Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.519.95.

К УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ

Л.Т.Ащепков, Н.В.Тарасенко /Иркутск/

Вопрос о взаимосвязи дискретного и непрерывного принципов максимума рассматривался в ряде работ /см.,например,[1-3] /. Наиболее существенные результаты получены, на наш взгляд, в [1]. Здесь установлено, что гамильтониан дискретной системы вдоль оптимального процесса достигает максимального значения на некотором подмножестве области управления с точностью до положительной константы ε. При переходе от дискретно-разностного уравнения к непрерывному предложенное в [1] условие ε - максимума превращается в принцип максимума Л.С.Понтрягина [4].

Оказалось, что оптимальные процессы дискретных и непрерывных систем характеризует более глубокая связь - на уровне условий не только первого, но и второго порядка. Доказательству этого факта и посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим N -шаговый процесс, описываемый в дискретные моменты $t\in\{t_0, t_0+h, \dots, t_1-h\}=T_h$ разносным уравнением

$$x(t+h)-x(t)=hf(x(t), u(t), t),\; x(t_0)=x^0. \qquad /1/$$

Здесь t_0, t_1 - заданные вещественные числа, x^0 - заданный вектор n -мерного евклидова пространства E^n, $h=(t_1-t_0)/N>0$- шаг дискретизации, $u(t)$ - вектор управляющих параметров, выбираемый из компактного множества $U\subset E^r$:

$$u(t)\in U, \quad t\in T_h, \qquad /2/$$

$x(t)\in E^n$- вектор состояния процесса, $f(x,u,t)$- функция со значениями в E^n, определенная и непрерывная при каждом $t\in T_h$ на произведении $E^n\times U$ вместе с производными f_x, f_{xx}.

Пару дискретных функций $(u(t), x(t))$, удовлетворяющих на T_h условиям /1/, /2/, назовем допустимым процессом. На множестве $\mathcal{D}$ всех допустимых процессов определим функционал

$$I(u)=\varphi(x(t_1)). \qquad /3/$$

Задача состоит в минимизации функционала /3/ на множестве $\mathcal{D}$. Решение задачи, соответствующее фиксированному $h>0$, будем обозначать $(u^h(t), x^h(t))$ и называть оптимальным процессом, а составляющие его функции - оптимальным управлением и оптимальной траекторией.

2. Формула приращения. Вариация управления

Подсчитаем приращение $\Delta I(u)=I(\bar u)-I(u)$ функционала вдоль допустимых процессов $(u(t),\ x(t))$ и $(\bar u(t)=u(t)+\Delta u(t), \bar x(t)=x(t)+\Delta x(t))$. В силу /3/ имеем

$$\Delta I(u)=\varphi(\bar x(t_1))-\varphi(x(t_1))=$$

$$=\varphi_x'(x(t_1))\Delta x(t_1)+1/2\,\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1)+O(|\Delta x(t_1)|^2), \quad /4/$$

где $'$ - знак транспонирования /под векторами понимаются векторы-столбцы/, $|\Delta x|$ - евклидова норма вектора Δx, $O(|\Delta x|^2)$ - малая порядка выше $|\Delta x|^2$.

Пусть $\psi(t)$, $\Psi(t)$ - произвольные функции дискретного аргумента $t=t_0-h, t_0, \dots, t_1-h$, имеющие размеры $n\times 1$ и $n\times n$. Рассмотрим тождества

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-h}[\psi'(t)\Delta x(t+h)-\psi'(t-h)\Delta x(t)]=\psi'(t_1-h)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-h)\Delta x(t_0);$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-h}[\Delta x'(t+h)\Psi(t)\Delta x(t+h)-\Delta x'(t)\Psi(t-h)\Delta x(t)]=$$

$$=\Delta x'(t_1)\Psi(t_1-h)\Delta x(t_1)-\Delta x'(t_0)\Psi(t_0-h)\Delta x(t_0).$$

Полагая здесь

$$\Delta x(t_0)=0,\quad \psi(t_1-h)=-\varphi_x(x(t_1)),\quad \Psi(t_1-h)=-\varphi_{xx}(x(t_1)),$$

можем переписать /4/ в виде

$$\Delta I(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-h}[\psi'(t)\Delta x(t+h)-\psi'(t-h)\Delta x(t)]-$$

$$-1/2\sum_{t=t_0}^{t_1-h}[\Delta x'(t+h)\Psi(t)\Delta x(t+h)-\Delta x'(t)\Psi(t-h)\Delta x(t)]+O(|\Delta x(t_1)|^2). \quad /5/$$

Подставим в /5/ значение $\Delta x(t+h)$ из /1/ и величины $\psi(t-h)$, $\Psi(t-h)$, вычисленные согласно уравнениям:

$$\psi(t-h)-\psi(t)=hH_x(\psi(t),x(t),u(t),t),\ \psi(t_1-h)=\varphi_x(x(t_1)); \quad /6/$$

$$\Psi(t-h)-\Psi(t)=h\Psi(h)f_x(x(t),u(t),t)+$$
$$+hf_x'(x(t),u(t),t)\Psi(t)+hH_{xx}(\psi(t),x(t),u(t),t)+$$
$$+h^2f_x'(x(t),u(t),t)\Psi(t)f_x(x(t),u(t),t), \quad /7/$$
$$\Psi(t_1-h)=-\varphi_{xx}(x(t_1)).$$

Выделяя квадратичные по $\Delta x(t)$ члены и выполняя очевидные преобразования, получаем

$$\Delta I(u) = -h\sum_{t=t_0}^{t_1-h}(\Delta_{\bar u}H + h/2\,\Delta_{\bar u}f'\Psi\Delta_{\bar u}f) -$$
$$-h\sum_{t=t_0}^{t_1-h}(\Delta_{\bar u}H'_x + \Delta_{\bar u}f'\Psi + h\Delta_{\bar u}f'\Psi f_x)\Delta x - \eta, \qquad /8/$$

где обозначено

$$H(\psi, x, u, t) = \psi' f(x, u, t), \quad \Delta_{\bar u}H = H(\psi, x, \bar u, t) - H(\psi, x, u, t),$$
$$\eta = h/2\sum_{t=t_0}^{t_1-h}\Delta x'\Delta_{\bar u}(\Psi f_x + f'_x\Psi + H_{xx} + hf'_x\Psi f_x)\Delta x +$$
$$+ h\sum_{t=t_0}^{t_1-h}(\Delta x'\Psi o^1 + o_2) + h^2\sum_{t=t_0}^{t_1-h}(\Delta_{\bar u}f'\Psi\Delta_{\bar u}f_x\Delta x +$$
$$+ \Delta_{\bar u}f'\Psi o^1 + \Delta x' f'_x(x, \bar u, t)\Psi o^1 + 1/2\, o^{1\prime}\Psi o^1) - 0. \qquad /9/$$

В формуле /9/ $o^1(|\Delta x|)$, $o_2(|\Delta x|^2)$ суть соответственно векторный и скалярный остаточный члены разложения в ряд Тейлора по степеням Δx функций $f(x+\Delta x, \bar u, t)$ и $H(\psi, x+\Delta x, \bar u, t)$ с порядком малости выше $|\Delta x|$ и $|\Delta x|^2$.

Перейдем к исследованию формулы приращения на игольчатой вариации управления. Пусть $\theta_1, \theta_2\ (\theta_1 \leqslant \theta_2)$ и v^1, v^2 - произвольные фиксированные точки множеств T_h и U. Обозначим через $C=(\theta_1, \theta_2, v^1, v^2)$ набор, составленный из этих точек, и положим

$$\Delta_c u(t) = \begin{cases} 0, & t \in T_h,\ t \neq \theta_1, \theta_2, \\ v^i - u(\theta_i), & t = \theta_i,\ i = 1, 2. \end{cases} \qquad /10/$$

В дальнейшем нас будут интересовать два частных случая вариации /10/, когда задающие ее наборы параметров имеют вид:

$$C_1 = (\theta, \theta, v, v), \qquad C_2 = (\theta, \theta+h, v, v). \qquad /11/$$

Вызванные этими вариациями приращения $\Delta_{c_i}x(t)$ траектории $x(t)$ в силу /1/, очевидно, равны

$$\Delta_{c_i}x(t+h) = \begin{cases} 0, \ t < \theta, \ i = 1, 2, \\ h\Delta_v f(x(\theta), u(\theta), \theta), \ t = \theta, \ i = 1, 2; \\ \Delta_{c_1}x(\theta+h) + h[f(x(\theta+h) + \Delta_{c_1}x(\theta+h), v, \theta+h) - \\ - f(x(\theta+h), u(\theta+h), \theta+h)], t = \theta+h, \ i = 2, \\ \Delta_{c_i}x(t) + h[f(x(t) + \Delta_{c_i}x(t), u(t), t) - \\ - f(x(t), u(t), t)], \ t > \theta+h, \ i = 1; \ t > \theta+2h, \ i = 2. \end{cases} \qquad /12/$$

Найдем соответствующие приращения функционала. По формуле /8/ имеем

$$\Delta_{c_1} I(u) = -h(\Delta_v H + h/2\Delta_v f'\Psi\Delta_v f)|_{t=\theta} - \eta_{c_1}; \qquad /13/$$

$$\Delta_{c_2} I(u) = -h \sum_{t=\theta,\theta+h} (\Delta_v H + h/2\Delta_v f'\Psi\Delta_v f) -$$

$$-h(\Delta_v H_x' + \Delta_v f'\Psi + h\Delta_v f'\Psi f_x)\Delta_{c_2} x|_{t=\theta+h} - \eta_{c_2}, \qquad /14/$$

где $\Delta_{c_2} x(\theta+h)$ определено в /12/, а η_{c_1}, η_{c_2} - остаточные члены, полученные из /9/ с учетом /10/ - /12/.

3. Критерии оптимальности особых управлений

Из представлений /13/, /14/ приращений функционала можно получить необходимые условия оптимальности в форме квазимаксимума [1]. Не останавливаясь на деталях вывода этих условий, перейдем сразу же к изучению особых процессов.

Допустимый процесс $(u(t), x(t))$ с соответствующим решением $\psi(t)$, $t \in T_h$, уравнения /6/ будем считать особым, если существует непустое множество $V_h \subset U \times T_h$, на котором

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) \equiv H(\psi(t), x(t), v, t), \quad (v,t) \in V_h. \qquad /15/$$

Из данного определения следует, что на некоторых подмножествах дискретной сетки T_h и области управления U особые процессы тождественно удовлетворяют и принципу максимума (если он справедлив), и принципу квазимаксимума.

Для формулировки результатов введем в рассмотрение подмножества $V^{(1)}_{\varepsilon,h}$, $V^{(2)}_{\varepsilon,h}$ множества V_h, отвечающие фиксированному числу $\varepsilon > 0$. По определению, отнесем пару $(v,\theta) \in V_h$ к $V^{(1)}_{\varepsilon,h}$, если остаточный член η_{c_1}, вызванный вариацией /10/ с $c = c_1$, удовлетворяет условию

$$|\eta_{c_1}| \leq \varepsilon h^2/2. \qquad /16/$$

Аналогично скажем, что $(v,\theta) \in V^2_{\varepsilon,h}$, если $(v,\theta) \in V_h$, $(v,\theta+h) \in V_h$ и $|\eta_{c_2}| \leq \varepsilon h^2/2$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Пусть $(u^h(t), x^h(t))$ - особый на V_h оптимальный процесс. $\psi^h(t), \Psi_h(t)$, $t \in T_h$, - порожденные им решения уравнений /6/, /7/. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\Delta_v f'(x^h(t), u^h(t), t)\Psi_h(t)\Delta_v f(x^h(t), u^h(t), t) \leq \varepsilon$$

для всех $(v,t) \in V^{(1)}_{\varepsilon,h}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: найдутся число $\varepsilon > 0$ и точка $(v,\theta) \in V^{(1)}_{\varepsilon,h}$ такие, что $\Delta_v f'\Psi_h \Delta_v f|_{t=\theta} > \varepsilon$.

Тогда из /I3/, учитывая /I5/, /I6/, получаем

$$\Delta_{c_1} I(u^h) < -\varepsilon h^2/2 + \varepsilon h^2/2 = 0,$$

что противоречит оптимальности управления $u^h(t),\ t \in T_h$. Теорема доказана.

По той же схеме обосновывается вторая

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия теоремы I. Тогда вдоль особого оптимального процесса имеет место неравенство

$$\sum_{\tau = t, t+h} \Delta_v f' \psi_h \Delta_v f +$$

$$+ 2(\Delta_v H_x' + \Delta_v f' \psi_h + h \Delta_v f' \psi_h f_x)\big|_{\tau = t+h} \Delta_v f \big|_{t=\tau} \leq \varepsilon$$

для любых $\varepsilon > 0,\ (v,t) \in V^{(2)}_{\varepsilon,h}$.

С л е д с т в и е I. Для частного случая поставленной задачи, когда

$$f(x,u,t) = A(t)x + b(u,t),\ \varphi(x) = c'x + x'Cx$$

утверждения теорем I,2 справедливы при $\varepsilon = 0,\ (v,t) \in V_h$ и $(v,t),(v,t+h) \in V_h$ соответственно.

Действительно, в условиях следствия из /9/ имеем $\eta = 0$ для любых допустимых вариаций управления. Полагая в формуле /8/

$$u(t) = u^h(t),\ \Delta u(t) = \Delta_{c_i} u(t),\ i = 1,2,\ t \in T_h,$$

приходим к требуемому заключению.

4. Предельный переход

Рассмотрим соответствующую /I/ - /3/ непрерывную задачу: минимизировать $I(u) = \varphi(x(t_1))$ в классе кусочно-непрерывных управлений $u(t) \in U$, связанных почти всюду на $T = [t_0, t_1]$ с кусочно-гладкими траекториями $x(t)$ уравнением

$$dx/dt = f(x,u,t),\quad x(t_0) = x^0. \qquad /17/$$

Относительно функции φ и множества U оставим в силе прежние предположения. Функцию $f(x,u,t)$ будем считать здесь непрерывной по совокупности переменных на произведении $E^n \times U \times T$ вместе с производными $f_x,\ f_{xx}$. Поскольку речь далее пойдет о необходимых условиях оптимальности, дополнительно предположим, что оптимальный процесс $(u(t), x(t))$ непрерывной задачи существует. Для определенности условимся считать управление $u(t)$ непрерывными справа.

Определим вдоль оптимального процесса векторную и матричную системы дифференциальных уравнений

$$\dot\psi = -H_x,\quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)); \qquad /18/$$

$$\dot\Psi = -\Psi f_x - f_x'\Psi - H_{xx}, \quad \Psi(t_1) = -\Phi_{xx}(x(t_1)). \qquad /19/$$

и обозначим через $\psi(t), \Psi(t), t \in T$, их решения.

Объектами исследования в этом параграфе будут оптимальные процессы, которые тождественно удовлетворяют принципу максимума Л.С. Понтрягина:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) \equiv H(\psi(t), x(t), v, t)$$

на некотором подмножестве V декартова произведения $U \times T$.

Как и ранее, пара $(u^h(t), x^h(t))$ будет означать оптимальный процесс дискретной задачи /1/-/3/, отвечающий фиксированному $h > 0$. При необходимости мы будем считать этот процесс определенным на всем отрезке T, продолжая его с T_h на T по правилу

$$u^h(\tau) = u^h(t), \quad x^h(\tau) = x^h(t), \quad t \leq \tau < t+h, \quad t \in T_h.$$

Пусть для разностных аппроксимаций непрерывной задачи выполнены следующие условия:

I. При каждом $h > 0$

а) допустимые ограничениями /1/ - /2/ траектории равномерно ограничены: $x(t) \in X$, $t \in T_h$ (X - компактное подмножество E^n);

б) оптимальные процессы $(u^h(t), x^h(t))$ являются особыми на V_h.

II. При $h \to 0$

а) последовательность множеств V_h сходится к V в следующем смысле: каковы бы ни были $(w, \theta) \in V$ по заданному $\delta > 0$ можно указать $\xi > 0$ такое, что при каждом $h < \xi$ существует пара $(v, t) \in V_h$, лежащая в δ-окрестности (w, θ): $|v - w| < \delta$, $|t - \theta| < \delta$;

б) равномерно на T имеет место сходимость

$$f(x^h(t), u^h(t), t) \to f(x(t), u(t), t),$$
$$f_{x_i}(x^h(t), u^h(t), t) \to f_{x_i}(x(t), u(t), t), \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$f_{x_i x_j}(x^h(t), u^h(t), t) \to f_{x_i x_j}(x(t), u(t), t), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Поясним смысл сформулированных условий. Требование I "а" вместе с предположениями компактности U и непрерывности f_x гарантирует существование такой ограниченной постоянной $K \geq 0$, не зависящей от h, что приращения допустимых траекторий, вызванные вариациями /10/, /11/, удовлетворяют условию

$$|\Delta_{e_i} x(t)| \leq Kh, \quad t \in T_h, \quad i = 1,2, \qquad /20/$$

при любом $h > 0$.

Из условия II "б" при $h \to 0$ вытекает равномерная на T сходимость

$$x^h(t) \to x(t), \quad \psi^h(t) \to \psi(t), \quad \Psi_h(t) \to \Psi(t) \qquad /21/$$

последовательности ступенчатых решений дискретных систем /I/, /6/, /7/ к соответствующим непрерывным решениям уравнений /I7/, /I8/,/I9/ (см. [5]). Остальные условия используются ниже для обоснования предельного перехода. Существенную роль при этом играет следующая.

Л е м м а I. Вдоль оптимальных процессов $(u^h(t), x^h(t))$ остаточные члены z_{c_1}, z_{c_2} формул приращения /I3/, /I4/ обладают тем свойством, что $|z_{c_i}|/h^2 \to 0,\ i=1,2$, при $h \to 0$ для любых $(\vartheta,\theta)\in U\times T_h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $i=1$. Из /9/ согласно /I0/- - /I2/ получаем

$$z_{c_i} = h\sum_{t=\theta+h}^{t_1-h}(\Delta_{c_1}x'\psi_h O^1 + O_2) + h^2\sum_{t=\theta+h}^{t_1-h}(\Delta_{c_1}x' f_x'\psi_h O^1 + 1/2\, O^{1\prime}\psi_h O^1) - O.$$

По определению остаточных членов O, O^1, O_2 и в силу оценки /20/ при малых $h<h_1$ имеем

$$O(|\Delta_{c_1}x(t_1)|^2) \leqslant Mh^2, \quad O^1(|\Delta_{c_1}x(t)|) < Mh,$$
$$O_2(|\Delta_{c_1}x(t)|^2) < Mh^2,\ t\in T_h,$$
$$M = M(h)\to 0,\ h\to 0.$$

Далее, в силу условия П "6" найдутся числа $h_2>0$, $L>0$ такие, что

$$\|\psi_h(t)\| \leqslant L,\ t\in T_h,\ h<h_2.$$

Значит, при $h<\min(h_1,h_2)$ получим

$$|z_{c_1}| < h\sum_{t=\theta+h}^{t_1-h} h^2(KL+1)M + h^2\sum_{t=\theta+h}^{t_1-h} h^2(K\max_{X\times U\times T}\|f_x\| + M/2)LM + h^2M \leqslant h^2CM, \qquad /22/$$

где постоянная C не зависит от ϑ, θ и равна

$$C = [KL + 1 + h(K\max_{X\times U\times T}\|f_x\| + M/2)L](t_1 - t_0). \qquad /23/$$

Из неравенства /22/ и следует утверждение леммы для $i=1$. Для $i=2$ доказательство аналогично.

Поскольку оценка типа /22/, /23/ справедлива и для z_{c_2} и константа C при этом также не зависит от ϑ, θ, то очевидно следующее

С л е д с т в и е 2. Для любого $\varepsilon>0$ существует $h_\varepsilon>0$ такое, что $|z_{c_i}|<\varepsilon h^2/2,\ i=1,2$, равномерно по $(\vartheta,\theta)\in U\times T_h$ при $h<h_\varepsilon$.

Отсюда получаем.

С л е д с т в и е 3. При малых h утверждения теорем I и 2 верны для всех $(v,t)\in V_h$ и $(v,t),(v,t+h)\in V_h$ соответственно.

Перейдем теперь к формулировке основных результатов этого параграфа.

Т е о р е м а 3. Пусть разностные аппроксимации непрерывной задачи удовлетворяют условиям I, П. Для оптимальности особого на V процесса $(u(t),x(t))$ необходимо, чтобы вдоль него и соответствующего решения $\psi(t)$, $t\in T$, системы /19/ выполнялось неравенство

$$\Delta_v f'(x(t),u(t),t)\psi(t)\Delta_v f(x(t),u(t),t)\le 0,\quad (v,t)\in V. \qquad /24/$$

Наметим основные этапы доказательства. Допустим противное: найдутся $(w,\theta)\in V$, при которых

$$\Delta_w f'(x(\theta),u(\theta),\theta)\psi(\theta)\Delta_w f(x(\theta),u(\theta),\theta)=\alpha>0. \qquad /25/$$

Пусть ε - малое положительное число. На основании условий I, П и их следствий /20/, /21/ по выбранному $\varepsilon>0$ можно указать такие $\delta>0$, $\xi>0$ и пару точек $(v,t)\in V_h$, $|v-w|<\delta$, $|t-\theta|<\delta$, что будут справедливы оценки

$$|\Delta_w f(x(\theta),u(\theta),\theta)-\Delta_v f(x^h(t),u^h(t),t)|<\varepsilon,$$
$$\|\psi(\theta)-\psi_h(t)\|<\varepsilon, \qquad /26/$$

как только $|t-\theta|<\delta$, $h<\xi$.

Положим для краткости $\Delta_w f=\Delta_w f(x(\theta),u(\theta),\theta)$, $\Delta_v f^h=\Delta_v f(x^h(t),u^h(t),t)$, $\psi=\psi(\theta)$, $\psi_h=\psi_h(t)$ и представим /25/ в виде

$$\alpha=(\Delta_w f\pm\Delta_v f^h)'(\psi\pm\psi_h)(\Delta_w f\pm\Delta_v f^h)=$$
$$=(\Delta_w f-\Delta_v f^h)'\psi_{\Delta_w} f+\Delta_v f^{h'}(\psi-\psi_h)\Delta_w f+$$
$$+\Delta_v f^{h'}\psi_h(\Delta_w f-\Delta_v f^h)+\Delta_v f^{h'}\psi_h\Delta_v f^h. \qquad /27/$$

Используя оценки /26/, отсюда получаем следующее соотношение для последнего слагаемого в правой части /27/:

$$\Delta_v f^{h'}\psi_h\Delta_v f^h>\alpha-3A\varepsilon$$
$$(v,t)\in V_h,\quad |t-\theta|<\delta,\quad h<\xi, \qquad /28/$$

где A - положительная константа, ограничивающая сверху нормы векторных множителей при разностях $\Delta_w f-\Delta_v f^h$, $\psi-\psi_h$. В силу условий I, П, постоянную A можно выбрать так, что она не будет зависеть от ε,h,v,t. Возьмем малое $\varepsilon_1>0$ и подберем по нему такое $\varepsilon>0$, чтобы $\varepsilon_1<\alpha-3A\varepsilon$. Так как $(u^h(t),x^h(t))$ - оптимальный особый процесс дискретной задачи, то по теореме I и следствию 3 для задан-

ного ε_1 при малых $h<\xi_1<\xi$ должно выполняться неравенство $\Delta_\vartheta f^{h'}\psi_h \Delta_\vartheta f^h < \varepsilon_1$ для всех $(\vartheta,t)\in V_h$, а это противоречит /28/ при $\varepsilon<(\alpha-\varepsilon_1)/3A$. Теорема доказана.

По аналогии с предыдущей доказывается

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия I, П и лебегова мера множества V отлична от нуля. Тогда вдоль особого оптимального процесса непрерывной задачи справедливо неравенство

$$2\Delta_\vartheta f'(x(t),u(t),t)\psi(t)\Delta_\vartheta f(x(t),u(t),t)+ \\ +\Delta_\vartheta H'_x(\psi(t),x(t),u(t),t)\Delta_\vartheta f(x(t),u(t),t)\leqslant 0 \qquad /29/$$

для всех $(\vartheta,t)\in V$.

Отметим, что условие /29/ с точностью до множителя 2 совпадает с условием оптимальности Р.Габасова [6]. Критерий /24/ ранее не был известен. Он интересен тем, что в условиях I, П выполняется и в изолированных точках вырождения управления, например, в точках переключения. Проиллюстрируем это на примере

$$\dot{x}_1=u,\quad \dot{x}_2=-x_1^2,\quad x_1(0)=x_2(0)=0,\quad T=[0,2],\quad |u|\leqslant 1,$$

$\varPhi(x_1,x_2)=x_1+x_2$. Здесь управление $u(t)=\operatorname{sign}(t-1)$, $0\leqslant t\leqslant 2$, удовлетворяет принципу максимума. Условие /24/ в точке переключения $t=1$ принимает противоречивый вид: $2[u(1)-\vartheta]^2\leqslant 0$, $|\vartheta|\leqslant 1$, следовательно, рассматриваемое управление неоптимально. Этот вывод подтверждается и непосредственной проверкой.

Поступила в ред.-изд.отдел
15 сентября 1976 г.

Л и т е р а т у р а

1. Габасов Р.,Кириллова Ф.М. К вопросу о распространении принципа максимума Л.С.Понтрягина на дискретные системы.-"Автоматика и телемеханика", 1966, № 11.

2. Стратонович Р.Л. Об одном обобщении принципа максимума Понтрягина.-"Изв.АН СССР.Техническая кибернетика", 1967, № 1.

3. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем, "Наука", 1971.

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов, "Наука", 1969.

5. Ермольев Ю.М.,Гуленко В.П. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления,-"Кибернетика", 1967, № 3.

6. Габасов Р. Об оптимальности особых управлений - "Дифференциальные уравнения", 1968, № 6.