может быть использовано ни как проверочное, ни для вычисления управления, удовлетворяющего условию максимума, в различного рода итерационных процедурах поиска оптимального управления.

Предположим, что управление $u=u(s,t)$ особое на $\Omega\subset\Pi$, и пусть также $(\xi,\tau)\in\Omega$ - точка непрерывности этого управления.Если в этой точке построить специальное приращение, причем так, чтобы $\Pi_c\subset\Omega$, то из формулы /3.3/ следует, что

$$\Delta_c J(u)=-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_c}\Big[\Delta_u^c\int\limits_s^{s_K}\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)}{\partial x}ds'\,\Delta_u^c f^{(1)}(x,u,s,t)+$$

$$+\Delta_u^c\int\limits_t^{t_K}\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)}{\partial y}dt'\,\Delta_u^c f^{(2)}(x,u,s,t)\Big]ds\,dt\,-$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi_c}\Delta_c\psi(s,t)'\Delta_u^c\frac{\partial H(\psi,x,u,s,t)}{\partial\psi}ds\,dt+o(\varepsilon^3). \qquad /4.I/$$

Отсюда видно, что для получения необходимого условия оптимальности второго порядка в выражении $\Delta_c\psi(\xi,\tau)$ нужно выделить член линейный по ε .

При $\xi\leq s<s_K$, $\tau<t<t_K$ из формул /2.6/,/2.7/,/2.II/,/2.I3/ с учетом оценок /3.I/ - /3.2/ следует:

$$\Delta_c p(s,t) = \int_s^{s_K} \Big[\frac{\partial f^{(1)}(x,u,s,\tau)'}{\partial z} \Delta_c p(s,\tau) +$$
$$+ \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,s,\tau)}{\partial z^2} \Delta_c z(s,t) \Big] ds -$$
$$- \frac{\partial F_1(z(s_K,\tau),\tau)}{\partial z^2} \Delta z(s_K,\tau) + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c q(\xi,t) = \int_t^{t_K} \Big[\frac{\partial f^{(2)}(x,u,\xi,t)}{\partial y} \Delta_c q(\xi,t) + \qquad /4.2/$$
$$+ \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi,t)}{\partial y^2} \Delta_c y(\xi,t) \Big] dt -$$
$$- \frac{\partial^2 F_2(y(\xi,t_K)\xi)}{\partial y^2} \Delta y(\xi,t_K) + o(\varepsilon).$$

Из тождества /2.7/ на специальном приращении очевидно, что

$$\Delta_c x(s,t) \equiv 0, \quad (s,t) \in \Pi_s,$$
$$\Delta_c z(\xi,\tau) = \Delta_u^c f^{(1)}(x,u,\xi,\tau)\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c y(\xi,\tau) = \Delta_u^c f^{(2)}(x,u,\xi,\tau)\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c z(s,\tau) = \Delta_u^c f^{(1)}(x,u,\xi,\tau)\varepsilon + \qquad /4.3/$$
$$+ \int_\xi^s \frac{\partial f^{(1)}(x,u,s,\tau)}{\partial z} \Delta_c z(s,\tau) ds + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c y(\xi,t) = \Delta_u^c f^{(2)}(x,u,\xi,\tau)\varepsilon + \int_\tau^t \frac{\partial f^{(2)}(x,u,\xi,t)}{\partial y} \Delta_c y(\xi,t) dt + o(\varepsilon),$$
$$\xi \leqslant s \leqslant s_K, \quad \tau \leqslant t \leqslant t_K.$$

Положим
$$\Delta_c p(s,t) = \varepsilon \delta p(s,t) + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c q(s,t) = \varepsilon \delta q(s,t) + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c z(s,t) = \varepsilon \delta z(s,t) + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c y(s,t) = \varepsilon \delta y(s,t) + o(\varepsilon).$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при ε, из уравнений /4.2/-/4.3/, записанных в дифференциальной форме, будем иметь:

$$\delta p_s(s,\tau) = - \frac{\partial f^{(1)}(x,u,s,\tau)'}{\partial z} \delta p(s,\tau) - \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,s,\tau)}{\partial z^2} \delta z(s,\tau),$$
$$\qquad /4.4/$$
$$\delta q_t(\xi,t) = - \frac{\partial f^{(2)}(x,u,\xi,t)'}{\partial y} \delta q(s,t) - \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi,t)}{\partial y^2} \delta y(\xi,t),$$

$$\delta p(s_k,\tau) = -\frac{\partial^2 F_1(z(s_k,\tau),\tau)}{\partial z^2}\delta z(s_k,\tau),$$

$$\delta q(\xi,t_k) = -\frac{\partial^2 F_2(y(\xi,t_k),\xi)}{\partial y^2}\delta y(\xi,t_k), \qquad /4.5/$$

$$\delta z_s(s,\tau) = \frac{\partial f^{(1)}(x,u,s,\tau)}{\partial z}\delta z(s,\tau),$$

$$\delta y_t(\xi,t) = \frac{\partial f^{(2)}(x,u,\xi,t)}{\partial y}\delta y(\xi,t), \qquad /4.6/$$

$$\Delta z(\xi,\tau) = \Delta_u^c f^{(1)}(x,u,\xi,\tau),$$

$$\Delta y(\xi,\tau) = \Delta_u^c f^{(2)}(x,u,\xi,\tau). \qquad /4.7/$$

Далее предположим, что

$$\delta p(s,\tau) = P(s)\delta z(s,\tau),$$
$$\delta q(\xi,t) = Q(t)\delta y(\xi,t),$$

где $P(s), Q(t)$ – $(n\times n)$, $(m\times m)$ – симметрические матрицы с непрерывными по своим аргументам коэффициентами.

Тогда уравнения /4.4/-/4.5/ будут обращаться в тождества на решениях системы /4.6/-/4.7/, если матрицы удовлетворяют матричным уравнениям:

$$P_s(s) = -P(s)\frac{\partial f^{(1)}(x,u,s,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial f^{(1)}(x,u,s,\tau)'}{\partial z}P(s) - \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,s,\tau)}{\partial z^2},$$

$$P(s_k) = -\frac{\partial^2 F_1(z(s_k,\tau),\tau)}{\partial z^2}; \qquad /4.8/$$

$$\dot Q(t) = -Q(t)\frac{\partial f^{(2)}(x,u,\xi,t)}{\partial y} - \frac{\partial f^{(2)}(x,u,\xi,t)'}{\partial y}Q(t) - \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi,t)}{\partial y^2};$$

$$Q(t_k) = -\frac{\partial^2 F_2(y(\xi,t_k),\xi)}{\partial y^2}. \qquad /4.9/$$

Таким образом

$$\Delta\psi(\varepsilon,\tau) = \begin{bmatrix} P(\xi)\Delta_u^c f^{(1)}(x,u,\xi,\tau) \\ Q(\tau)\Delta_u^c f^{(2)}(x,u,\xi,\tau)\end{bmatrix}\varepsilon + o(\varepsilon). \qquad /4.10/$$

Т е о р е м а 2. Пусть допустимое управление $u^\circ = u^\circ(s,t)$ оптимально в поставленной задаче /I.I/-/I.4/ и особое на множестве $\Omega\subset\Pi$ не нулевой меры. Тогда в почти каждой точке $(\xi,\tau)\in\Omega$ это управление удовлетворяет условию:

$$\Delta_u^c \frac{\partial H(\psi,x^\circ,u^\circ,\xi,\tau)'}{\partial x}\Delta_u^c f(x^\circ,u^\circ,\xi,\tau) +$$
$$+ \Delta_u^c f^{(1)}(x^\circ,u^\circ,\xi,\tau)'P(\xi)\Delta_u^c f^{(1)}(x^\circ,u^\circ,\xi,\tau) +$$
$$+ \Delta_u^c f^{(2)}(x^\circ,u^\circ,\xi,\tau)'Q(\tau)\Delta_u^c f^{(2)}(x^\circ,u^\circ,\xi,\tau) < 0, \quad \forall\, \vartheta\in\mathcal{V}, \qquad /4.11/$$

где вектор функция $\psi = (p(s,t),\ q(s,t))$ является решением сопряженной задачи /3.5/-/3.6/, а матричные функции находятся из решения матричных уравнений /4.8/-/4.9/ при

$$u = u^{\circ}(s,t),\quad x = x^{\circ}(s,t),\quad \psi = \psi(s,t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы следует из полученных формул /4.I/, /4.IO/.

В заключение рассмотрим иллюстративный пример.

$$z_s(s,t) = u(s,t),$$

$$(s,t) \in \Pi = \{(s,t): 0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1\},$$

$$y_t(s,t) = y(s,t) - z(s,t),$$

$$z(0,t) = 0,\quad y(s,0) = s\left(\frac{1}{e} - 1\right),\quad |u(s,t)| \le 1,$$

$$J(u) = -\frac{1}{2}\int_0^1 (z(s,t)-1)^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^1 y(s,1)^2 ds.$$

Проверим на оптимальность допустимое управление $u^{\circ}(s,t) \equiv -1$. При этом управлении

$$z^{\circ}(s,t) = s,\quad y^{\circ}(s,t) = s(e^{t-1} - 1).$$

Таким образом, $J(u^{\circ}) = 0$.

Сопряженная задача /3.5/-/3.6/ имеет вид:

$$p_s(s,t) = q(s,t),\quad p(1,t) - z^{\circ}(1,t) + 1 = 0,$$
$$q_t(s,t) = -q(s,t),\quad q(s,1) = -y^{\circ}(s,1) = 0.$$

Отсюда ее решение

$$p(s,t) = q(s,t) = 0.$$

Условие максимума /3.4/ тождественно выполняется вдоль любого допустимого управления, т.е. управление $u^{\circ}(s,t)$ особое на всем Π.

Необходимое условие оптимальности особого управления /4.II/ для нашей задачи преобразуется к виду: $P(s) \le 0$, где $P(s)$ удовлетворяет уравнению /4.8/, именно, $P_s(s) = 0$, $P(1) = +1$. Отсюда $P(s) > 0$, что противоречит необходимому условию оптимальности. Следовательно, управление $u^{\circ}(s,t) \equiv -1$ не оптимально в рассмотренной задаче.

Поступила в ред.-изд.отдел.
18 апреля 1975 г.

Л и т е р а т у р а

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., "Наука" 1968.

2. Быков В.И., Яблонский Г.С., Слинько М.Г. Применение принципа максимума для оптимизации квазистационарных каталитических процессов с изменяющейся активностью, JFIP technical conference on optimization

techniques, препринт 3, Новосибирск, 1974, с. 11-16.

3. Волин Ю.М., Островский Г.М. Об одной оптимальной задаче, Автомат. и телемеханика., 1964, № 10, т.25, с.1414-1420.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления, М., "Наука", 1973.

5. Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами.-В кн. Управляемые системы, Новосибирск, 1972. вып. 10, с.27-34.

6. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства М., "Мир", 1965.

7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М., "Наука", 1971.

8. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач оптимального управления.- Докл. АН АЗССР, 1972, № 5.