Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.512.25.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Г.В.Шевченко

В статье предлагается метод решения линейной дискретной задачи оптимального быстродействия. Отметим, что этот метод не требует построения областей достижимости и управляемости.

Пусть управляемый процесс описывается системой линейных разностных уравнений вида

$$x(n) = Ax(n-1) + Bu(n), \qquad x(0) = x^0, \qquad /1/$$

где A и B - постоянные матрицы размерностей $m \times m$ и $m \times s$; $x(n)$ -столбцевой m -мерный вектор; $u(n)$-столбцевой s -мерный вектор, компоненты которого являются управляющими параметрами, причем для всех $n \geq 1$

$$u(n) \in U(n), \qquad /2/$$

где $U(n)$ - замкнутые, ограниченные выпуклые многогранные тела из E_s .

Предполагается, что $0 \in U(n) \setminus \Gamma U(n)$ для любого $n \geq 1$. Здесь и далее через $\Gamma \mathcal{D}$ обозначается граница множества $\mathcal{D}$. Кроме того, предполагается, что система /1/ управляема из x^0 в 0 .

Требуется найти хотя бы одно допустимое управление, переводящее систему /1/ из x^0 в 0 за минимальное число шагов.

Пусть $\det A \neq 0$. Тогда, как показано в [1] , данная задача оптимального быстродействия эквивалентна следующей задаче:

Требуется найти такие $x^1, x^2, \dots, x^N$, что

$$x^1 + x^2 + \dots + x^N = x^0, \qquad /3/$$

$$x^k \in X^k = \{x : x = -A^{-k}Bu,\ u \in U(k)\} \ (k = \overline{1,N}), \qquad /4/$$

где N -оптимальное время, т.е. минимальное число шагов, за которое допустимым управлением можно перевести систему /1/ из x^0 в 0 .

В работе [1] этот факт доказан для случая $U(n) \equiv U$, но он справедлив и для случая, рассматриваемого в данной статье.

Для отыскания оптимального времени и решения задачи /3/, /4/ предлагается следующий метод, сходимость которого будет доказана после его описания.

0. Скаляры N и ρ полагаем равными единице, вектор $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ - равным x^0 .

I. Находим решение каждой из следующих задач линейного программирования:

$$\max_{x \in X^l} \sum_{j=1}^{m} b_j x_j \quad (l=\overline{1,N}), \qquad /5/$$

где x_j - j -я компонента вектора x.

Соответствующие решения обозначим через $\hat{x}^l \ (l=\overline{1,N})$.

2. Полагаем

$$z^{l,\rho} = \hat{z}^l \ (l=\overline{1,N}), \qquad z^\rho = \sum_{l=1}^{N} \hat{x}^l. \qquad /6/$$

3. Если $z^\rho = x^0$, то процесс заканчивается. Если $z^\rho \neq x^0$, то переходим к следующему этапу.

4. Если выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} b_j z_j^\rho < \sum_{j=1}^{m} b_j x_j^0 , \qquad /7/$$

то N увеличивается на единицу, ρ полагаем равным единице и производится переход к первому этапу. В противном случае осуществляется переход к следующему этапу.

5. Находим вектор $C=(C_1, C_2, \dots, C_m)$, удовлетворяющий системе линейных неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 > \sum_{j=1}^{m} c_j z_j^l \quad (l=\overline{1,\rho}) . \qquad /8/$$

Если система /8/ несовместна, то осуществляется переход к следующему этапу. В противном случае вектор b полагаем равным найденному вектору c, ρ увеличивается на единицу и осуществляется переход к первому этапу.

6. Решаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ вида

$$\begin{aligned} &\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \dots + \lambda_\rho z^\rho = x^0, \\ &\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\rho = 1, \\ &\lambda_i \geq 0 \ (i=\overline{1,\rho}). \end{aligned} \qquad /9/$$

Пусть ее решение есть $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_\rho^0$. Тогда полагаем

$$\hat{z}^l = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i^0 z^{l,i} \quad (l=\overline{1,N}), \qquad /10/$$

и процесс завершается.

Доказательство сходимости данного метода. Пусть N_0 - оптимальное время. Обозначим $X=X^1+X^2+\dots+X^{N_0}$. Тогда $x^0 \in X$, но $x^0 \notin Z^N = X^1+\dots+X^N$ для любого $N<N_0$. Поэтому по теореме отделимости для выпуклых множеств для любого $N<N_0$ найдется гиперплоскость $l_N(x)$, строго отделяющая x^0 от множества Z^N,

т.е. $L_N(x) < L_N(x^0)$ для любого $x \in Z^N$.

Рассмотрим отдельно доказательства для случаев $N_0=1$ и $N_0 \geq 2$.

Пусть $N_0=1$. На этапе 0 имеется $b=x^0$, $N=p$, $p=1$. В силу /5/,/6/ получается точка Z^1 . Так как $N=N_0=1$, возможно, что $Z^1=x^0$. Следовательно, решение найдено. Если $Z^1 \neq x^0$, то в силу /5/ неравенство /7/ не выполняется. Поэтому переходим к пятому этапу. Точки x^0 и Z^1 можно разделить гиперплоскостью. Следовательно, система /8/ совместна и имеет решение $c=(c_1,c_2,\dots,c_m)$. Поэтому вектор b полагается равным вектору c , p увеличивается на единицу, и осуществляется переход к первому этапу. Аналогично Z^1 получаются точки $Z^2, Z^3, \dots, Z^p$. Так как $x^0 \in X = Z^1$, то нельзя строго отделить x^0 от множества X . Следовательно, для некоторого p , $1 < p \leq M$, где M - число крайних точек множества X , система неравенств /8/ будет несовместна. А это эквивалентно тому, что $x^0 \in L(Z^1,\dots,Z^p)$ - линейной выпуклой оболочке, натянутой на $Z^1, Z^2, \dots, Z^p$. Поэтому система /9/ имеет решение $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0$, такое, что $\lambda_i^0 \geq 0 \ (i=\overline{1,p})$. В силу выпуклости X^l, векторы χ^{l^p} , полученные по соотношениям /10/, будут искомым решением задачи /3/, /4/.

Пусть $N_0 \geq 2$. На этапе 0 имеем $b=x^0$, $N=p$, $p=1$. В силу /5/,/6/ получается точка Z^1 . Так как $N_0 > 1$, то $Z^1 \neq x^0$.Следовательно, осуществляется переход к этапу 4. Если неравенство /7/ выполняется, то N увеличивается на единицу, так как выполнение неравенства /7/ означает, что $N < N_0$. Скаляр p полагается равным единице, потому что на шаге $N=2$ осуществляется отделение гиперплоскостью множества Z^2 и x^0 . Затем переходим к первому этапу. Если неравенство /7/ не выполняется, то переходим к этапу 5. Точки Z^1 и x^0 можно разделить гиперплоскостью.Следовательно,система /8/ совместна и имеет решение $c=(c_1,c_2,\dots,c_m)$.Поэтому вектор b полагается равным вектору c , p увеличивается на единицу, и осуществляется переход к первому этапу. Аналогично Z^1 получаются точки Z^2, $\dots$, Z^p . Так как $x^0 \notin Z^1$, то по теореме отделимости для выпуклых множеств найдется гиперплоскость, строго разделяющая Z^1 и x^0. Следовательно, для некоторого p , $1 < p \leq M$, где M -число крайних точек множества Z^1 , и соответствующего вектора χ^p неравенство /7/ будет выполнено. А так как выполнение неравенства /7/ возможно только при $N < N_0$, то N увеличивается на единицу. Скаляр p полагаем равным единице, потому что на шаге $N=2$ происходит отделение гиперплоскостью множества Z^2 от точки x^0 .

В силу того, что

$$\max_{x \in Z^N} \sum_{j=1}^{m} b_j x_j = \sum_{l=1}^{N} \max_{x \in X^l} \sum_{j=1}^{m} b_j x_j \quad (N=\overline{1,N_0}),$$

по /5/, /6/ находим крайние точки множеств $\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^2, \ldots, \mathcal{Z}^{N_0}$. Аналогично шагу $N=1$ процесс протекает до шага N_0. При $N=N_0$ доказательство аналогично случаю $N_0=1$.

Для завершения доказательства заметим, что набор $\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^2, \ldots, \mathcal{Z}^P$, при котором $x^0 \in L(\mathcal{Z}^1, \ldots, \mathcal{Z}^P)$, конечен, так как конечно число крайних точек многогранника $\mathcal{X}$.

Таким образом, предлагаемый метод сходится за конечное число итераций, если под итерацией понимать выбор очередного $\mathcal{Z}^i$ и необходимые для этого действия.

З а м е ч а н и е I. Изложенный метод можно применять и в том случае, когда $U(n)$ - выпуклые замкнутые ограниченные тела, хотя его сходимость не гарантируется.

З а м е ч а н и е 2. Так как $\mathcal{X}^K = \{x : x = A^{-K}Bu, u \in U(K)\}$ $(K=1,N_0)$, имеем

$$\max_{x \in \mathcal{X}^K}(b,x) = \max_{u \in U(K)}(b, -A^{-K}Bu) = -\min_{u \in U(K)}((A^{-K}B)^T b, u),$$

где (b,x) - скалярное произведение.

Поступила в ред.-изд.отдел
29 октября 1976 г.

Л и т е р а т у р а

I. Шевченко Г.В. Условия единственности оптимального управления в случае решения задачи оптимального быстродействия для линейных многошаговых процессов.-В кн.: Управляемые системы. вып.I2.Новосибирск, 1974, с.8I-83.