Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г. выпуск 15.

УДК.519.1.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ НА СЕТИ

В.А.Перепелица, С.В.Севастьянов

В настоящей работе рассматривается малоизученный класс задач дискретной оптимизации, включающий в себя проблему синтеза сети и, в частности, проблему составления такого расписания этого синтеза, какое обеспечивало бы минимум заданной целевой функции при наложении ограничений на структуру сети и на директивные сроки реализации расписания. Предлагаемая ниже математическая постановка отражает содержательные задачи, с которыми авторы столкнулись при планировании выполнения некоторых проектов на практике (создание в малообжитых районах транспортной сети при строительстве БАМ и др.)

С самого начала оговоримся, что все недостающие определения, относящиеся к теории графов, можно найти в [1, 2].

§ 1. Постановка задачи.

Сформулируем некоторую общую проблему.

Дан связный неориентированный n - вершинный граф $G=(V;\mathcal{U})$ с множеством вершин $V=\{v_i\}$ и множеством ребер $\mathcal{U}=\{u_j\}$. Каждому ребру $u_j\in\mathcal{U}$ приписан K - мерный вектор $w_j=(w_{j1},\dots,w_{jK})$ с неотрицательными компонентами. Заданы множества выделенных вершин $V_0\subset V$ и выделенных ребер $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$. Сетью будем называть всякую связную часть H графа G. Сеть $H=(V_H;\mathcal{U}_H)$ назовем допустимой, если она содержит все выделенные вершины и ребра, то есть $V_0\subset V_H$, $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}_H$. Пусть на множестве $\mathcal{H}=\{H\}$ таких допустимых сетей $H=(V_H;\mathcal{U}_H)$ определена некоторая целевая функция $f(H)$. Требуется найти такую сеть $H^*\in\mathcal{H}$, на которой значение целевой функции f достигало бы своего минимума, точнее, требуется построить достаточно эффективный алгоритм (например, трудоемкости порядка n^c операций, где c - константа, не зависящая от n), который бы решал задачу нахождения оптимальной сети H^*.

Частным случаем сформулированной выше проблемы (когда $\mathcal{U}_0=\emptyset$, $w_j=(\ell_j)$, а $f(H)=\sum\limits_{u_j\in H}\ell_j$, где ℓ_j - длина ребра u_j) является известная задача Штейнера [3] на графе, которая пока не решена в смысле существования удовлетворительного алгоритма.

В настоящей работе нас будет интересовать следующая задача, также вложимая в сформулированную выше общую проблему. Она описывает процесс строительства сети дорог, когда для данного графа $G=(V,\mathcal{U})$ необходимо "построить" ребра некоторой магистрали $L^*\subset G$. При этом материалы для строительства находятся в пукте v^*, а остальные ребра сети строятся постольку, поскольку необходимо обеспечить под-

воз материалов к магистрали L^*. В качестве ограничений заданы сроки (то есть длительности) строительства отдельных ребер множества $\mathcal{U}$ директивный срок T окончания строительства выбираемой сети H. Искомый оптимум H^* минимизирует сумму траспортных и строительных затрат на создание сети H. Приведем математическую формулировку этой задачи.

З а д а ч а I. Пусть $\mathcal{U}_0$ представляет собой множество ребер некоторой простой цепи L^*, а V_0 есть множество вершин цепи L^* плюс некоторая отмеченная вершина v^*. Каждому ребру $u_j \in \mathcal{U}$ приписан четырехмерный вектор $w_j = (l_j, \rho_j, c_j, \tau_j)$ с неотрицательными компонентами, где l_j - длина ребра u_j; ρ_j - плотность, т.е. количество стройматериалов на единицу длины; c_j - стоимость строительных материалов ребра u_j; τ_j - время (продолжительность) строительства ребра u_j при условии, что строительство ведется непрерывно с одного конца.

Определим целевую функцию f на множестве допустимых сетей.

Пусть имеется некоторая допустимая сеть $H \in \mathcal{H}$. Множество простых цепей на сети H, выходящих из вершины v^* и оканчивающихся в вершине v_i, обозначим через $\mathcal{L}_i^H$. Каждому ребру $u_j = (v_{i_1}, v_{i_2}) \in H$ сопоставим некоторое натуральное число m_j и разбиение $\mathcal{M}_j = \{u_j^1, \ldots, u_j^{m_j}\}$ числового интервала $[0, l_j]$ на m_j интервалов (термин "разбиение" употребляется здесь в том смысле, что $\bigcup_{k=1}^{m_j} u_j^k = [0, l_j]$, а через u_j^k обозначаем интервал $[z_{k-1}, z_k]$ на вещественной оси, где $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{m_j} = l_j$).

Под $|u_j^k|$ в дальнейшем будем понимать величину $z_k - z_{k-1}$. Кроме того, указанному ребру $u_j \in H$ сопоставим некоторую функцию φ_j: $\mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{L}_{i_1}^H \cup \mathcal{L}_{i_2}^H$, ставящую в соответствие всякому интервалу из $\mathcal{M}_j$ простую цепь из множества $\mathcal{L}_{i_1}^H \cup \mathcal{L}_{i_2}^H$. Раскроем содержательный смысл m_j, $\mathcal{M}_j$ и φ_j. Разбиению числового интервала $[0, l_j]$ на m_j интервалов соответствует некоторое разбиение ребра u_j сети дорог на m_j участков. Здесь нулю соответствует вершина v_{i_1}, а числу l_j - вершина v_{i_2}, причем вершины сети занумерованы так, что $i_2 > i_1$. При этом известно, что материалы для строительства участка $u_j^k \subset u_j$ подвозятся по некоторой цепи $\varphi_j(u_j^k)$ из множества цепей $\mathcal{L}_{i_1}^H \cup \mathcal{L}_{i_2}^H$, подходящих к ребру u_j из пункта v^*. Иначе говоря, тройка $(m_j, \mathcal{M}_j, \varphi_j)$ однозначно задет для ребра u_j схему доставки грузов для его строительства.

Для удобства записи введем также функцию t_j на множестве $\mathcal{L}_{i_1}^H \cup \mathcal{L}_{i_2}^H$, где для определенности полагаем $i_2 > i_1$:

$$t_j(L) = \begin{cases} +1, & L \in \mathcal{L}_{i_2}^H, \\ -1, & L \in \mathcal{L}_{i_1}^H. \end{cases}$$

Множество троек $R = \{(m_j, \mathcal{M}_j, \varphi_j)\}_{u_j \in H}$ назовем допустимым относительно H расписанием, если существует набор действительных чисел $\mathcal{T}(R) = \{t_j, t_j^1, \ldots, t_j^{m_j}\}_{u_j \in H}$ (где t_j^k означает время окончания строительства участка u_j^k, а t_j - ребра u_j), удовлетворяющий сле-

дующим трем условиям.

1/ Для любых $u_j \in H$ и $1 \le k \le m_j$ выполняется соотношение

$$0 \le t_j^k \le t_j \le T, \qquad /1/$$

которое означает, что сроки строительства каждого из ребер выбранной сети H согласуются с директивным сроком T.

2/ Для каждого ребра $u_j = (v_{i1}, v_{i2}) \in H$

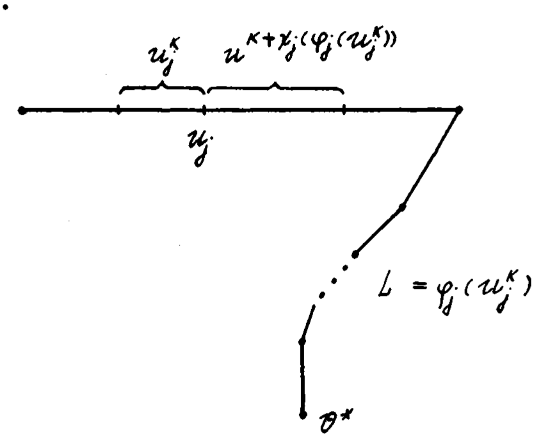
$$2t_j - \min_{L \in \mathcal{L}_{i1}^H} \max_{u_r \in L} t_r - \min_{L \in \mathcal{L}_{i2}^H} \max_{u_r \in L} t_r \ge \tau_j. \qquad /2/$$

Смысл этого неравенства следующий. Величина $\max\limits_{u_r \in L} t_r$ может быть принята за срок ввода в строй цепи L. Так как каждое ребро u_j сети H строится, вообще говоря, с двух концов, то часть ребра, прилегающая к вершине v_{i1} и снабжаемая стройматериалами через вершину v_{i1}, строится в интервале времени $[\min\limits_{L \in \mathcal{L}_{i1}^H} \max\limits_{u_r \in L} t_r, t_j]$, а оставшаяся часть в интервале времени $[\min\limits_{L \in \mathcal{L}_{i2}^H} \max\limits_{u_r \in L} t_r, t_j]$. В то же время известно, что продолжительность строительства ребра u_j составляет τ единиц времени, откуда и вытекает необходимость выполнения условия 2/.

3/ Для любого ребра $u_j \in H$ и всякого его участка $u_j^k \in M_j$

$$l_j t_j^k \ge \tau_j |u_j^k| + l_j \max\left\{t_j^{k+\chi_j(\varphi_j(u_j^k))}, \max_{u_r \in \varphi_j(u_j^k)} t_r\right\}. \qquad /3/$$

Содержательно неравенство /3/ означает, что строительство участка u_j^k не может начаться раньше, чем войдут в строй цепь $\varphi_j(u_j^k)$ (по которой осуществляется снабжение u_j^k стройматериалами) и участок $u_j^{k+\chi_j(\varphi_j(u_j^k))}$, который лежит между участком u_j^k и концом цепи $\varphi_j(u_j^k)$ (см.рис.1). Так как при этом на строительство участка u_j^k требуется времени $\frac{|u_j^k|}{l_j}\tau_j$ (т.е. пропорционально его длине) , то срок t_j^k окончания строительства участка u_j^k должен удовлетворять неравенству /3/.



Множество допустимых относительно сети H расписаний обозначим через $\mathfrak{M}_H = \{R\}$. На множестве $\mathfrak{M}_H$ определим функцию g_H следующим образом. Пусть $R \in \mathfrak{M}_H$, $R = \{(m_j, \mathcal{M}_j, \varphi_j)\}_{u_j \in H}$, тогда

$$g_H(R) = \sum_{u_j \in H} \rho_j \sum_{u_j^k \in \mathcal{M}_j} |u_j^k| \Big[\sum_{u_\tau \in \varphi_j(u_j^k)} \ell_\tau + \frac{1}{2} \ell_j (\chi_j(\varphi_j(u_j^k)) + 1) - \chi_j(\varphi_j(u_j^k)) \cdot \Big(\sum_{\ell=1}^{k-1} |u_j^\ell| + \frac{1}{2} |u_j^k| \Big) \Big], \qquad /4/$$

где величина, стоящая в квадратных скобках, означает среднее расстояние перевозки материалов для строительства участка u_j^k, т.е. от вершины v^* до середины этого участка. Здесь предполагается, что транспортные расходы пропорциональны расстоянию и объему перевозки, который для участка u_j^k равен $\rho_j \cdot |u_j^k|$. Следовательно, в содержательном смысле определенная равенством /4/ функция $g_H(R)$ означает транспортные расходы на строительство всей сети дорог H. При этом подразумевается, что коэффициент пропорциональности транспортных расходов, т.е. стоимость перевозки единицы груза на расстояние единичной длины, может быть заранее учтен значением величин ρ_j (с изменением при этом их содержательного смысла и размерности).

Искомую целевую функцию $f(H)$ определим как сумму

$$f(H) = \sum_{u_j \in H} c_j + \min_{R \in \mathfrak{M}_H} g_H(R), \qquad /5/$$

в которой первое слагаемое означает стоимость всех строительных материалов, необходимых для постройки сети дорог H, а второе слагаемое - транспортные расходы, соответствующие оптимальному допустимому расписанию на сети H.

Если множество $\mathfrak{M}_H$ допустимых относительно H расписаний пусто, то значение $\min_{R \in \mathfrak{M}_H} g_H(R)$ полагаем равным бесконечности. Сеть H^*, на которой значение функционала /5/ достигает минимума, назовем оптимальной.

Нетрудно видеть, что задача I в той формулировке, которая приведена выше, ничуть не легче задачи Штейнера на графе. Более того, построение не эффективного, а любого конечнопереборного алгоритма нахождения оптимальной сети H^* представляется также достаточно трудной задачей.

В настоящей работе задача I решена при следующих допущениях.

1/ Подграф исходного графа G, построенный на множестве вершин $V \setminus \{v^*\}$, является деревом. /6/

2/ Для любых двух простых цепей $L_1 = [v^*, \ldots, v_1]$ и $L_2 = [v^*, \ldots, v_2]$ с одинаковым концом $v_1 = v_2$ должно выполняться соотношение:

$$\text{если} \quad \sum_{u_j \in L_1} \ell_j \geq \sum_{u_j \in L_2} \ell_j, \text{ то } \sum_{u_j \in L_1} \tau_j \geq \sum_{u_j \in L_2} \tau_j. \qquad /7/$$

(квазимонотонная зависимость времени строительства всякого пути L от его длины). Вообще говоря, нам потребуется выполнение этого со-

отношения не для всех случаев, а для более узкого множества пар цепей. Перейдем к решению задачи I с допущениями /6/, /7/ (будем называть ее задачей 2).

§ 2. Анализ оптимальной сети в условиях задачи 2

Если из какой-либо допустимой сети H удалить все ребра, не входящие ни в одну из простых цепей вида $L = [v^*, \dots, v_i]$, $v_i \in L^*$, то она останется допустимой и значение целевой функции /5/ при этом не увеличится. Поэтому в исходном графе G можно заранее удалить все такие ребра, поскольку известно, что в оптимальную сеть они не войдут. После проведения этой операции исходной граф в условиях допущения /6/ примет вид, как показано на рис. 2. Здесь V_1 - множество вершин, смежных с вершиной v^*.

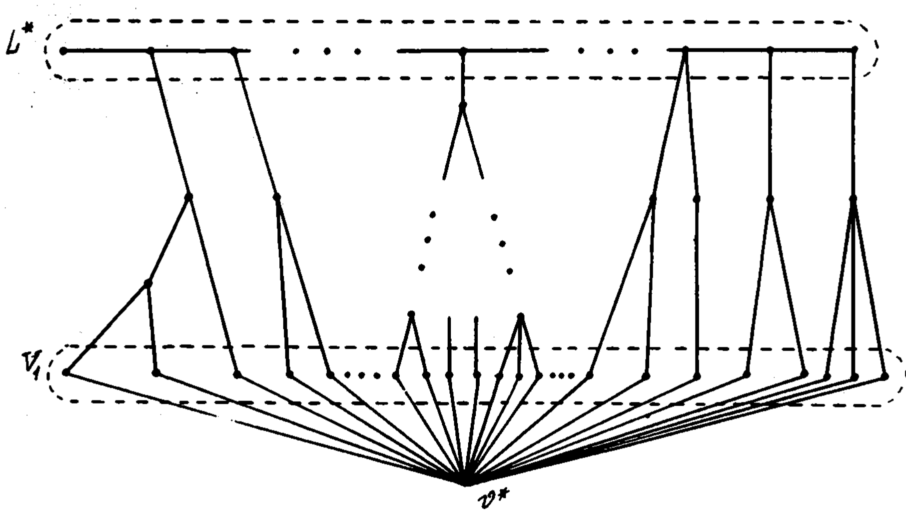


Рис. 2

Для всякой допустимой сети H через L_i^* будем обозначать кратчайшую цепь из $\mathcal{L}_i^H$, т.е. цепь, на которой достигает минимума по $L \in \mathcal{L}_i^H$ величина $\sum\limits_{u_r \in L} l_r$; через $U_1(H)$ обозначим множество ребер $\{u_r \mid u_r \in L_i^H\}_{v_i \in L^*}$, входящих по крайней мере в одну из цепей вида L_i^H, где $v_i \in L^*$.

Л е м м а I. Если из сети H удалить все ребра, не входящие во множество $U^* = U_0 \bigcup U_1(H)$ (и удалить образующиеся при этом изолированные вершины), то оставшаяся часть $H' \subset H$ по-прежнему является допустимой сетью, т.е. $H' \in \mathcal{H}$. При этом значение целевой функции /5/ не увеличится, т.е. $f(H') \le f(H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полученная в результате указанной редукции сеть H' будет, очевидно, допустимой сетью, так как свойство

связности сохранится, а ребра из $\mathcal{U}_0$ и вершины из V_0 в процессе редукции мы не удаляли. Если множество $\mathfrak{M}_H$ допустимых относительно исходной сети H расписаний было пусто, то тем самым доказано и второе утверждение леммы.

Пусть $\mathfrak{M}_H \neq \emptyset$, т.е. существует некоторое допустимое относительно H расписание $R = \{(m_j, \mathcal{M}_j, \varphi_j)\}_{u_j \in H}$. Построим по нему расписание $R' = \{(m_j', \mathcal{M}_j', \varphi_j')\}_{u_j \in H}$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

1/ $R' \in \mathfrak{M}_H$; /8/

2/ $g_H(R') \leq g_H(R)$; /9/

3/ R' замкнуто на сети H', т.е. для любого ребра $u_j \in H'$ и любого $u_j^k \in \mathcal{M}_j'$ цепь $\varphi_j'(u_j^k)$ лежит в H'. /10/

Если мы докажем существование расписания R', удовлетворяющего условиям /8/-/10/, то будут верны и следующие утверждения:

1/ Множество троек $(m_j', \mathcal{M}_j', \varphi_j')$ расписания R', относящихся к ребрам из H', образует некоторое расписание на сети H' (обозначим его $R'|_{H'}$).

2/ Это расписание допустимо относительно H', так как R' допустимо относительно H, а в качестве искомого набора действительных чисел $\mathcal{T}(R'|_{H'})$ достаточно взять числа из $\mathcal{T}(R')$, соответствующие ребрам сети H'.

3/ $g_{H'}(R'|_{H'}) \leq g_H(R')$, так как все слагаемые суммы $g_H(R')$ неотрицательные, а все слагаемые суммы $g_{H'}(R'|_{H'})$ входят в сумму $g_H(R')$.

4/ $g_{H'}(R'|_{H'}) \leq g_H(R)$.

5/ $\sum\limits_{u_j \in H'} c_j < \sum\limits_{u_j \in H} c_j$, так как $H' \subset H$ и $c_j > 0$ для каждого ребра $u_j \in H$.

6/ Так как для каждого расписания $R \in \mathfrak{M}_H$ существует расписание $R'' \in \mathfrak{M}_{H'}$, такое что $g_{H'}(R'') \leq g_H(R)$, то $\min\limits_{R \in \mathfrak{M}_{H'}} g_{H'}(R) < \min\limits_{R \in \mathfrak{M}_H} g_H(R)$, следовательно, $f(H') < f(H)$. Последнее означает, что для доказательства леммы I достаточно построить расписание R', удовлетворяющее условиям /8/-/10/.

Для удобства дальнейших рассуждений предположим, что вершины сети H занумерованы так, что для всякой кратчайшей цепи $L_{i_k}^H = [v^*, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$, $v_{i_k} \in H$, выполняется неравенство $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ $(v^* = v_0)$. Расписание R' мы получим из расписания R, изменяя последнее, если понадобится, на ребрах из $\mathcal{U}^*$ следующим образом.

Пусть ребро $u_j = (v_{i_1}, v_{i_2}) \in \mathcal{U}^*$ $(i_1 < i_2)$, тогда для отрезка $[0, l_j]$ параметры его разбиения m_j и $\mathcal{M}_j$ оставим прежними (как в расписании R), а вместо функции φ_j возьмем функцию φ_j':

$$\varphi_j'(u_j^k) \doteq \begin{cases} L_{i_1}^H, & \text{если } (u_j \in \mathcal{U}_1(H)) \vee [(u_j \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_1(H)) \& (\varphi_j(u_j^k) \in \mathcal{L}_{i_1}^H)], \\ L_{i_2}^H, & \text{если } (u_j \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_1(H)) \& (\varphi_j(u_j^k) \in \mathcal{L}_{i_2}^H). \end{cases} \quad /11/$$

Поясним смысл функции φ_j' (см. рис. 3 и 4).

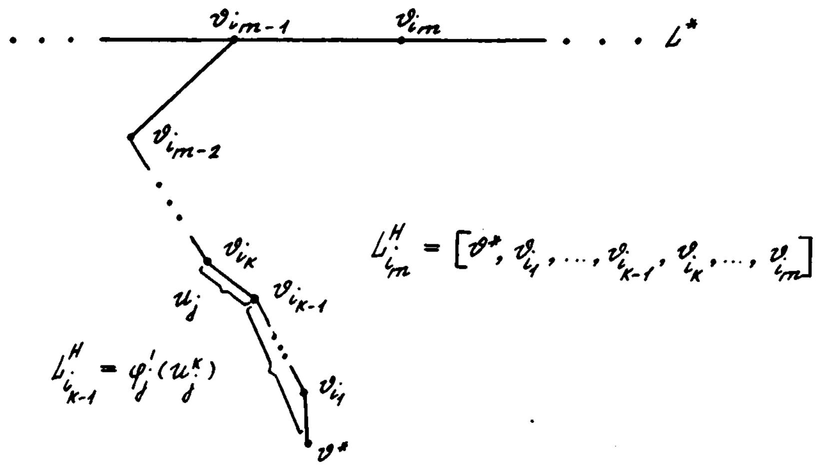


Рис. 3

На рис. 3 ребро $u_j = (v_{i_{k-1}}, v_{i_k})$ содержится в цепи $L^H_{i_m}$, где $v_{i_m} \in L^*$, то есть u_j принадлежит множеству $U_1(H)$. В качестве значения функции $\varphi_j'(u_j^k)$ для всех k $(1 \leq k \leq m_j)$ берем цепь $L^H_{i_{k-1}}$, кратчайшую из цепей $\mathcal{L}^H_{i_{k-1}}$. Очевидно, что кратчайшей цепью, идущей из вершины v^* в вершину $v_{i_{k-1}}$, является отрезок цепи $L^H_{i_m}$ от вершины v^* до вершины $v_{i_{k-1}}$.

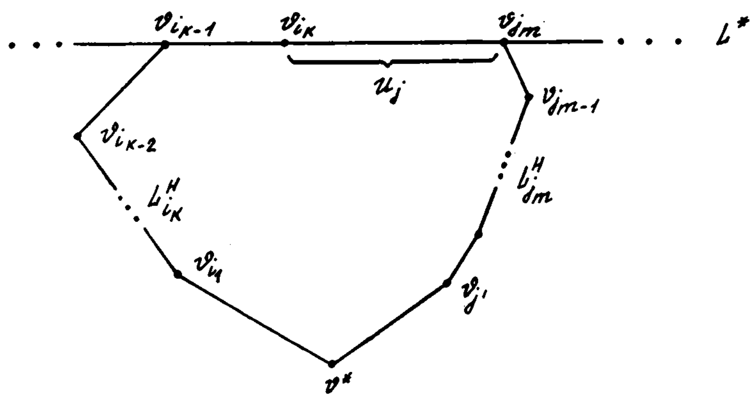


Рис. 4

На рис. 4 ребро $u_j = (v_{i_k}, v_{j_m})$ принадлежит множеству $U_0 \setminus U_1(H)$. Для него определяем значение функции φ_j' следующим образом. Если цепь $\varphi_j(u_j^k)$ принадлежала множеству $\mathcal{L}^H_{i_k}$, то есть в расписании R материалы для строительства участка u_j^k подвозились через пункт v_{i_k} то и в расписании R они будут подвозиться через v_{i_k} только по кратчайшему пути, то есть $\varphi_j'(u_j^k)$ полагаем равной цепи $L^H_{i_k}$. Анало-

гично, если $\varphi_j(u_j^K) \in \mathcal{L}_{jm}^H$, то полагаем $\varphi_j'(u_j^K) = L_{jm}^H$.

Докажем, что построенное таким образом расписание R' обладает свойствами /8/-/10/.

Прежде всего, условие /10/ выполняется, так как для ребра $u_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ $(i_1 < i_2)$, содержащегося в цепи L_i^H $(v_i \in L^*)$, выполняется включение $\varphi_j'(u_j^K) = L_{i_1}^H \subset L_i^H \subset H'$.

Докажем выполнение условия /8/ для расписания R', то есть его допустимость относительно H. Для этого, согласно определению допустимости, достаточно построить набор чисел $\mathcal{T}(R') = \{t_j', (t_j')', \ldots, (t_j^{m_j})'\}_{u_j \in H}$, удовлетворяющий условиям /1/, /2/, /3/. Определим его следующим образом. Для ребер $u_j = (v_{i_1}, v_{i_2}) \in \mathcal{U}_1(H)$ положим

$$t_j' \doteq \sum_{u_r \in L_{i_2}^H} \tau_r , \qquad /12/$$

$$(t_j^K)' \doteq \sum_{u_r \in L_{i_1}^H} \tau_r + \frac{\tau_j}{\ell_j} \sum_{l=1}^{K} |u_j^l| , \qquad /13/$$

(т.е. предполагается, что в новом расписании R' кратчайшие цепи вида L_i^H, $v_i \in L^*$, мы будем строить непрерывно от пукта v^* к пункту v_i, начав строительство в нулевой момент времени). Для остальных ребер $v_j \in H$ положим

$$t_j' \doteq t_j, \ (t_j^K)' \doteq t_j^K, \quad 1 \leq K \leq m_j ,$$

где t_j, t_j^K – числа из набора $\mathcal{T}(R)$.

Докажем, что построенный набор чисел $\mathcal{T}(R')$ удовлетворяет условиям /1/, /2/, /3/. В самом деле, для ребер $u_j = (v_{i_1}, v_{i_2}) \in \mathcal{U}_1(H)$ из равенства /12/ следует:

$$2t_j' = 2\sum_{u_r \in L_{i_2}^H} \tau_r = \tau_j + \sum_{u_r \in L_{i_2}^H} \tau_r + \sum_{u_r \in L_{i_1}^H} \tau_r = \tau_j + \max_{u_r \in L_{i_2}^H} t_r' +$$

$$+ \max_{u_r \in L_{i_1}^H} t_r' \geq \tau_j + \min_{L \in \mathcal{L}_{i_2}^H} \max_{u_r \in L} t_r' + \min_{L \in \mathcal{L}_{i_1}^H} \max_{u_r \in L} t_r' ,$$

откуда вытекает справедливость неравенства /2/ для ребер из $\mathcal{U}_1(H)$. А из определений /11/, /13/ для $u_j \in \mathcal{U}_1(H)$, $u_j^K \in \mathcal{M}_j'$ следует

$$\tau_j |u_j^K| + \ell_j \max\Big\{(t_j^{K+\gamma_j(\varphi_j'(u_j^K))})', \max_{u_r \in \varphi_j'(u_j^K)} t_r'\Big\} =$$

$$= \tau_j |u_j^K| + \ell_j \max\Big\{(t_j^{K-1})', \sum_{u_r \in L_{i_1}^H} \tau_r\Big\} =$$

$$= \tau_j |u_j^K| + \ell_j \Big(\sum_{u_r \in L_{i_1}^H} \tau_r + \frac{\tau_j}{\ell_j} \sum_{l=1}^{K-1} |u_j^l|\Big) =$$

$$= \ell_j \sum_{u_r \in L_{i_1}^H} \tau_r + \tau_j \sum_{l=1}^{K} |u_j^l| = \ell_j (t_j^K)' ,$$

тем самым для $u_j \in \mathcal{U}_1(H)$ неравенство /3/ также доказано. Кроме того, из определений /12/ и /13/ следует неравенство

$$0\le (t_j^{k})'\le t_j',\qquad u_j\in\mathcal{U}_1(H),\qquad 1\le k\le m_j .$$

Нам известно, что для чисел набора $\mathcal{T}(R)$ условия (1), (2), (3) выполнены. Следовательно, чтобы показать выполнение неравенств /2/,/3/ и неравенства $t_j'\le T$ для набора $\mathcal{T}(R')$ на остальных ребрах сети H, (т.е. не принадлежащих множеству $\mathcal{U}_1(H)$) достаточно установить неравенство

$$t_j'\le t_j,\quad t_j'\in\mathcal{T}(R'),\quad t_j\in\mathcal{T}(R),\quad u_j\in H. \qquad /14/$$

При доказательстве последнего нам понадобится следующая

Л е м м а 2. Пусть набор чисел $\mathcal{T}(R)$, соответствующий некоторому допустимому относительно сети H расписанию R, удовлетворяет условиям /1/,/2/, /3/. Тогда для каждой вершины $v_i\in H$ выполняется неравенство

$$\min_{L\in\mathcal{L}_i^H}\ \max_{u_\tau\in L} t_\tau\ \ge\ \min_{L\in\mathcal{L}_i^H}\ \sum_{u_\tau\in L}\tau_\tau . \qquad /15/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой вершине $v_i\in H$ припишем вес $t(v_i)\doteq\min\limits_{L\in\mathcal{L}_i^H}\max\limits_{u_\tau\in L} t_\tau$, означающий момент времени, когда пункт v_i становится связанным с пунктом v^* построенной сетью дорог. Для v^* положим $t(v^*)=0$. Кроме того, для каждой вершины $v_i\in H$ выберем цепь из $\mathcal{L}_i^H$, на которой достигается этот минимум, и обозначим ее через L_i. Вообще говоря, для каждой вершины $v_i\in H$ таких цепей может быть несколько. Мы выберем их по одной для каждой вершины так, чтобы $\bigcup\limits_{v_i\in H} L_i$ было деревом. Это можно сделать следующим образом. Пусть, например, для вершин v_{i_k} и v_{j_m} мы выбрали первоначально цепи $L_{i_k}'=[v^*, v_{i_1},\dots,v_{i_t},\dots,v_{i_k}]$ и $L_{j_m}'=[v^*, v_{j_1},\dots,v_{j_s},\dots,v_{j_m}]$, пересекающиеся в некоторой вершине $v_{i_t}=v_{j_s}$ (отличной от вершины v^*) и образующие при этом цикл /см.рис.5/.

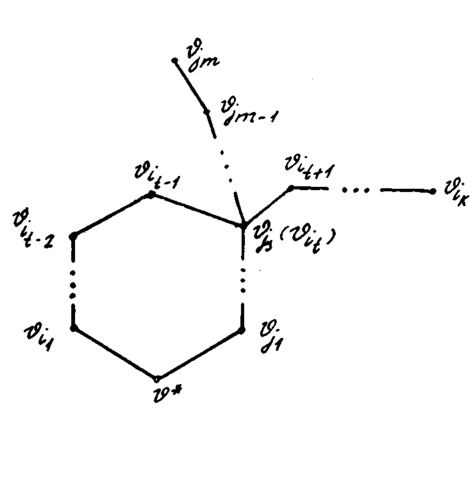


Рис.5

Точнее, цикл образуют некоторый отрезок $L'=[v^*, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}]$ цепи L'_{i_k} и отрезок $L''=[v^*, v_{j_1}, \dots, v_{j_s}]$ цепи L'_{j_m}. Пусть для L' и L'' верно неравенство $\max\limits_{u_z \in L'} t_z \le \max\limits_{u_z \in L''} t_z$, тогда в цепи L'_{j_m} заменим цепь L'' на цепь L', в результате чего для вновь образованной цепи $L_{j_m} \doteq [v^*, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}, v_{j_{s+1}}, \dots, v_{j_m}]$ будет верно соотношение $t(v_{j_m}) = \max\limits_{u_z \in L_{j_m}} t_z$, а цепи L'_{i_k} и L_{j_m} цикла уже не образуют.

Будем доказывать неравенство /15/ последовательно для всех вершин $v_i \in H$, расположенных в порядке возрастания веса $t(v_i)$ согласно некоторой последовательности $P = < v_{i_1}, \dots, v_{i_n} >$. Причем последовательность P такая, что если для каких-то двух вершин v_i и v_j имеем $t(v_i) = t(v_j)$ и $v_i \in L_j$, то вершина v_i предшествует вершине v_j. Пусть вершина v_{i_1} – первый член последовательности P (вершину v^* будем считать нулевым членом), тогда цепь L_{i_1} представляет собой ребро $u_j = (v^*, v_{i_1})$. Применяя к этому ребру неравенство /2/:

$$2t_j \geqslant t(v^*) + t(v_{i_1}) + \tau_j$$

и используя тот факт, что $t(v^*)=0$, $t(v_{i_1})=t_j$, получаем неравенство $t_j \geqslant \tau_j$, откуда имеем:

$$t(v_{i_1})=t_j \geqslant \tau_j \geqslant \min_{L \in \mathcal{L}^H_{i_1}} \sum_{u_z \in L} \tau_z .$$

Тем самым мы доказали неравенство /15/ для вершины v_{i_1}.

Пусть неравенство доказано для первых K членов последовательности $v_{i_1}, \dots, v_{i_K}$. Ясно, что $\bigcup\limits_{s=1}^{K} L_{i_s}$ является деревом (обозначим его через $\mathcal{D}_K$) со множеством вершин $\{v^*, v_{i_1}, \dots, v_{i_K}\}$. В самом деле, если бы в дереве $\mathcal{D}_K$ существовала вершина v_ℓ, для которой неравенство /15/ еще не доказано, то ее вес $t(v_\ell)$ был бы не меньше веса $t(v_{i_K})$. С другой стороны, так как $v_\ell \in L_{i_s}$ для некоторой вершины v_{i_s} $(1 \le s \le K)$, то $t(v_\ell) \le t(v_{i_s}) < t(v_{i_K})$, откуда заключаем, что $t(v_\ell) = t(v_{i_s})$, т.е. вершина v_ℓ должна идти в последовательности $v_{i_1}, \dots, v_{i_K}, \dots, v_{i_n}$ раньше, чем вершина v_{i_s}, и, следовательно, неравенство /15/ для нее к $(K+1)$-му шагу должно быть уже доказано.

Пусть вершина $v_{i_{K+1}}$ - следующий по порядку член нашей последовательности. Тогда в цепи $L_{i_{K+1}}$ лишь одно ребро $u_j=(v_{i_s}, v_{i_{K+1}})$ (где $v_{i_s} \in \mathcal{D}_K$) не принадлежит дереву $\mathcal{D}_K$. С учетом неравенства /2/ для ребра u_j получаем:

$$2t_j \geqslant t(v_{i_{K+1}}) + t(v_{i_s}) + \tau_j .$$

Из определения веса $t(v_{i_{K+1}})$ имеем:

$$t(v_{i_{K+1}}) = \max_{u_z \in L_{i_{K+1}}} t_z \geqslant t_j , \quad \text{откуда} \quad t_j \geqslant t(v_{i_s}) + \tau_j .$$

Наконец, используя неравенство /15/, уже доказанное для вершины v_{i_s}, получаем

$$t(v_{i_{k+1}}) > t_j \geqslant \min_{L\in\mathcal{L}^H_{i_j}} \sum_{u_r\in L} \tau_r + \tau_j \geqslant \min_{L\in\mathcal{L}^H_{i_{k+1}}} \sum_{u_r\in L} \tau_r ,$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Вернемся к доказательству неравенства /I4/. Так как для ребер u_j из $H\setminus\mathcal{U}_1(H)$ верны соотношения $t'_j = t_j$, то остается показать, что $t'_j \leqslant t_j$ на ребрах $u_j\in\mathcal{U}_1(H)$. Применяя лемму 2 к вершинам произвольного ребра $u_j=(v_{i_1}, v_{i_2})\in\mathcal{U}_1(H)$ и используя соотношения /2/ и /7/, получаем:

$$2t_j \geqslant t(v_{i_1}) + t(v_{i_2}) + \tau_j \geqslant \min_{L\in\mathcal{L}^H_{i_1}} \sum_{u_r\in L} \tau_r + \min_{L\in\mathcal{L}^H_{i_2}} \sum_{u_r\in L} \tau_r + \tau_j =$$

$$= \sum_{u_r\in L^H_{i_1}} \tau_r + \sum_{u_r\in L^H_{i_2}} \tau_r + \tau_j - 2\sum_{u_r\in L^H_{i_2}} \tau_r = 2t'_j .$$

Неравенство /I4/ доказано. Тем самым мы доказали, что построенное нами расписание R' допустимо относительно H.

Докажем второе утверждение относительно расписания R', т.е. что $g_H(R') \leqslant g^*_H(R)$. Для этого достаточно показать, что для любого ребра $u_j\in\mathcal{U}^*$ и любого $u^k_j\in\mathcal{M}_j$ выражение в квадратных скобках функционала /4/ (обозначим это выражение через $h^k_j(L)$) на расписании R' не больше чем на R. В самом деле, из определения функции φ'_j (см. равенство /II/) для всякого ребра $u_j\in\mathcal{U}^*$ имеем:

$$\sum_{u_r\in\varphi_j(u^k_j)} l_r \geqslant \sum_{u_r\in\varphi'_j(u^k_j)} l_r .$$

Поэтому, как только для какого-то интервала $u^k_j\in\mathcal{M}_j$ выполняется равенство $\gamma_j(\varphi_j(u^k_j)) = \gamma_j(\varphi'_j(u^k_j))$ (что, в частности, всегда верно на ребрах $u_j\in\mathcal{U}_0\setminus\mathcal{U}_1(H)$, см. /II/), то сразу же вытекает справедливость требуемого неравенства $h^k_j(\varphi_j(u^k_j)) \geqslant h^k_j(\varphi'_j(u^k_j))$ для интервала u^k_j. Если же $\gamma_j(\varphi_j(u^k_j)) = -\gamma_j(\varphi'_j(u^k_j))$, что возможно только на ребрах $u_j\in\mathcal{U}_1(H)$ (а следовательно, из определения /II/ $\gamma_j(\varphi'_j(u^k_j)) = -1$), то, расписывая функцию $h^k_j(\varphi_j(u^k_j))$, мы получаем:

$$h^k_j(\varphi_j(u^k_j)) = \sum_{u_r\in\varphi_j(u^k_j)} l_r + \frac{1}{2}|u^k_j| + \sum_{l=k+1}^{m_j} |u^l_j| \geqslant \sum_{u_r\in\varphi_j(u^k_j)} l_r \geqslant$$

$$\geqslant l_j + \sum_{u_r\in\varphi'_j(u^k_j)} l_r \geqslant \sum_{u_r\in\varphi'_j(u^k_j)} l_r + \sum_{l=1}^{k-1} |u^l_j| + \frac{1}{2}|u^k_j| = h^k_j(\varphi'_j(u^k_j)).$$

Тем самым равенство $g_H(R') \leqslant g_H(R)$ доказано. Так как мы доказали все требуемые свойства построенного расписания R' и, как было показано ранее, доказательства существования такого расписания достаточно для завершения доказательства леммы I, то лемма I, таким образом, полностью доказана.

Из леммы I можно вывести ряд следствий, касающихся строения оптимальной сети.

С л е д с т в и е I. Пусть H - оптимальная сеть, тогда ребра множества $\{u\in H \mid u\notin \mathcal{U}_0\}$ образуют дерево с висячими вершинами из множества V_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно считать, что в оптимальной сети H нельзя удалить ни одного ребра без увеличения целевой функции $f(H)$. Кроме того, в этой сети множество ребер $\{u\in H \mid u\notin \mathcal{U}_0\}$ согласно лемме I содержится во множестве $\mathcal{U}_1(H)$, а ребра множества $\mathcal{U}_1(H)$ образуют дерево, так как в противном случае, т.е. в случае существования двух кратчайших цепей $L^H_{i_1} = [v^*, v_{k_1}, \dots, v_{k_3}, \dots, v_{i_1}]$ и $L^H_{i_2} = [v^*, v_{k_2}, \dots, v_{k_3}, \dots, v_{i_2}]$ $(v_{i_1}, v_{i_2}\in L^*)$, образующих цикл (см.рис.6), мы имели бы равенство длин цепей $[v^*, v_{k_1}, \dots, v_{k_3}]$ и $[v^*, v_{k_2}, \dots, v_{k_3}]$, что дало бы нам возможность в качестве кратчайшей цепи $L^H_{i_1}$ взять цепь $[v^*, v_{k_2}, \dots, v_{k_3}, \dots, v_{i_1}]$, а ребра цепи $[v^*, v_{k_1}, \dots, v_{k_3}]$ рассматривать как ребра, не входящие во множество $\mathcal{U}_1(H)$.

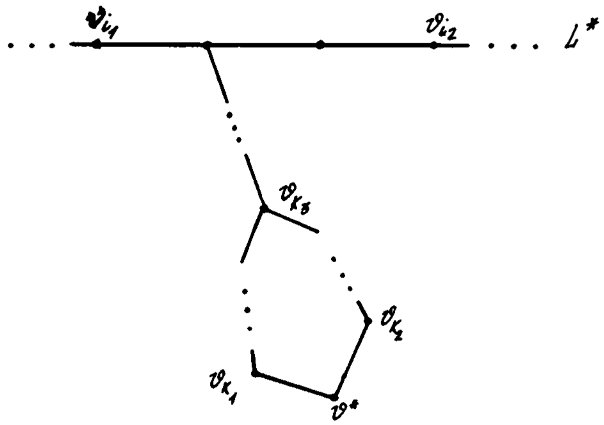


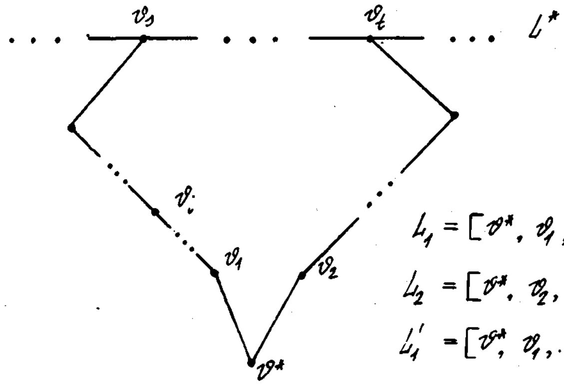
Рис.6

Если же в сети H существует висячая вершина $v_i\notin V_0$, то инцидентное ей висячее ребро не входит ни в одну кратчайшую цепь вида L^H_j , $v_j\in L^*$, и, следовательно, его можно удалить из сети H без увеличения значения целевой функции.Следствие I доказано.

С л е д с т в и е 2. В оптимальной сети H не существует двух простых цепей $L_1=[v^*,\dots, v_1]$, $L_2=[v^*,\dots, v_2]$, таких, чтобы совместно выполнялись следующие три соотношения: $v_1 = v_2$, $\sum_{u_r\in L_1} l_r \geq \sum_{u_r\in L_2} l_r$ и $\{u_r\in L_1\}\cap \mathcal{U}_0=\varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть в оптимальной сети (из которой нельзя удалить ни одного ребра без увеличения значения целевой функции) существуют две простые цепи $L_1=[v^*,\dots, v_i]$ и $L_2=[v^*,\dots, v_i]$ такие, что $\sum_{u_r\in L_1} l_r > \sum_{u_r\in L_2} l_r$ и $\{u_r\in L_1\}\cap\mathcal{U}_0=\varnothing$. Согласно следствию I и условию/6/, они образуют простой цикл M , содер-

жащий некоторые ребра из $\mathcal{U}_0$. Пусть L_1' - максимальная из цепей, таких что $L_1 \subset L_1' \subset M$ и $\{u_r \in L_1'\} \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset$ (см.рис.7)



$L_1 = [v^*, v_1, \dots, v_l]$

$L_2 = [v^*, v_2, \dots, v_t, \dots, v_s, \dots, v_l]$

$L_1' = [v^*, v_1, \dots, v_i, \dots, v_s]$

Рис. 7

Так как $\sum_{u_r \in L_1'} \ell_r \geq \sum_{u_r \in M \setminus L_1'} \ell_r$, то цепь L_1' не содержится ни в одной кратчайшей цепи L_j^H, $v_j \in L^*$. Следовательно, ребра цепи L_1' не содержатся во множестве $\mathcal{U}_1(H)$ и, согласно лемме I, могут быть удалены из сети H без увеличения целевой функции $f(H)$. Следствие 2 доказано.

Для нахождения оптимальной сети необходимо уметь вычислять значение целевой функции /5/ от произвольной допустимой сети H. Точнее, требуется построить эффективный алгоритм нахождения допустимого относительно H расписания, на котором достигается минимум функции $g_H(R)$. Перейдем к исследованию этой частной задачи.

§ 3. Построение оптимального расписания для фиксированной сети H

Пусть дана сеть $H \in \mathcal{H}_{1,2}$, где $\mathcal{H}_{1,2}$ - множество допустимых сетей, отвечающих требованиям следствия I и следствия 2. Тогда множество ребер сети H разбивается на два подмножества: $\mathcal{U}_1(H)$ (определенное выше) и $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_1(H)$. В ходе доказательства леммы I было установлено, что если в произвольном допустимом относительно H расписании $R = \{m_j, M_j, \varphi_j\}_{u_j \in H}$ изменить функции $\varphi_j(u_j \in H)$ согласно равенству /II/, то расписание при этом останется допустимым и значение функционала $g_H(R)$ не увеличится. Пусть дано расписание $R = \{m_j, M_j, \varphi_j\}_{u_j \in H}$, такое что на ребрах $u_j = (v_{i_1}, v_{i_2}) \in \mathcal{U}_1(H)$ $(i_1 < i_2)$ функция $\varphi_j(u_j^k)$ тождественно равна $L_{i_1}^H$, а на ребрах $u_j \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_1(H)$ функция $\varphi_j(u_j^k)$ равна $L_{i_1}^H$ либо $L_{i_2}^H$. Возьмем какое-либо ребро $u_j \in \mathcal{U}_1(H)$ и изменим данное расписание R на нем следующим образом. Положим

$$m_j' = 1, \qquad /16/$$

$$M_j' = \{u_j\}, \qquad /17/$$

$$\varphi_j'(u_j') = L_{i_1}^H. \qquad /18/$$

Покажем, что полученное расписание обозначим его через будет допустимым. Действительно, если положить $t_j' \doteq (t_j^1)' \doteq t_j$, $t_j \in \mathcal{T}(R')$, и оставить числа t_r, t_r^k прежними для остальных ребер $u_r \in H$, то неравенства /1/,/2/,/3/ будут выполняться для полученного набора $\mathcal{T}(R')$, что и означает допустимость расписания R' относительно H. Покажем также, что $g_H(R') = g_H(R)$. С этой целью, рассмотрев для ребра u_j соответствующее ему слагаемое функционала $g_H(R)$, равное

$$\sum_{u_j^k\in M_j} |u_j^k| \left(\sum_{u_r\in L^H_{i_1}} l_r + \sum_{l=1}^{k-1}|u_j^l| + \frac{1}{2} |u_j^k|\right) = l_j \sum_{u_r\in L^H_{i_1}} l_r + \frac{1}{2} l_j^2 =$$

$$= l_j\Big(\sum_{u_r\in L^H_{i_1}} l_r + \frac{1}{2} l_j\Big),$$

мы увидим, что оно равно слагаемому функционала $g_H(R')$, относящемуся к ребру u_j, откуда и вытекает требуемое соотношение $g_H(R') = g_H(R)$. В силу доказанного можно считать, что в оптимальном расписании $R = \{(m_j, M_j, \varphi_j)\}_{u_j\in H}$ на ребрах $u_j \in U_1(H)$ выполняются соотношения /16/-/18/.

Рассмотрим теперь ребро $u_j \in U_0 \setminus U_1(H)$. Как было отмечено ранее, мы рассматриваем такое расписание R, что функция $\varphi_j(u_j^k)$ принимает всего два значения: либо $L^H_{i_1}$, либо $L^H_{i_2}$. Пусть для какой-то пары соседних интервалов u_j^k, $u_j^{k+1} \in M_j$ функция φ_j определена следующим образом: $\varphi_j(u_j^k) = L^H_{i_2}$, $\varphi_j(u_j^{k+1}) = L^H_{i_1}$, (см.рис.8).

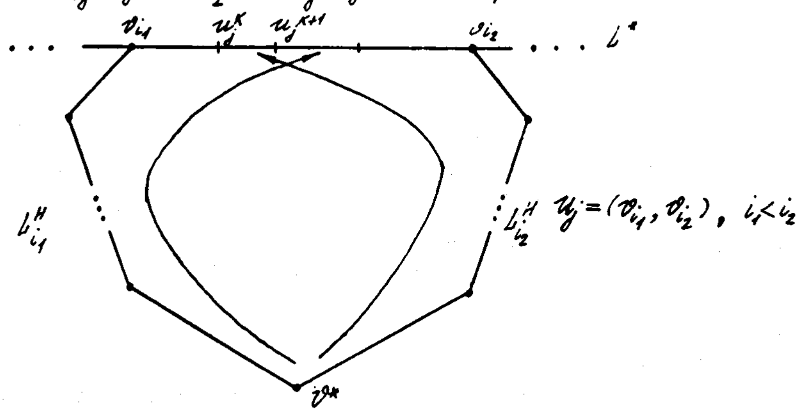


Рис.8

Покажем, что если переопределить функцию φ_j одним из следующих двух способов:

$$\varphi_j'(u_j^k) \doteq \varphi_j'(u_j^{k+1}) \doteq \begin{cases} 1).\ L^H_{i_1}, \\ 2).\ L^H_{i_2}, \end{cases}$$

то полученные расписания R' и R'' (соответственно) также будут допустимыми, причем либо $g_H(R') \le g_H(R)$, либо $g_H(R'') \le g_H(R)$. Поскольку расписание R было допустимым, то для набора $\mathcal{T}(R)$ выполнялось соотношение /3/, откуда для t_j^k и t_j^{k+1} имеем

$$l_j t_j^k \ge \tau_j |u_j^k| + l_j \max\Big\{t_j^{k+1}, \max_{u_r\in L^H_{i_2}} t_r\Big\}$$

и

$$l_j t_j^{K+1} \geq \tau_j |u_j^{K+1}| + l_j \max\{t_j^K, \max_{u_r \in L_{i_1}^H} t_r\} .$$

В частности, $t_j^K \geq t_j^{K+1}$ и $t_j^{K+1} \geq t_j^K$, откуда $t_j^K = t_j^{K+1}$ и $\tau_j = 0$. Рассмотрим теперь набор чисел $\mathcal{T}(R')$, в котором все числа, кроме $(t_j^K)'$ и $(t_j^{K+1})'$, взяты из набора $\mathcal{T}(R)$, а значения $(t_j^K)'$ и $(t_j^{K+1})'$ определены соотношением $(t_j^K)' \doteq (t_j^{K+1})' \doteq \max\{t_j^{K-1}, \max_{u_r \in L_{i_1}^H} t_r\}$. Легко видеть, что $\mathcal{T}(R')$ удовлетворяет условиям допустимости /1/,/2/,/3/, откуда заключаем, что расписание R' допустимое.

Чтобы показать допустимость расписания R'', достаточно определить числа $(t_j^K)''$ и $(t_j^{K+1})''$ следующим образом:

$$(t_j^K)'' \doteq (t_j^{K+1})'' \doteq \max\{t_j^{K+2}, \max_{u_r \in L_{i_2}^H} t_r\} .$$

В то же время значения функции $g_H(R)$ на расписаниях R' и R'' удовлетворяют соотношениям:

$$g_H(R) - g_H(R') = \rho_j |u_j^K| \Big(\sum_{u_r \in L_{i_2}^H} l_r + \sum_{l=K+1}^{m_j} |u_j^l| - \sum_{u_r \in L_{i_1}^H} l_r - \sum_{l=1}^{K-1} |u_j^l| \Big),$$

а

$$g_H(R) - g_H(R'') = \rho_j |u_j^{K+1}| \Big(\sum_{u_r \in L_{i_1}^H} l_r + \sum_{l=1}^{K} |u_j^l| - \sum_{u_r \in L_{i_2}^H} l_r - \sum_{l=K+2}^{m_j} |u_j^l| \Big),$$

из которых следует, что если $g_H(R) - g_H(R') < 0$, то $g_H(R) - g_H(R'') > 0$, т.е. по крайней мере одно из расписаний R', R'' лучше расписания R (обеспечивает строительство всей сети дорог H при меньших транспортных расходах). Отсюда можно считать, что в оптимальном расписании $R = \{(m_j, \mathcal{M}_j, \varphi_j)\}_{u_j \in H}$ для любого ребра $u_j \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_1(H)$ функция φ_j определена следующим образом:

$$\varphi_j(u_j^K) = \begin{cases} L_{i_1}^H, & 1 \leq K \leq s, \\ L_{i_2}^H, & s+1 \leq K \leq m_j, \end{cases} \tag{19}$$

для некоторого натурального числа s.

Затем, аналогично тому, как мы поступали с расписанием на ребрах из $\mathcal{U}_1(H)$, изменим расписание R, отвечающее условию /19/, следующим образом. Положим для произвольного ребра $u_j \in \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_1(H)$:

$$m_j' = 2, \quad \mathcal{M}_j' = \{u_j^{1'}, u_j^{2'}\},$$

где $u_j^{1'} = \bigcup_{l=1}^{s} u_j^l$, $u_j^{2'} = \bigcup_{l=s+1}^{m_j} u_j^l$; $\varphi_j'(u_j^{1'}) \doteq L_{i_1}^H$, $\varphi_j'(u_j^{2'}) \doteq L_{i_2}^H$.

Легко проверяется, что полученное расписание допустимо ($t_j^{1'} := t_j^s$, $t_j^{2'} := t_j^{s+1}$) и значение функции g_H на расписании R' такое же, как и на расписании R.

Таким образом, в построенном выше оптимальном расписании $R = \{(m_j, \mathcal{M}_j, \varphi_j)\}_{u_j \in H}$ для всякого ребра $u_j \in H$ разбиение $\mathcal{M}_j$ состоит из одного либо двух интервалов, т.е. задается некоторым числом $0 \leq z_j \leq l_j$ (для ребер $u_j \in \mathcal{U}_1(H)$ будем считать $z_j = l_j$). При этом функ-

ционал $g_H(R)$ выражается через набор параметров $\{z_j\}_{u_j\in H}$ следующим образом. Слагаемое функции $g_H(R)$, относящееся к ребру $u_j\in H$, имеет вид

$$h_j^H(z_j)=\rho_j\left[|u_j^1|\Big(\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r+\frac{1}{2}|u_j^1|\Big)+|u_j^2|\Big(\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r+\frac{1}{2}|u_j^2|\Big)\right]=$$

$$=\rho_j\left[\frac{1}{2}z_j^2+\frac{1}{2}(l_j-z_j)^2+z_j\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r+(l_j-z_j)\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r\right].$$

Минимум этого выражения достигается в точке

$$z_j^H=\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r+l_j-\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r\Big)$$

Так как $\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r+l_j\geq\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r$ и $\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r+l_j\geq\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r$

(по определению цепей $L_{i_1}^H$ и $L_{i_2}^H$), то $0\leq z_j^H\leq l_j$. Если теперь ввести переменную $\lambda=z_j-z_j^H$ и выразить z_j через λ, то функция $h_j^H(z_j)$ запишется следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_j}h_j^H(z_j)=\frac{1}{2}\Big(z_j+\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(l_j-z_j+\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r\Big)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r+\frac{1}{2}\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r+\frac{1}{2}l_j+\lambda\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r+\frac{1}{2}\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r+\frac{1}{2}l_j-\lambda\Big)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r\Big)^2=\lambda^2+\Big(\frac{1}{2}\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r+\frac{1}{2}\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r+\frac{1}{2}l_j\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_1}^H} l_r\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\sum_{u_r\in L_{i_2}^H} l_r\Big)^2,$$

откуда следует, что чем дальше точка z_j отклоняется от z_j^H, тем больше значение функции $h_j^H(z_j)$, а следовательно, и $g_H(R)$.

Пусть R – оптимальное расписание на сети H. Рассмотрим произвольное ребро $u_j\in H$. Ему соответствует некоторое разбиение $\mathcal{M}_j=\{[0,z_j],[z_j,l_j]\}$, задаваемое числом z_j. Так как расписание R допустимо относительно H, то из условий /I/,/3/следует, что должны выполняться неравенства

$$T\geq t_j\geq\max\{t_j^1,t_j^2\}\geq\max\Big\{\tau_j\cdot\frac{|u_j^1|}{l_j}+\sum_{u_r\in L_{i_1}^H}\tau_r,\ \tau_j\cdot\frac{|u_j^2|}{l_j}+\sum_{u_r\in L_{i_2}^H}\tau_r\Big\},$$

т.е. число z_j должно удовлетворять неравенству

$$T\geq\max\Big\{\tau_j\cdot\frac{|z_j|}{l_j}+\sum_{u_r\in L_{i_1}^H}\tau_r,\ \tau_j\cdot\frac{l_j-z_j}{l_j}+\sum_{u_r\in L_{i_2}^H}\tau_r\Big\}.\qquad /20/$$

Множество точек z_j отрезка $[0,l_j]$, удовлетворяющих неравенству /20/, представляет собой некоторый замкнутый отрезок $[z_j',z_j'']_H$, который будем называть отрезком допустимости для ребра u_j в сети H. Если точка $z_j^H\in[z_j',z_j'']_H$, то ее и надо брать в качестве искомой точки z_j^* разбиения $\mathcal{M}_j$ отрезка $[0,l_j]$ в оптимальном расписании. Если $z_j^H<z_j'$, то в качестве искомой точки разбиения берем $z_j^*\doteq z_j'$ (т.е. точку из отрезка допустимости, у которой отклонение от z_j^H наименьшее), а если $z_j^H>z_j''$, то берем $z_j^*\doteq z_j''$. Наконец, если $[z_j',z_j'']_H=\emptyset$,

то и множество допустимых относительно H расписаний $\mathfrak{M}_H = \phi$, откуда $f(H) = \infty$. Этим заканчивается описание и обоснование алгоритма построения оптимального расписания R для фиксированной сети $H \in \mathcal{H}_{1,2}$.

Таким образом, мы умеем эффективно вычислять значение целевой функции на сетях из $\mathcal{H}_{1,2}$. Так как мощность множества $\mathcal{H}_{1,2}$ составляет величину порядка $\left(1+\frac{|V_1|}{|V_0|}\right)^{|V_0|}$, где V_1 - множество вершин графа G, смежных с вершиной v^*, то перебор по всем сетям из $\mathcal{H}_{1,2}$ может оказаться нереализуемым. Для обоснования эффективного алгоритма построения искомого оптимума $H^* \in \mathcal{H}_{1,2}$ необходимо провести дальнейший анализ оптимальной сети и ее оптимального расписания.

§ 4. О локальной независимости слагаемых целевой функции

Введем некоторое множество $\mathcal{L}(L^*)$ простых цепей из G:

$$\mathcal{L}(L^*) \doteq \left\{L = [v^*, \dots, v_i^*] \mid v_i^* \in L^*, \{u_z \in L\} \cap \mathcal{U}_0 = \phi\right\}$$

и перенумеруем цепи из этого множества числами $k = 1, 2, \dots, n_1$ по следующему принципу. Если $L_k = [v^*, \dots, v_{i_k}^*]$, $L_m = [v_1^*, \dots, v_{i_m}^*]$, где $v_{i_k}^*$, $v_{i_m}^* \in L^* = [v_1^*, v_2^*, \dots, v_{p+1}^*]$, $p = |\mathcal{U}_0|$ и $i_k < i_m$, то $k < m$. Из условия /6/ следует, что мощности множеств $\mathcal{L}(L^*)$ и V_1 равны, т.е. $|\mathcal{L}(L^*)| = |V_1| \doteq n_1$.

Сеть $H = \mathcal{H}_{1,2}$ можно задать множеством $\mathcal{K} = \{k_z\}$, $z = 1, 2, \dots, \lambda$, $\lambda = |\mathcal{K}|$, номеров цепей $L_{k_z} \in \mathcal{L}(L^*)$, если под этим понимать, что $H = L^* \cup \left(\bigcup_{z=1}^{\lambda} L_{k_z}\right)$ и все эти цепи попарно не пересекаются по ребрам. То, что такое представление осуществимо, вытекает из того, что сети множества $\mathcal{H}_{1,2}$ удовлетворяют следствию I.

Пусть дана какя-либо сеть $H \in \mathcal{H}_{1,2}$, причем известно, что цепи L_k и L_m содержатся в H $(k < m)$ и никакая цепь $L_i \in \mathcal{L}(L^*)$, $k \le i \le m$, не содержится в H. Условимся через u_i^* обозначать ребро (v_i^*, v_{i+1}^*) магистрали $L^* = [v_1^*, \dots, v_i^*, v_{i+1}^*, \dots, v_{p+1}^*]$. Тогда все ребра $u_{i_k}^*, u_{i_k+1}, \dots, u_{i_m-1}$ цепи L^*, заключенные между концевыми вершинами $v_{i_k}^*$ и $v_{i_m}^*$ цепей L_k и L_m соответственно, входят во множество $\mathcal{U}_1(H)$, кроме одного ребра u_q^*, такого, что

$$\sum_{u_z \in L_k} \ell(u_z) + \sum_{z=i_k}^{q-1} \ell(u_z^*) < \sum_{z=q}^{i_m-1} \ell(u_z^*) + \sum_{u_z \in L_m} \ell(u_z)$$

и

$$\sum_{u_z \in L_k} \ell(u_z) + \sum_{z=i_k}^{q} \ell(u_z^*) > \sum_{z=q+1}^{i_m-1} \ell(u_z^*) + \sum_{u_z \in L_m} \ell(u_z).$$

Так как сеть H взята из множества $\mathcal{H}_{1,2}$, то для нее выполняется следствие 2, в силу чего можно считать, что для любой вершины v_i^* из множества $\{v_{i_k}^*, v_{i_k+1}^*, \dots, v_q^*\}$ кратчайшей цепью является цепь $L_{i}^H = L_k \oplus [v_{i_k}^*, \dots, v_i^*]$, а для любой вершины $v_j^* \in \{v_{q+1}^*, \dots, v_{i_m}^*\}$ - цепь $L_j^H = L_m \oplus [v_{i_m}^*, \dots, v_j^*]$. (Под операцией $\oplus$ подразумевается получение

новой цепи путем теоретико-множественного объединения ребер двух пересекающихся цепей $L_1=[v_i,\dots,v_j,v_s]$ и $L_2=[v_s,v_t,\dots,v_k]$, т.е. $L_1\oplus L_2 \doteq [v_i,\dots,v_j,v_s,v_t,\dots,v_k]$). Кроме того, для какой-либо вершины $v_i\in L_k$ кратчайшей цепью L_i^H является отрезок цепи L_k от вершины v^* до вершины v_i (то же самое и для $v_i\in L_m$). Следовательно, относительно оптимального расписания R на сети H можно сделать вывод, что для вычисления слагаемых функции $g_H(R)$, относящихся к ребрам из множества $\mathcal{U}_{k,m}\doteq\{u_t\in L_k\}\cup\{u_t\in L_m\}\cup\{u^*_{i_k},\dots,u^*_{m-1}\}$, не нужно знать структуры всей сети H, так как используются при этом только веса ребер из $\mathcal{U}_{k,m}$.

Аналогичное заключение о независимости значения функции $h_j^H(z_j^*)$ от всей сети H верно и для ребер $u_j\in\mathcal{U}_{0,k}$, $u_j\in\mathcal{U}_{m,n_1+1}$ (здесь $\mathcal{U}_{0,k}$ и $\mathcal{U}_{m,n_1+1}$ – множества ребер $\{u_1^*,\dots,u^*_{k-1}\}\cup\{u_t\in L_k\}$ и $\{u_m^*,\dots,u_p^*\}\cup\{u_t\in L_m\}$ соответственно), когда про сеть $H\in\mathcal{H}_{1,2}$ известно, что $L_k\subset H$ ($L_m\subset H$) и никакая цепь L_i с номером $i<k$ ($i>m$) не содержится в H.

Чтобы показать, что значение функции $h_i^H(z_j^*)$ не зависит от всей сети H или, точнее, от всего множества $\mathcal{K}$, а зависит только от весов ребер из некоторого множества $\mathcal{U}_{k,m}$, будем обозначать это значение через $h_{k,m}(u_j)$.

В силу указанной локальной независимости слагаемых целевой функции /5/ от всего множества $\mathcal{K}=\{k_t\}$, $1\leqslant t\leqslant 2$, определяющего сеть $H\in\mathcal{H}_{1,2}$, появляется возможность обоснования описанного ниже эффективного метода решения задачи 2.

§ 5. Описание и обоснование алгоритма

По данному графу G построим полный ориентированный взвешенный (n_1+2)-вершинный граф G^* с множеством вершин $X=\{x\}$, $i=0,1,2,\dots,n_1+1$, где $n_1=|V_1|=|\mathcal{L}(L^*)|$. Для этого в графе G^* выделим две вершины x_0 и x_{n_1+1}, а остальные вершины $x_1,\dots,x_{n_1}$ поставим во взаимно-однозначное соответствие цепям из множества $\mathcal{L}(L^*)$. Каждому ребру $u_j=(x_{i_1},x_{i_2})$ графа G^* припишем неотрицательный вес $d(u_j)$ следующим образом. Полагаем $d(u_j)=\infty$ в одном из следующих четырех случаев:

а) если $i_1>i_2$;

б) если $i_1=0$, $i_2=n_1+1$;

в) если $i_1<i_2$ и в исходном графе G для цепей $L_{i_1}=[v_1^*,\dots,v^*_{k_1}]$, $L_{i_2}=[v^*,\dots,v^*_{k_2}]$ выполняется одно из неравенств:

$$\sum_{u_t\in L_{i_1}} l_t+\sum_{s=k_1}^{k_2-1} l(u_s^*)\leqslant\sum_{u_t\in L_{i_2}} l_t \quad\text{либо}\quad \sum_{u_t\in L_{i_1}} l_t>\sum_{s=k_1}^{k_2-1} l(u_s^*)+\sum_{u_t\in L_{i_2}} l_t;$$

г) если $i_1<i_2$ и для цепей $L_{i_{1_{k_2-1}}}$, L_{i_2} выполняется условие

$$\sum_{u_t\in L_{i_1}}\tau_t+\sum_{u_t\in L_{i_2}}\tau_t+\sum_{s=k_1}\tau(u_s^*)>2T.$$

Все остальные ребра графа G^* будут иметь конечные веса. Если теперь в графе G^* взять какую-либо простую цепь $M = [x_0, x_{K_1}, \dots x_{K_2}, x_{n_1+1}]$ конечного веса, то ей будет соответствовать в графе G допустимая сеть $H \in \mathcal{H}_{1,2}$, задаваемая набором чисел $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_2\}$ и такая, что $\mathfrak{M}_H \neq \phi$. Последнее возможно в силу того, что в выбранной простой цепи M нет ребер, подпадающих по случай г), откуда $f(H) < \infty$. Определение значений весов остальных ребер из G^* подчиним требованию, чтобы вес цепи M был равен значению целевой функции $f(H)$. Для этого определим конечные веса на ребрах из G^* следующим образом. Если ребро $u_j = (x_{i_1}, x_{i_2})$ не подпадает ни под один из указанных выше четырех случаев и при этом $i_1 \neq 0$, $i_2 \neq n_1 + 1$, $L_{i_1} = [v^*, \dots, v^*_{K_1}]$, $L_{i_2} = [v^*, \dots, v^*_{K_2}]$, то полагаем

$$\alpha(u_j) = \sum_{u_2 \in L_{i_2}} h_{i_1, i_2}(u_2) + \sum_{j=K_1}^{K_2-1} h_{i_1, i_2}(u_j^*) + \sum_{u_2 \in L_{i_2}} c(u_2) + \sum_{j=K_1}^{K_2-1} c(u_j^*).$$

Если $i_1 = 0$, то в предыдущей формуле берем $K_1 = 1$. Наконец, если $i_2 = n_1 + 1$, то

$$\alpha(u_j) = \sum_{j=K_1}^{\rho} h_{i_1, i_2}(u_j^*) + \sum_{j=K_1}^{\rho} c(u_j^*).$$

Пусть $\mathcal{H}'_{1,2}$ - множество сетей $H \in \mathcal{H}_{1,2}$ таких, что $f(H) < \infty$. Так как мы установили, что каждой простой цепи $M = [x_0, x_{K_1}, \dots, x_{K_2}, x_{n_1+1}] \subset G^*$ конечного веса взаимно-однозначно соответствует допустимая сеть $H \in \mathcal{H}'_{1,2}$, задаваемая множеством номеров $\mathcal{K} = \{K_2\}$, $1 \leq 2 \leq \lambda$, и такая, что $\sum_{u_2 \in M} \alpha(u_2) = f(H)$, то задача построения оптимальной сети на графе G (задача 2) свелась тем самым к задаче выделения кратчайшего пути из вершины x_0 в вершину x_{n_1+1} на графе G^*. Для последней известны эффективные методы решения, В частности, алгоритм Дийкстра /4/ решает эту задачу с трудоемкостью порядка n_1^2 операций. Трудоемкость сведения задачи 2 к задаче о кратчайшем пути составляет также порядка n_1^2 операций. Следовательно, мы обосновали алгоритм трудоемкости $\sim n^2$ операций для решения задачи 2.

В заключение заметим, что при решении задачи 2 существенно использовались допущения /6/ и /7/, которые отличают ее от задачи I. Допущение /6/ значительно сокращает число всех допустимых сетей на графе G и упрощает нахождение оптимального расписания R для заданной сети. Допущение /7/ использовалось при доказательстве неравенства /I4/, а следовательно, и леммы I, из которой мы вывели локальную независимость слагаемых целевой функции /5/ от всей сети H, что позволило, в свою очередь, найти эффективный алгоритм решения задачи 2.

Поступила в ред.-изд.отдел
6 октября I975 г.

Литература

I. Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск, "Наука", I969.

2. Оре О. Теория графов. М., "Наука", I968.

3. Солтан П.С., Присакару К.Ф. Задача Штейнера на графах.- "Докл.АН СССР", I97I, т.I98, № I, с.46-49.

4. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях, М., "Мир", I974.