Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск I6.
УДК.512.25

О ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ РЯДОВ ИЗДЕЛИЙ И КОМПЛЕКТУЮЩИХ УЗЛОВ. I

В.Л.Береснев

Ряд (параметрический) изделий - это совокупность типоразмеров изделий, отличающихся значениями своих основных характеристик и предназначенных для удовлетворения некоторой потребности. Под оптимальным рядом изделий понимается такой ряд, который удовлетворяет заданную потребность с наименьшими суммарными затратами.

Построению математических моделей оптимизации рядов изделий и решению возникающих при этом задач посвящено большое число работ, и в этом направлении достигнуты определенные успехи. При построении таких моделей повсеместно предполагается, что стоимостные характеристики всякого изделия могут быть заданы независимо от других изделий ряда. Однако это предложение не всегда является обоснованным. Действительно, одним из основных направлений технического прогресса в области создания машин и механизмов является их агрегатирование (компоновка) из унифицированных узлов специализированного производства. Разработка таких "блочных конструкций", состоящих из отдельных блоков, используемых для компоновки различных изделий, снижает стоимость производства и эксплуатации изделий, одновременно повышая их качество.

Ряд, включающий в себя изделия, компонуемые из унифицированных узлов (агрегатов) и, следовательно, имеющие конструктивную общность, принято называть конструктивно-унифицированным рядом. изделий.

Стоимостные характеристики изделия такого ряда зависят от того, какие унифицированные узлы используются для комплектации изделия и насколько широко применяются эти узлы. Последнее связано прежде всего с тем, что экономика изготовления изделия улучшается в первую очередь от увеличения серийности специализированного производства узлов (деталей).

Таким образом, выбор оптимального конструктивно-унифицированного ряда изделий не может быть произведен сам по себе, а должен по своей сути производиться совместно с выбором оптимальных рядов комплектующих узлов (деталей, агрегатов).

Математическая литература, в которой рассматривались бы вопросы выбора оптимальных рядов изделий и узлов практически отсутствует. Можно назвать лишь работу [2], посвященную весьма частному случаю задачи.

В настоящей работе сделана попытка построения математической модели оптимизации рядов изделий и комплектующих узлов.

Работа может рассматриваться как продолжение исследований, начатых в [3 , 4].

§ I. Постановка задачи

Пусть известна некоторая совокупность видов спроса $X=\{1,\ldots,n\}$ и пусть $\varphi_j>0$, $j\in X$ - объем спроса вида j. Пусть известна также некоторая совокупность изделий $\mathcal{U}=\{1,2,\ldots,m\}$, каждое из которых может быть использовано для удовлетворения некоторых видов спроса. Обозначим через $X_i\subset X$, $i\in\mathcal{U}$, множество видов спроса, для удовлетворения каждого из которых может быть использовано изделие i. Тогда множество $\mathcal{U}_j\subset\mathcal{U}$, $j\in X$, равное $\{i\in\mathcal{U}/j\in X_i\}$, есть множество изделий, способных удовлетворить спрос вида j. Для любых $i\in\mathcal{U}$, $j\in X_i$ будем считать известными числа p_{ij} и g_{ij}. Первое из этих чисел есть количество изделий i, необходимое для удовлетворения единичного спроса вида j, а второе соответствует затратам на эксплуатацию одного изделия i при удовлетворении этим изделием спроса вида j. Предположим, что рассматриваемые изделия собираются компонуются из узлов(агрегатов) K наименований. Пусть $\mathcal{V}=\{1,2,\ldots,M\}$ - множество узлов различных типоразмеров. Причем будем считать, что типоразмерам узла наименования κ, $\kappa=1,2,\ldots,K$, соответствует множество $\mathcal{V}_\kappa=\{M_{\kappa-1}+1,\ldots,M_\kappa\}$. Будем считать также, что узлы унифицированы, т.е. узел одного и того же типоразмера может быть использован для комплектации различных изделий. Пусть $\mathcal{U}^t\subset\mathcal{U}$, $t\in\mathcal{V}$, - совокупность изделий, для комплектации которых можно использовать узел типоразмера t, и пусть $\mathcal{V}_i^\kappa\subset\mathcal{V}^\kappa$, $\kappa=1,\ldots,K$, $i\in\mathcal{U}$, - множество типоразмеров узла наименования κ, которые применяются для комплектации изделия i. Очевидно, $\mathcal{V}_i^\kappa=\{t\in\mathcal{V}^\kappa \mid i\in\mathcal{U}^t\}$. Обозначим через $q_i^t\geqslant 0$, $t\in\mathcal{V}$, $i\in\mathcal{U}$, число узлов типоразмера t, необходимых для комплектации (с учетом замен в процессе эксплуатации) одного изделия i.

Для каждого $i\in\mathcal{U}$ будем считать известной функцию затрат $g_i(V)$ на сборку из унифицированных узлов изделий i в объеме $V\geqslant 0$. Затраты $g_i(V)$ помимо затрат на сборку могут включать в себя множество других составляющих: затраты на опытно-конструкторскую разработку изделия; затраты на организацию серийного производства; затраты на создание ремонтной базы и т.д. Однако эти затраты не включают в себя затрат на производство комплектующих узлов, поскольку узел одного и того же типоразмера идет на комплектацию различных изделий. Будем считать поэтому известной для каждого $t\in\mathcal{V}$ функцию затрат $g^t(V)$ на производтство узлов типоразмера t в объеме $V\geqslant 0$. Затраты $g^t(V)$ также помимо затрат на производство могут включать в себя другие составляющие.

Относительно функций $g_i(V)$, $i\in\mathcal{U}$, $g^t(V)$, $t\in\mathcal{V}$, будем предполагать, что $g_i(V)=0$, $g^t(V)=0$ при $V=0$.

Для формальной записи задачи выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов введем переменные x_{ij}, $i\in\mathcal{U}, j\in X_i$ и x_i^t, $i\in\mathcal{U}^t, t\in\mathcal{V}$. Переменная x_{ij} принимает значение I, если спрос вида j удовлетворяется изделием i, и $x_{ij}=0$ в противном случае. Аналогично $x_i^t=1$, если узел типоразмера t используется для комплектации изделия i и $x_i^t=0$, если не используется.

Переменные x_{ij}, x_i^t должны удовлетворять следующим ограниичениям:

$$\sum_{i\in\mathcal{U}_j} x_{ij}=1, \qquad j\in X;$$

$$\sum_{t\in\mathcal{V}_i^\kappa} x_i^t=\max_{j\in X_i}\{x_{ij}\}, \quad i\in\mathcal{U},\ \kappa=1,\dots,K.$$

Первая группа ограничений соответствует тому, что спрос каждого вида должен быть удовлетворен, а вторая означает, что если изделие участвует в удовлетворении спроса, то для его комплектации должен быть выбран некоторый типоразмер узла каждого наименования.

Если переменные x_{ij}, x_i^t, для которых выполняются указанные ограничения, фиксированы, то ряд изделий будут образовывать изделия из множества $\left\{i\in\mathcal{U}/\max_{j\in X_i}\{x_{ij}\}=1\right\}$, а ряд узлов наименования κ, $\kappa=1,\dots,K$ - типоразмеры из множества $\left\{t\in\mathcal{V}^\kappa/\max_{i\in\mathcal{U}^t}\{x_i^t\}=1\right\}$.

Суммарные затраты складывающиеся из затрат на производство в нужных количествах изделий и узлов, а также их эксплуатацию и соответствующие полному удовлетворению спроса, запишутся следующим образом:

$$\sum_{i\in\mathcal{U}} g_i(V_i)+\sum_{t\in\mathcal{V}} g^t(V^t)+\sum_{j\in X}\sum_{i\in\mathcal{U}_j}\varphi_j\rho_{ij}g_{ij}^{\vartheta}x_{ij},$$

где

$$V_i=\sum_{j\in X_i}\varphi_j\rho_{ij}x_{ij}, \qquad i\in\mathcal{U};$$

$$V^t=\sum_{i\in\mathcal{U}^t}V_i q_i^t x_i^t, \qquad t\in\mathcal{V}.$$

Далее заметим, что, не умаляя общности, для всякого $j\in X$ величину φ_j можно считать равной I, поскольку в противном случае через ρ_{ij} всегда можно обозначить произведение $\varphi_j\rho_{ij}$.

Таким образом, под задачей выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов будем понимать следующую задачу:

$$\sum_{i\in\mathcal{U}} g_i(V_i)+\sum_{t\in\mathcal{V}} g^t(V^t)+\sum_{j\in X}\sum_{i\in\mathcal{U}_j}\rho_{ij}g_{ij}^{\vartheta}x_{ij}\longrightarrow\min_{(x_{ij})(x_i^t)}, \qquad /1/$$

$$V_i = \sum p_{ij} x_{ij}, \qquad i \in \mathcal{U};$$

$$V^t = \sum_{i \in \mathcal{U}^t} V_i q_i^t x_i^t, \qquad t \in \mathcal{V};$$

$$\sum_{i \in \mathcal{U}_j} x_{ij} = 1, \qquad j \in X; \qquad /2/$$

$$\sum_{t \in \mathcal{V}^k} x_i^t = \max_{j \in X_i} \{x_{ij}\}, \quad i \in \mathcal{U}, \quad k = 1, \ldots, K. \qquad /3/$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in \mathcal{U}, \; j \in X_i, \qquad /4/$$
$$x_i^t \in \{0,1\}, \quad t \in \mathcal{V}, \; i \in \mathcal{U}^t.$$

Определение. Функцию $g(V)$, $V \geq 0$, будем называть полулинейной, если $g(V)$ представима в виде:

$$g(V) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad V = 0; \\ g^0 + cV & \text{при} \quad V > 0. \end{cases}$$

В соответствии с этим задачу выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов /1/-/4/ будем называть линейной, если функции затрат $g_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, $g^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$, являются полулинейными, и будем называть линейной в противном случае.

§ 2. Аппроксимация нелинейной задачи линейными

Целью настоящего параграфа является исследование возможности аппроксимации нелинейной задачи выбора оптимальных рядов /1/-/4/ линейными задачами этого же типа. Иными словами исследуется возможность построения для всякой нелинейной задачи и всякого $\Delta > 0$ некоторой линейной задачи, по оптимальному решению которой простым способом может быть построено допустимое решение исходной задачи, отклоняющееся по целевой функции от оптимального меньше чем на Δ.

Рассмотрим подробней схему аппроксимации нелинейной задачи линейными.

Пусть $\bar{V}_i$, $i \in \mathcal{U}$, и $\bar{V}^t$, $t \in \mathcal{V}$, есть максимальное значение соответственно величин V_i и V^t на множестве допустимых решений задачи /1/-/4/. Для всякого $i \in \mathcal{U}$ рассмотрим функцию $\bar{g}_i(V)$, $0 \leq V \leq \bar{V}_i$, являющуюся минорантной конечного семейства попарно различных полулинейных функций $g_{ip}(V)$, $p = 1, \ldots, N_i$, т.е.

$$\bar{g}_i(V) = \min_{p=1,\ldots,N_i} g_{ip}(V).$$

Аналогично, для всякого $t \in \mathcal{V}$ рассмотрим функцию $\bar{g}^t(V)$, $0 \leq V \leq \bar{V}^t$,

являющуюся минорантой конечного семейства попарно различных полулинейных функций $g^{tq}(V)$, $q = 1, \dots, N^t$.

Поставим в соответствие задаче /I/-/4/ следующую задачу:

$$\sum_{i\in U}\sum_{p=1}^{N_i} g_{ip}(V_{ip}) + \sum_{t\in \mathcal{V}}\sum_{q=1}^{N^t} g^{tq}(V^{tq}) +$$
$$+\sum_{j\in X}\sum_{i\in U_j}\sum_{p=1}^{N_i} g_{ij}^{\circ} P_{ij} x_{ipj} \longrightarrow \min_{(x_{ipj})(x_{ip}^{tq})}, \qquad /5/$$

$$V_{ip} = \sum_{j\in X_i} P_{ij} x_{ipj}, \qquad i\in U,\ p=1,\dots,N_i;$$

$$V^{tq} = \sum_{i\in U^t}\sum_{p=1}^{N_i} V_{ip} q_i^t x_{ip}^{tq}, \quad t\in \mathcal{V},\ q=1,\dots,N^t;$$

$$\sum_{i\in U_j}\sum_{p=1}^{N_i} x_{ipj} = 1, \quad j\in X, \qquad /6/$$

$$\sum_{t\in \mathcal{V}_i^K}\sum_{q=1}^{N^t} x_{ip}^{tq} = \max_{j\in X_i}\{x_{ipj}\}, \quad i\in U,\ p=1,\dots,N_i; \quad K=1,\dots,K; \qquad /7/$$

$$x_{ipj}\in\{0,1\},\quad i\in U,\ p=1,\dots,N_i,\ j\in X_i;$$
$$x_{ip}^{tq}\in\{0,1\},\quad t\in \mathcal{V},\ q=1,\dots,N^t,\ i\in U^t,\ p=1,\dots,N_i. \qquad /8/$$

По-прежнему эта задача есть задача выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов с множеством изделий $\{(i,p),\ i\in U,\ p=1,\dots,N_i\}$, множеством типоразмеров узлов $\{(t,q),\ t\in \mathcal{V},\ q=1,\dots,N^t\}$ и с функциями $g_{ip}(V)$, $g^{tq}(V)$ в качестве функций затрат.

Рассмотрим также задачу вида /I/-/4/ с функциями затрат $\bar{g}_i(V)$, $\bar{g}^t(V)$ вместо функций $g_i(V)$, $g^t(V)$. Эту задачу далее будем называть задачей /I'/-/4'/, не выписывая самих соотношений /I'/ - /4'/, поскольку отличие от задачи /I/-/4/ состоит лишь в виде функций затрат.

Таким образом, будут рассматриваться следующие три задачи:

I) задача /I/-/4/, аппроксимацией которой мы занимаемся;

2) задача /5/-/8/, по оптимальному решению которой будем строить допустимое решение первой задачи, т.е. являющаяся по отношению к исходной аппроксимирующей задачей;

3) задача /I'/-/4'/, играющая вспомогательную роль и необходимая лишь для получения оценки уклонения построенного допустимого решения задачи /I/-/4/ от оптимального.

Далее нам понадобится понятие эквивалентности задач. Под *эквивалентными* задачами будем понимать такие задачи, по оптимальному решению каждой из которых достаточно просто может быть получено оптимальное решение другой задачи. Уточним это понятие.

Пусть имеется пара задач:

задача I : $f_1(x_1) \underset{x_1 \in T_1;}{\longrightarrow} \min_{x_1}$;

задача П : $f_2(x_2) \underset{x_2 \in T_2}{\longrightarrow} \min_{x_2}$;

О п р е д е л е н и е. Задачи I и П будем называть эквивалентными, если существуют эффективные алгоритмы построения по всякому оптимальному решению каждой из задач некоторого оптимального решения другой задачи.

Алгоритм мы будем называть эффективным, если оценка трудоемкости (числа операций) алгоритма является степенным выражением относительно размерности решаемой задачи.

При выявлении эквивалентных задач удобно будет пользоваться следующим критерием.

Л е м м а I. Пусть x_1' - допустимое решение задачи I, а x_2' - допустимое решение задачи П и пусть

$$f_1(x_1') \le \min_{x_2 \in T_2} f_2(x_2); \quad f_2(x_2') \le \min_{x_1 \in T_1} f_1(x_1).$$

Тогда

$$f_1(x_1') = \min_{x_1 \in T_1} f_1(x_1) = f_2(x_2') = \min_{x_2 \in T_2} f_2(x_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$f_1(x_1') \geq \min_{x_1 \in T_1} f_1(x_1) \geq f_2(x_2') \geq \min_{x_2 \in T_2} f_2(x_2) \geq f_1(x_1').$$

С л е д с т в и е (критерий эквивалентности). Если по всякому оптимальному решению x_1, задачи I может быть эффективно построено допустимое решение x_2' задачи П такое, что $f_1(x_1) \geq f_2(x_2')$, и по всякому оптимальному решению x_2 задачи П может быть эффективно построено допустимое решение x_1' задачи I такое, что $f_2(x_2) \geq f_1(x_1')$, то задачи I и П эквивалентны.

Используя этот критерий, покажем справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а I. Задачи /1''/-/4''/ и /5/-/8/ эквивалентны.

Докажем предварительно две леммы.

Л е м м а 2. Если $\bar{g}(V)$ - миноранта конечного семейства полулинейных функций $\{g_p(V)\}$, то $\bar{g}(V)$ - полуаддитивная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V_1 \geq 0$, $V_2 \geq 0$ и пусть

$$\bar{g}(V_1) + \bar{g}(V_2) = g_p(V_1) + g_q(V_2).$$

Поскольку $g_p(V)$ и $g_q(V)$ -полулинейные функции, то среди номеров p и q найдется такой (пусть это будет номер p), что $g_p(V_1) + g_q(V_1) \geq g_p(V_1 + V_2)$.

Тогда получаем

$$\bar{g}(V_1) + \bar{g}(V_2) \geq \bar{g}(V_1 + V_2).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть $(x_{i\rho j})$, $(x_{i\rho}^{tq})$ - оптимальное решение задачи /5/-/8/. Тогда если $x_{i\rho}^{tq}=1$ для некоторого ρ, то $V_{i\rho'}=0$ при любом $\rho'\neq\rho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $V_{i\rho}>0$. Предположим, что $V_{i\rho'}>0$ для некоторого $\rho'\neq\rho$. Поскольку $g_{i\rho}(V)$ и $g_{i\rho'}(V)$ - несовпадающие полулинейные функции, то среди ρ и ρ' найдется такой номер (пусть это будет ρ), что

$$g_{i\rho}(V_{i\rho}+V_{i\rho'})<g_{i\rho}(V_{i\rho})+g_{i\rho'}(V_{i\rho'}). \qquad /9/$$

Построим тогда допустимое решение $(\bar{x}_{i\rho j})$ $(\bar{x}_{i\rho}^{tq})$ задачи /5/-/8/, отличающееся от решения $(x_{i\rho j})(x_{i\rho}^{tq})$ лишь тем, что $\bar{x}_{i\rho j}=1$,

$\bar{x}_{i\rho' j}=0$ при $j\in\{s\in X/x_{i\rho' s}=1\}$ и $\sum\limits_{t\in V_i^K}\sum\limits_{q=1}^{N^t}\bar{x}_{i\rho'}^{tq}=0$

для всякого K. Значение целевой функции /5/ на построенном решении $(\bar{x}_{i\rho j})$, $(\bar{x}_{i\rho}^{tq})$ в силу /9/ меньше, чем на решении $(x_{i\rho j})$, $(x_{i\rho}^{tq})$. Но это противоречит предположению об оптимальности решения $(x_{i\rho j})(x_{i\rho}^{tq})$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы I. пусть $(x_{i\rho j})$, $(x_{i\rho}^{tq})$ - оптимальное решение задачи /5/-/8/. Поставим в соответствие этому решению допустимое решение (x_{ij}), (x_i^t) задачи /1'/-/4'/, однозначно определяемое равенствами:

$$x_{ij}=\sum_{\rho=1}^{N_i}x_{i\rho j}, \qquad i\in U,\ j\in X_i; \qquad /10/$$

$$x_i^t=\sum_{\rho=1}^{N_i}\sum_{q=1}^{N^t}x_{i\rho}^{tq}, \quad t\in V,\ i\in U^t. \qquad /11/$$

Покажем, что значение целевой функции /1/ на допустимом решении $(x_{i\rho})$, (x_i^t) не больше оптимального значения целевой функции /5/. Для этого заметим прежде всего, что имеют место следующие равенства:

$$V_i=\sum_{\rho=1}^{N_i}V_{i\rho}, \qquad i\in U;$$

$$V^t=\sum_{q=1}^{N^t}V^{tq}, \qquad t\in V.$$

Действительно, воспользовавшись /10/, нетрудно убедиться в справедливости первого равенства:

$$V_i=\sum_{j\in X_i}\rho_{ij}x_{ij}=\sum_{j\in X_i}\rho_{ij}\sum_{\rho=1}^{N_i}x_{i\rho j}=\sum_{\rho=1}^{N_i}V_{i\rho}.$$

Далее, принимая во внимание /11/, имеем

$$V^t = \sum_{i\in\mathcal{U}^t} \Big(\sum_{p=1}^{N_i} V_{ip}\Big) q_i^t \Big(\sum_{p=1}^{N_i}\sum_{q=1}^{N^t} x_{ip}^{tq}\Big) =$$

$$= \sum_{q=1}^{N^t}\sum_{i\in\mathcal{U}^t} q_i^t \Big(\sum_{p=1}^{N_i} V_{ip}\Big)\Big(\sum_{p=1}^{N_i} x_{ip}^{tq}\Big).$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем требуемое:

$$V^t = \sum_{q=1}^{N^t}\sum_{i\in\mathcal{U}^t} q_i^t \sum_{p=1}^{N_i} V_{ip} x_{ip}^{tq} = \sum_{q=1}^{N^t} V^{tq}.$$

Из доказанного в силу полуаддитивности функции $\bar{g}_i(V)$ следует, что для всякого $i\in\mathcal{U}$

$$\sum_{p=1}^{N_i} g_{ip}(V_{ip}) \geqslant \sum_{p=1}^{N_i} \bar{g}_i(V_{ip}) \geqslant \bar{g}_i\Big(\sum_{p=1}^{N_i} V_{ip}\Big) = \bar{g}_i(V_i).$$

Аналогично для каждого $t\in\mathcal{V}$ имеем

$$\sum_{q=1}^{N^t} g^{tq}(V^{tq}) \geqslant \bar{g}^t(V^t).$$

Кроме того,

$$\sum_{j\in X}\sum_{i\in\mathcal{U}_j} p_{ij} g_{ij}^{\vartheta} x_{ij} = \sum_{j\in X}\sum_{i\in\mathcal{U}_j} p_{ij} g_{ij}^{\vartheta} \sum_{p=1}^{N_i} x_{ipj}. \qquad /12/$$

Так что оптимальное значение целевой функции /5/ не меньше значения целевой функции /1/ на допустимом решении (x_{ij}), (x_i^t).

Рассмотрим теперь оптимальное решение (x_{ij}), (x_i^t) задачи /1'/-/4'/ и поставим в соответствие ему допустимое решение (x_{ip_j}), (x_{ip}^{tq}) задачи /5/-/8/. Для этого всякому $i\in\mathcal{U}$ поставим в соответствие номер p_i такой, что

$$g_{ip_i}(V_i) = \min_p g_{ip}(V_i),$$

и положим

$$x_{ipj} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{если } p = p_i, \\ 0, & \text{если } p \neq p_i. \end{cases}$$

Аналогично для каждого $t\in\mathcal{V}$ найдем номер q^t, для которого

$$g^{tq^t}(V^t) = \min_q g^{tq}(V^t),$$

и положим

$$x_{ip}^{tq} = \begin{cases} x_i^t, & \text{если } p = p_i,\ q = q^t, \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что для решений (x_{ij}), (x_i^t) ; $(x_{ip_j})(x_{ip}^{tq})$ в силу соотношений:

$$V_{ip} = \begin{cases} V_i, & \text{если } p = p_i, \\ 0, & \text{если } p \neq p_i, \end{cases}$$

$$V^{tq} = \begin{cases} V^t, & \text{если } q = q^t, \\ 0, & \text{если } q = q^t, \end{cases}$$

имеют место равенства:

$$\sum_{p=1}^{N_i} g_{ip}(V_{ip}) = g_{ip_i}(V_{ip_i}) = \bar{g}_i(V_i),$$

$$\sum_{q=1}^{N^t} g^{tq}(V^{tq}) = g^{tq^t}(V^{tq^t}) = \bar{g}^t(V^t),$$

и, кроме того, справедливо равенство /I2/. Следовательно, значение целевых функций /I/ и /5/ соответственно на решениях (x_{ij}), (x_i^t) ; (x_{ip_j}), (x_{ip}^{tq}) совпадают.

Таким образом, из сказанного в силу критерия эквивалентности следует, что задачи /I'/-/4'/, /5/-/8/ эквивалентны, а равенства /I0/-/II/ задают способ построения по оптимальному решению задачи /5/-/8/ оптимального решения задачи /I'/-/4'/.

Теорема доказана.

Построенное посредством равенств /I0/, /II/ оптимальное решение задачи /I'/-/4'/ является, очевидно, допустимым решением задачи /I/-/4/. Более того, если функции $g_i(V)$, $g^t(V)$ достаточно хорошо аппроксимированы функциями $\bar{g}_i(V)$, $\bar{g}^t(V)$, то значение целевой функции /I/ на этом допустимом решении будет близко к оптимальному. В самом деле, зададимся некоторым $\Delta > 0$, и пусть функции $\bar{g}_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, $\bar{g}^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$, таковы, что

$$\sum_{i \in \mathcal{U}} \max_{V \le V_i} |g_i(V) - \bar{g}_i(V)| + \sum_{t \in \mathcal{V}} \max_{V \le V^t} |g^t(V) - \bar{g}^t(V)| \le \frac{\Delta}{2} ; \qquad /I3/$$

Тогда значение целевой функции /I/ на оптимальном решении задачи /I'/-/4'/ будет отличаться от оптимального решения задачи /I/-/4/ менее чем на Δ.

Выясним теперь, в каком случае функция $g(V)$, $V > 0$, является минорантой конечного семейства полулинейных функций, иными словами, выясним, функциями из какого класса необходимо производить аппроксимацию функций $g_i(V)$, $g^t(V)$. Для этого нам потребуется определение кусочно-линейной функции.

Определение. Функцию $\bar{g}(V)$, $0 < V < \bar{V}$, будем называть

кусочно-линейной, если существует такое разбиение $\{V_0, V_1, \dots, V_N\}$, $0=V_0<V_1<\dots<V_N=\bar V$, сегмента $[0,\bar V]$, что на каждом сегменте $[V_{p-1}, V_p]$, $p=1,\dots,N$, функция, $\bar g(V)$ совпадает с некоторой полулинейной функцией $g_p(V)$.

Лемма 4. Функция $\bar g(V)$, $0\le V\le\bar V$, является минорантой, конечного семейства полулинейных функций тогда и только тогда, когда $\bar g(V)$ кусочно-линейная и вогнутая.

Доказательство. Пусть $\bar g(V)$, $0\le V\le\bar V$, - миноранта конечного семейства полулинейных функций $\{g_p(V)\}$. Тогда, как нетрудно заметить, $\bar g(V)$ кусочно-линейная. Кроме того $\bar g(V)$ является вогнутой функцией в силу следующих соотношений:

$$\bar g(\lambda V_1+(1-\lambda)V_2)=g_p(\lambda V_1+(1-\lambda)V_2)\geqslant$$
$$\geqslant \lambda g_p(V_1)+(1-\lambda)g_p(V_2)\geqslant\lambda\bar g(V_1)+(1-\lambda)\bar g(V_2).$$

Обратно. Пусть $\bar g(V)$, $0\le V\le\bar V$, - кусочно-линейная вогнутая функция и пусть на сегменте $[V_{p-1}, V_p]$ функция $\bar g(V)$ совпадает с полулинейной функцией $g_p(V)$,

$$g_p(V)=\begin{cases} 0 & \text{при } V=0,\\ g_p^0+c_pV & \text{при } V>0,\ p=1,\dots,N.\end{cases}$$

Причем будем считать, что для всякого $p=1,\dots,N-1$ функция $g_p(V)$ не совпадает с функцией $g_{p+1}(V)$. Покажем, что $\bar g(V)$ -миноранта семейства $\{g_p(V)\}$, $p=1,\dots,N$. Для этого покажем, прежде всего, что для всякого $p=1,\dots,N-1$ имеет место неравенство $c_p<c_{p+1}$. Действительно, пусть V_1 и V_2 -такие точки, что $V_{p-1}<V_1<V_p<V_2<V_{p+1}$. Заметим тогда, что, с одной стороны, из равенств:

$$\bar g(V_1)=g_p^0+c_pV_1,$$
$$\bar g(V_p)=g_p^0+c_pV_p=g_{p+1}^0+c_{p+1}V_p,$$
$$\bar g(V_2)=g_{p+1}^0+c_{p+1}V_2$$

следует

$$c_p=\frac{g(V_p)-g(V_1)}{V_p-V_1}\ ;\qquad c_{p+1}=\frac{g(V_2)-g(V_p)}{V_2-V_p},$$

а с другой,- из неравенства

$$\bar g(\lambda V_1+(1-\lambda)V_2)\geqslant\lambda\bar g(V_1)+(1-\lambda)\bar g(V_2)$$

при $\lambda=\dfrac{V_2-V_p}{V_2-V_1}$ имеем

$$\frac{g(V_p)-g(V_1)}{V_p-V_1}\geqslant\frac{g(V_2)-g(V_p)}{V_2-V_p}.$$

Таким образом, $c_p > c_{p+1}$. Но поскольку $c_p \neq c_{p+1}$, получаем требуемое. Из доказанного, в частности, вытекает, что $g_p(V) < g_{p+1}(V)$ при $V < V_p$ и $g_{p+1}(V) < g_p(V)$ при $V < V_p$. Отсюда получаем для всякого $p = 1, \ldots, N$

$$g_p(V) = \min_{q=1,\ldots,N} g_q(V)$$

при $V \in [V_{p-1}, V_p]$. Следовательно, $\bar{g}(V)$ – миноранта семейства $\{g_p(V)\}$.

Лемма доказана.

Таким образом, нами доказана следующая

Т е о р е м а 2. Если для заданного $\Delta > 0$ существуют кусочно-линейные вогнутые функции $\bar{g}_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, $\bar{g}^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$, удовлетворяющие /13/, то допустимое решение задачи /1/-/4/, отличающееся по целевой функции от оптимального менее чем на Δ, может быть эффективно построено по оптимальному решению линейной задачи.

З а м е ч а н и е 1. Если функции $g_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, $g^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$, вогнутые, то сколь угодно точная аппроксимация функций $g_i(V), g^t(V)$ кусочно-линейными вогнутыми функциями возможна и, следовательно, задача /1/-/4/ может быть аппроксимирована линейной задачей /1/-/4/. Отметим в этой связи, что случай вогнутых функций затрат является наиболее интересным с практической точки зрения.

З а м е ч а н и е 2. Если функции $g_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, $g^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$, неубывающие, то аппроксимирующие функции $\bar{g}_i(V)$, $\bar{g}^t(V)$, можно считать также неубывающими.

Резюмируя сказанное, заключаем, что аппроксимация задачи /1/-/4/ линейными задачами, т.е. процесс построения по оптимальному решению соответствующей линейной задачи допустимого решения исходной задачи, отличающегося по целевой функции от оптимального не более чем на величину Δ, включает в себя следующие этапы:

1) аппроксимацию функций $g_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, $g^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$, кусочно-линейными вогнутыми функциями $\bar{g}_i(V)$, $\bar{g}^t(V)$ так, чтобы выполнялись соотношения /13/;

2) построение семейств полулинейных функций $\{g_{ip}(V)\}$, $i \in \mathcal{U}$, $p = 1, \ldots, M_i$; $\{g^{tq}(V)\}$, $t \in \mathcal{V}$, $q = 1, \ldots, M^t$, минорантами которых являются функции $\bar{g}_i(V)$, $i \in \mathcal{U}$, и $\bar{g}^t(V)$, $t \in \mathcal{V}$.

3) решение линейной задачи /5/-/8/ с функциями затрат $g_{ip}(V)$, $g^{tq}(V)$;

4) построение посредством равенств /10/, /11/ по оптимальному решению линейной задачи /5/-/8/ допустимого решения исходной нелинейной задачи.

Поступила в ред.-изд.отдел
27 января 1976 г.

Литература

1. Гимади Э.Х.,Дементьев В.Т. Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения. - В кн.: Проблемы кибернетики. Вып.27,М.,1973, с.19-32.

2. Алиакбаров С.М.,Беркович М.М. Исследование некоторых двухуровневых задач стандартизации. -"Экономика и матем.методы", 1974, т.X, вып. 2, с.327-335.

3. Береснев В.Л. Об одной задаче математической теории стандартизации. I. - В кн.:Управляемые системы, вып.11, Новосибирск,1973, с. 43-54.

4. Береснев В.Л. Алгоритм неявного перебора для задачи типа размещения и стандартизации. - В кн.:Управляемые системы, вып.12,Новосибирск, 1974, с. 24-34.