Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г. выпуск I5.
УДК.519.95.

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В.М.Яковлев

Рассмотрим следующую задачу. Дана система разностных уравнений

$$x_i(t+1)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j(t)+\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\,u_k(t); \qquad /1/$$

$$x_i(0)=x_i^0; \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n; \\ t=0,1,\dots,T-1, \end{matrix} \qquad /2/$$

где $u_k(t)$ - управляющие, а $x_i(t)$ - фазовые переменные. Пусть множество допустимых значений вектора $u(t)$ есть выпуклый многогранник $U\subset E_m$.

Требуется найти такие значения $u^*(t)\in U$, при которых траектория $x^*(t)$ системы /1/ при начальных условиях /2/ обладает тем свойством, что

$$F(x^*(T))=\min_{u\in U} F(x(T)), \qquad /3/$$

где $F(x)$ - выпуклая гладкая функция.

Поскольку система /1/ линейна, а множество U выпукло, то все достижимые множества $S_t(x)$ выпуклы. Как показано в [1 - 4], в этом случае необходимые условия оптимальности имеют форму принципа максимума.

Следуя [4], имеем для рассматриваемой задачи

$$H(x(t),u(t),p(t+1))=\sum_{i=1}^{n} p_i(t+1)\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j(t)+\sum^{m} b_{ik}\,u_k(t)\Big], \qquad /4/$$

$$p_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,p_j(t+1); \qquad /5/$$

$$p_i(T)=-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x(T)). \qquad /6/$$

Для решения задачи /1/-/3/ обычно применяют алгоритмы, построенные по следующей схеме.

1. Выбираем произвольное $u^1(t)\in U$.
2. Из /1/,/2/ находим $x^1(t)$, соответствующее управлению $u^1(t)$.
3. Из /5/,/6/ находим $p^1(t)$, соответствующее $u^1(t)$ и $x^1(t)$.
4. Находим $\hat u^1(t)$ такое, что

$$H(x^1(t),\hat u^1(t),p^1(t))=\max_{u\in U} H(x^1(t),u,p^1(t)).$$

5. Из /I/,/2/ находим $\hat{x}^1(t)$, соответствующее управлению $\hat{u}^1(t)$.

6. Находим λ^1 такое, что

$$F(x^1(T)+\lambda^1(\hat{x}^1(T)-x^1(T)))=\min_{0\leq\lambda\leq1} F(x^1(t)+\lambda(\hat{x}^1(T)-x^1(T))).$$

7. Если $u^2(t)=u^1(t)+\lambda^1(\hat{u}^1(t)-u^1(t))$ в выбранной метрике отличается от $u^1(t)$ больше, чем это обусловлено требуемой точностью, то $u^2(t)$ есть новое приближение, и переходим к п.2. В противном случае задача считается решенной.

В приведенной схеме в п.4 решается задача линейного программирования. Как известно, решение задачи линейного программирования достаточно искать среди вершин многогранника допустимых значений переменных: в нашем случае - среди вершин многогранника U. Приведенный алгоритм хорошо работает, если оптимальная точка $x^*(T)$ является вершиной достижимого множества $S_T(x^0)$. Однако, если $x^*(T)$ является внутренней точкой какой-либо грани множества $S_T(x^0)$, то алгоритм работает плохо. Получающийся при этом итерационный процесс имеет столь медленную сходимость, что найти решение задачи по данному алгоритму практически невозможно.

Природа указанного явления заключается в следующем. Если $x^*(T)$ является внутренней точкой какой-либо грани множества $S_T(x^0)$, то оптимальное управление $u^*(t)$ не будет представлять собой последовательность вершин многогранника U, а хотя бы для одного t точка $u^*(t)$ будет лежать внутри некоторой грани множества U. При этом задача линейного программирования, заключающаяся в отыскании

$$\max_{u\in U} H(x^*(t),u,p^*(t-1)),$$

будет иметь своим решением любую точку той грани, в которой лежит $u^*(t)$. В подобной ситуации принцип максимума перестает быть достаточным условием оптимальности.

Если управление $u(t)$ не слишком сильно отличается от $u^*(t)$, то в указанные (назовем их особыми) моменты времени решением задачи п.4 алгоритма будет какая-либо вершина $\hat{u}(t)$, принадлежащая той же грани, что и $u^*(t)$. Изменение $u(t)$ в направлении $\hat{u}(t)$ приведет к тому, что при следующей итерации решением задачи п.4 алгоритма будет уже другая вершина из той же грани. Смена вершины будет происходить при каждой итерации. Если величину шага изменения $u(t)$ в направлении вершины $u^*(t)$ считать величиной первого порядка малости, то величина шага изменения $u(t)$ в направлении $u^*(t)$ при этом оказывается величиной более высокого порядка малости. Этот факт и является причиной плохой сходимости итерационного процесса.

Оказывается, что положение можно исправить, если произвести следующее формальное преобразование исходной задачи.

Введем еще одну переменную $x_0(t)$ и добавим к системе /I/ еще

одно уравнение

$$x_0(t+1) = x_0(t) + F(Ax(t)+Bu(t)) - F(x(t)), \qquad /7/$$

$$x(0) = F(x(0)); \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T-1. \qquad /8/$$

Здесь $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ik}\|$.

Вместо минимизации $F(x(T))$ будем теперь минимизировать величину

$$y = x_0(T). \qquad /9/$$

Имеем в данном случае

$$\hat{H}(x(t), u(t), \hat{p}(t+1)) = \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i(t+1)\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t)\Big] +$$

$$+ \hat{p}_0(t+1)\big[x_0(t) + F(Ax(t)+Bu(t)) - Fx(t)\big]. \qquad /10/$$

Сопряженная система в рассматриваемом случае имеет вид

$$\hat{p}_0(t) = \hat{p}_0(t+1); \qquad /11a/$$

$$\hat{p}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[\hat{p}_j(t+1) + \hat{p}_0(t+1)\cdot\frac{\partial F}{\partial x_j}(Ax(t)+Bu(t))\Big] -$$

$$- \hat{p}_0(t+1)\frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)). \qquad /11/$$

При этом

$$\hat{p}_0(T) = -1; \qquad /12a/$$

$$\hat{p}_i(T) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad /12/$$

Используя /11a/ и /12a/, имеем

$$\hat{H}(x(t), u(t), \hat{p}(t+1)) = \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i(t+1)\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t)\Big] -$$

$$- F(Ax(t)+Bu(t)) + F(x(t) + x_0(t)); \qquad /10/$$

$$\hat{p}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[\hat{p}_j(t+1) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(Ax(t)+Bu(t))\Big] + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)). \qquad /11/$$

Т е о р е м а 1. Пусть $u^*(t)$ - оптимальное управление, $x^*(t)$ и $\hat{p}^*(t)$ - соответствующее этому управлению решения систем /1/, /2/ и /11/, /12/ соответственно. Тогда функция $\hat{H}(x^*(t), u, \hat{p}^*(t+1))$ переменного u при $u = u^*(t)$ достигает максимального значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(t)$ - некоторое допустимое управление, $x(t)$, $p(t)$, $\hat{p}(t)$ - соответствующие решения систем /1/, /2/; /5/,/6/ и /11/,/12/. Представим $\hat{p}(t)$ в виде

$$\hat{p}_i(t) = p_i(t) + \varphi_i(t), \qquad /13/$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$t = 1, 2, \ldots, T.$$

Так как $p_i(T)$ удовлетворяют условиям /6/, $\hat{p}_i(T)$ - условиям /12/,

то

$$\varphi_i(T) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(T)), \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad /14/$$

Подставляя /13/ в /11/, получаем

$$p_i(t)+\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, p_j(t+1) + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left[\varphi_j(t+1) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(Ax(t)+Bu(t))\right] + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)).$$

Отсюда

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left[\varphi_j(t+1) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(Ax(t)+Bu(t))\right] + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)), \qquad /15/$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

При $t = T-1$ имеем

$$\varphi_i(T-1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left[\varphi_j(T) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(x(T))\right] + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(T-1)),$$

откуда в силу /14/ получаем

$$\varphi_i(T-1) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(T-1)).$$

Далее легко получить по индукции, что

$$\varphi_i(t) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t)), \qquad t = 1,2,\ldots,T, \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad /16/$$

на любой траектории системы /1/.

Вычислим теперь разность.

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{H}(t) &= \hat{H}(x^*(t), u^*(t), \hat{p}^*(t+1)) - \hat{H}(x^*(t), u, \hat{p}^*(t+1)) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[p_i^*(t+1)+\varphi_i^*(t+1)\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k^*(t)\right] - \\
&- F(Ax^*(t)+Bu^*(t)) - \sum_{i=1}^{n}\left[p_i^*(t+1)+\varphi_i^*(t+1)\cdot\right]\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k\Big] + F(Ax^*(t)+Bu) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i^*(t+1)\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\left[u_k^*(t)-u_k\right] + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^*(t+1)\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\Big[u_k^*(t) - \\
&- u_k\Big] - F(Ax^*(t)+Bu^*(t)) + F(Ax^*(t)+Bu) = \\
&= \Delta H(t) - \Delta 1(t),
\end{aligned}$$

где

$$\Delta H(t) = H(x^*(t), u^*(t), p^*(t+1)) - H(x^*(t)), u, p^*(t+1)),$$

$$\Delta 1(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(Ax^*(t) + Bu^*(t)) \sum_{K=1}^{m} b_{iK}\,[u_K^*(t) - u_K] -$$
$$- F(Ax^*(t)+Bu^*(t)) + F(Ax^*(t) + Bu).$$

Величина $\Delta H(t) \geqslant 0$, так как для исходной задачи принцип максимума имеет место. Далее, поскольку $F(x)$ - выпуклая функция, то для любых x и x^* имеет место

$$F(x) \geqslant F(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*)\cdot [x_i - x_i^*],$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*)\,[x_i^* - x_i] - F(x^*) + F(x) \geqslant 0,$$

т.е. $\Delta 1(t) \geqslant 0.$

Таким образом, $\Delta \hat{H}(t) \geqslant 0$ для любых допустимых u, т.е. функция $\hat{H}(x^*(t), u, \hat{p}^*(t+1))$ в точке $u = u^*(t)$ достигает максимума, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет использовать для решения преобразованной задачи те же алгоритмы последовательного улучшения управления, что и для исходной. При этом оказывается, что получающиеся итерационные процессы сходятся значительно быстрее.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{H}(x(t), x(t+1), u(t), p(t+1)) = \sum_{i=1}^{n} [p_i(t+1) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x(t+1))] \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{m} b_{iK}\, u_K(t) - F(Ax(t) + Bu(t)),$$

где $x(t)$ и $p(t)$ есть решения систем /1/ и /5/, соответствующие управлению $u(t)$. Используя теорему 1, легко показать, что справедлива

Т е о р е м а 2. Пусть $u^*(t)$ - оптимальное управление в задаче /1/,/2/,/3/; $x^*(t), p^*(t)$ - соответствующие этому управлению решения систем /1/,/2/ и /5/,/6/. Тогда функция $\tilde{H}(x^*(t), x^*(t+1), u, p^*(t+1))$ переменного u при $u = u^*(t)$ достигает максимального значения.

Поступила в ред.-изд.отдел.
20 апреля 1978 г.

Л и т е р а т у р а

1. Пропой А.И. Об одной задаче оптимального дискретного управления. ДАН, т.159, № 6, 1964.

2. Пропой А.И. О принципе максимума для дискретных систем управления. Автоматика и телемеханика, № 7, 1965.

3. Пропой А.И. Условие оптимальности для дискретных процессов. Приложение 3 в кн.: Фан Лянь-цзюнь, Ван Чу-сен, Дискретный принцип максимума. "Мир", М., 1967.

4. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. "Наука", М., 1973.