Управляемые системы. ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.518.12.

О СВОЙСТВАХ БАЗИСНЫХ МАТРИЦ ОДНОГО КЛАССА МНОГОГРАННИКОВ

Л.В.Любовицкий

Ряд практических важных задач размещения, стандартизации и унификации можно сформулировать следующим образом. Найти

$$\min \sum_i (c_i y_i + \sum_j c_{ij} x_{ij}) \qquad /1/$$

при ограничениях:

$$\sum_i x_{ij} = 1, \qquad /2/$$

$$x_{ij} + v_{ij} - y_i = 0, \qquad /3/$$

$$y_i + u_i = 1, \qquad /4/$$

$$x_{ij},\ v_{ij},\ y_i,\ u_i \geqslant 0, \qquad /5/$$

$$y_i \in \{0,1\}. \qquad /6/$$

Для решения этой задачи в общем случае(без дополнительных ограничений на матрицу (c_{ij}) типа связности или квазивыпуклости) применяются различные модификации метода ветвей и границ [1-3] .Эффективность подобных методов существенно зависит от сложности построения нижней оценки значения целевой функции /1/.

Одну из таких нижних оценок дает решение задачи /1/-/5/. Но на пути использования для этой цели симплекс-метода возникает следующее затруднение.

Обозначим через $M = mn + m + n$ число ограничений /2/-/4/.Известно, что для симплекс-метода необходима память порядка M^2 ячеек, поэтому решение задачи /1/-/5/ даже при сравнительно небольших значениях m и n в настоящее время практически невозможно.

Ниже доказывается одно свойство базисных матриц многогранника /2/-/5/, позволяющее построить алгоритм решения задачи /1/-/5/, являющийся модификацией симплекс-метода, для которого необходима память порядка M ячеек.

Определение базисной матрицы дано в [4] . В /1/-/6/ и в дальнейшем $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

§ I. Обозначения

В матрице ограничений /2/-/4/ номер столбца определяется парой индексов (i,j). Введем одноиндексную нумерацию столбцов, определив соответствие между новым номером столбца l и парой индексов (i,j), следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} l=(i-1)\cdot n+j, \\ i=\left[\frac{l-1}{n}\right]+1, \quad j=l-\left[\frac{l-1}{n}\right]\cdot n \end{array}\right\} l\in L_1, \\ \left.\begin{array}{l} l=(m+i-1)n+j, \\ i=\left[\frac{l-mn-1}{n}\right]+1, \quad j=l-mn-\left[\frac{l-mn-1}{n}\right]\cdot n \end{array}\right\} l\in L_2, \\ \left.\begin{array}{l} l=2mn+i \\ i=l-2mn \end{array}\right\} l\in L_3; \\ \left.\begin{array}{l} l=2mn+m+i \\ i=l-(2mn+m) \end{array}\right\} l\in L_4, \end{array}\right\} \qquad /7/$$

где $L_1=\{1,\dots,mn\}$, $L_2=\{mn+1,\dots,2mn\}$,
$L_3=\{2mn+1,\dots,2mn+m\}$, $L_4=\{2mn+m+1,\dots,2(mn+m)\}$.

Теперь введем обозначения для множеств столбцов матрицы ограничений /2/-/4/:

$$P^q=\{P(l)/l\in L_q\}, \quad q=1,2,3,4,$$

где $P(l)$ – l-й столбец матрицы ограничений.

Матрицу, соответствующую некоторому базису системы /2/-/5/, обозначим через B. Через $\bar P^q$ обозначим подмножество столбцов, принадлежащее множеству P^q и входящее в матрицу B.
Таким образом,

$$B=(\bar P^1, \bar P^2, \bar P^3, \bar P^4).$$

Сделаем замену переменных:

$$t_l^1=x_{ij}, \quad l\in L_1, \quad t_l^2=v_{ij}, \quad l\in L_2,$$
$$t_l^3=y_i, \quad l\in L_3, \quad t_l^4=u_i, \quad l\in L_4.$$

Вектор переменных обозначим через $t=(t^1, t^2, t^3, t^4)$, где $t^q=(t_l^q)$ – q-я группа переменных, $q=\overline{1,4}$. Вектор базисных переменных обозначим через $\bar t=(\bar t^1, \bar t^2, \bar t^3, \bar t^4)$, где $\bar t^q$ – группа базисных

переменных, соответствующих множеству базисных столбцов $\bar{P}^q$, $q=\overline{1,4}$. Теперь систему ограничений /2/-/5/, соответствующую итерации симплекс-метода, можно записать в виде

$$B\bar{t} = b, \qquad /8/$$

где b - вектор правых частей /2/-/4/.

Введем новую нумерацию строк матрицы /2/-/4/, определив соответствие между новым номером строки k и парой индексов (i,j), следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} k=j, \qquad k\in\mathcal{K}_1, \\ \left.\begin{array}{l} k=ni+j, \\ i=\left[\frac{k-1}{n}\right], \quad j=k-\left[\frac{k-1}{n}\right]\cdot n \end{array}\right\} k\in\mathcal{K}_2, \\ \left.\begin{array}{l} k=mn+n+i \\ i=k-(mn+n), \end{array}\right\} k\in\mathcal{K}_3, \end{array}\right\} \qquad /9/$$

где $\mathcal{K}_1=\{1,\dots,n\}$, $\mathcal{K}_2=\{n+1,\dots,mn+n\}$,
$\mathcal{K}_3=\{mn+n+1,\dots,mn+m+n\}$.

Будем считать, что строки и стобцы матрицы B расположены в порядке возрастания номеров.

Иногда в дальнейшем, когда нужно будет указать зависимость между (i,j) и ℓ или k (или наоборот), следующую из /7/,/9/, будем писать: $i(\ell), j(\ell), i(k), j(k)$ или $\ell(i,j)$ $(\ell(i$ при $\ell>2mn)$, $k(i,j)$ $(k(j)$ при $k\in\mathcal{K}_1$, $k(i)$ при $k\in\mathcal{K}_3)$.

Структура матрицы ограничений /2/-/4/ определяет разбиение строк базисной матрицы B на следующие множества строк (всюду дальше $S(k)$ означает k-ю строку матрицы B).

$$S^1=\{S(k)/k\in\mathcal{K}_1\};$$

$$S^2=\{S(k)/P(k-n)\in\bar{P}^1,\ P(mn+k-n)\notin\bar{P}^2,\ P(2mn+i(k))\in\bar{P}^3,\ k\in\mathcal{K}_2\};$$

$$S^3=\{S(k)/P(k-n)\notin\bar{P}^1,\ P(mn+k-n)\in\bar{P}^2, P(2mn+i(k))\in\bar{P}^3,\ k\in\mathcal{K}_2\};$$

$$S^4=\{S(k)/P(k-n)\notin\bar{P}^1,\ P(mn+k-n)\in\bar{P}^2, P(2mn+i(k))\notin\bar{P}^3,\ k\in\mathcal{K}_2\};$$

$$S^5=\{S(k)/P(k-n)\in\bar{P}^1,\ P(mn+k-n)\in\bar{P}^2,\ k\in\mathcal{K}_2\};$$

$$S^6=\{S(k)/P(k-n)\notin\bar{P}^1,\ P(mn+k-n)\notin\bar{P}^2(2mn+i(k))\in\bar{P}^3,\ k\in\mathcal{K}_2\};$$

$$S^7=\{S(K)\,|\,P(K-n)\in\bar{P}^1,\ P(mn+K-n)\notin\bar{P}^2,\ P(2mn+i(K))\notin\bar{P}^3,\ K\in\mathcal{K}_2\};$$

$$S^8=\{S(K)\,|\,P(2mn+i(K))\in\bar{P}^3,\ P(2mn+m+i(K))\in\bar{P}^4,\ K\in\mathcal{K}_3\};$$

$$S^9=\{S(K)\,|\,P(2mn+i(K))\in\bar{P}^3,\ P(2mn+m+i(K))\notin\bar{P}^4,\ K\in\mathcal{K}_3\};$$

$$S^{10}=\{S(K)\,|\,P(2mn+i(K))\notin\bar{P}^3,\ P(2mn+m+i(K))\in\bar{P}^4,\ K\in\mathcal{K}_3\}.$$

Определим еще несколько множеств:

$$\mathcal{I}_1=\{i_1\,|\,P(\ell)\in\bar{P}^1,\ \ i(\ell)=i_1\},$$

$$\mathcal{I}_q=\{i_1\,|\,S(K)\in S^q,\ \ i(K)=i_1\},\ q=\overline{2,10},$$

$$\mathcal{I}_{11}=\mathcal{I}_2\setminus(\mathcal{I}_6\cup\mathcal{I}_9\cup\mathcal{I}_{10}),$$

$$\mathcal{J}_q=\{j_1\,|\,S(K)\in S^q,\ j(K)=j_1\},\ q=\overline{1,7},$$

$$S^{11}=S^3\cup S^4\cup S^5\cup S^8\cup S^{10},$$

$$S^2_{i_1}=\{S(K)\,|\,S(K)\in S^2,\ i(K)=i_1\},$$

$$S^2_{j_1}=\{S(K)\,|\,S(K)\in S^2,\ j(K)=j_1\},$$

$$S^5_{j_1}=\{S(K)\,|\,S(K)\in S^5,\ j(K)=j_1\},$$

$$S^7_{i_1}=\{S(K)\,|\,S(K)\in S^7,\ i(K)=i_1\},$$

$$\bar{P}^1_{i_1}=\{P(\ell)\,|\,P(\ell)\in\bar{P}^1,\ i(\ell)=i_1\},$$

$$\bar{P}^1_{j_1}=\{P(\ell)\,|\,P(\ell)\in\bar{P}^1,\ j(\ell)=j_1\},$$

$$S^1(S^5)=\{S(K)\,|\,S(K)\in S^1,\ j(K)\in\mathcal{J}_5\},$$

$$\bar{P}^1(S^5)=\{P(\ell)\,|\,P(\ell)\in\bar{P}^1,\ P(mn+\ell)\in\bar{P}^2,\ \ell\in L_1\}.$$

Число элементов в множествах $\bar{P}^q$ и S^τ будем обозначать $\bar{p}_q$ и s_τ соответственно, т.е.

$$\bar{p}_q = |\bar{P}^q|, \; q = \overline{1,4}, \quad s_\tau = |S^\tau|, \; \tau = \overline{1,10}.$$

§ 2. Некоторые свойства матриц B и B^T

Л е м м а I. Если $S(K_1) \in S^5$, $S(K_2) \in S^5$ и $K_1 \neq K_2$, то $j(K_1) \neq j(K_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $j(K_1) = j(K_2)$, тогда

$$P(K_1 - n) - P(mn + K_1 - n) = P(K_2 - n) - P(mn + K_2 - n),$$

что противоречит определению матрицы B. Дадим другую формулировку леммы I.

Л е м м а I'. Для каждого j существует не более одного i такого, что

$$P(\ell(i,j)) \in \bar{P}^1 \quad \text{и} \quad S(\ell(i,j) + n) \in S^5.$$

С л е д с т в и е. $s_5 \leq n$.

Следствие сразу вытекает из леммы I'.

Переставим строки матрицы B, принадлежащие $\bigcup_{\tau=1}^{7} S^\tau$, так, чтобы строки $S(K_1) \in S^1$ такие, что $j(K_1) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{J}_5$, находились выше строк $S(K_2) \in S^1$ таких, что $j(K_2) \in \mathcal{J}_5$.

Возьмем $j \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{J}_5$ и заменим строку $S(j)$ матрицы B строкой

$$H(j) = S(j) - \sum_{S(K) \in S_j^2} S(K). \qquad /10/$$

Сделав эту замену для всех $j \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{J}_6$, приведем матрицу B к виду

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_1' & 0 \\ B_2' & B_3' & B_4' \end{pmatrix}.$$

В матрице $\tilde{B}$ строки $S(K) \in S^6 \cup S^7 \cup S^9$ содержат по одному ненулевому элементу.

Преобразование (*). Преобразуем матрицу $\tilde{B}$. Для этого вычеркнем в ней строки $S(K) \in S^6 \cup S^7 \cup S^9$ и столбцы $P(\ell)$, содержащие ненулевые элементы этих строк, т.е. столбцы, для которых $i(\ell) \in \mathcal{J}_6 \cup \mathcal{J}_7 \cup \mathcal{J}_9$.

В результате придем к матрице

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}. \qquad /11/$$

Заметим, что число вычеркнутых строк равно числу вычеркнутых столбцов и в каждой вычеркнутой строке ровно один элемент не равен нулю. Следовательно, матрица $\bar{B}$ квадратная и неособенная.

Л е м м а 2. В матрице B_1 число строк и столбцов равно $n-s_5$ и $m-(s_6+s_9+s_{10})$ соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что число строк матрицы B_1' равно $n-s_5$. Преобразование /10/, проделанное для всех $j \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{J}_5$, преобразует группу столбцов $\bar{P}_i'$ матрицы B в один столбец матрицы B_1'. Таких столбцов в матрице B_1 было бы ровно m, но преобразование (*) уменьшает число столбцов матрицы B_1' на $s_6+s_9+s_{10}$, так как $|\mathcal{J}_7| = s_{10}$.

Л е м м а 3. Матрица B_1 квадратная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для матрицы B имеем

$$\sum_{q=1}^{4} \bar{P}_q = \sum_{r=1}^{10} s_r . \qquad /12/$$

Далее,

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = s_2 + s_3 + s_4 + 2s_5 + s_7 , \qquad /13/$$
$$\bar{P}_3 + \bar{P}_4 = 2s_8 + s_9 + s_{10} .$$

Заметим, что

$$s_n = n \qquad /14/$$

и

$$\bar{P}_3 + \bar{P}_4 = s_8 + m , \qquad /15/$$

так как $s_8 + s_9 + s_{10} = m$.

Подставив /13/, /14/ и /15/ в /12/, получим

$$m + s_5 = n + s_6 + s_9 + s_{10} .$$

Таким образом, $\dim B_1 = m_1 \times m_1$, где

$$m_1 = m - (s_6 + s_9 + s_{10}) = n - s_5 \leq \min\{m,n\} .$$

Из леммы 3 и /11/ следует

Л е м м а 4. Матрица B_1 неособенная.

Опишем процесс решения системы /8/. Часть переменных группы t^3 /т.е. $y_1, \dots, y_m$ /, в силу определения множеств S_6, S_7, S_9, вычисляется по формулам:

$$\left.\begin{array}{l} t_\ell = 0, \ \ell \in L_3 \setminus \bar{L}_3 , \\ \left.\begin{array}{l} t_\ell = -b_{K(i(\ell), j(\ell))} , \ i(\ell) \in \mathcal{J}_6 \cup \mathcal{J}_7 , \\ t_\ell = b_{K(i(\ell))} , \ i(\ell) \in \mathcal{J}_9 , \end{array}\right\} \ell \in \bar{L}_3 , \end{array}\right\} \qquad /16/$$

где $\bar{L}_3 = \{\ell \mid P(\ell) \in \bar{P}^3\}$.

Остальные компоненты группы переменных t^3 дает решение системы

$$B_1 t(\mathcal{J}_0) = b', \qquad /17/$$

где $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_1 \setminus (\mathcal{J}_6 \cup \mathcal{J}_9 \cup \mathcal{J}_{10}),\ t(\mathcal{J}_0) = (t_i),\ i \in \mathcal{J}_0,$

$$b' = (b'_j),\ j \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_5,$$

$$b'_j = b_j - \sum_{j(k)=j} \Big(\sum_{j(k) \in \mathcal{J}_2} b_k + \sum_{i(k) \in \mathcal{J}_6} b_k - \sum_{i(k) \in \mathcal{J}_9} b_k \Big). \qquad /18/$$

Вычисление переменных группы t' проведем в два шага.

На первом шаге находим значения переменных, соответствующих столбцам

$$P(\ell) \in \{P(\ell_1) \mid P(\ell_1) \in \bar{P}',\ S(k(i(\ell_1), j(\ell_1))) \in S^2 \cup S^7\}.$$

На втором шаге переменные, найденные на первом шаге, подставим в уравнения системы /8/, соответствующие строкам S^1. В каждое такое уравнение, в силу леммы I, может войти не более одной переменной соответствующей столбцу

$$P(\ell) \in \{P(\ell_1) \mid P(\ell_1) \in \bar{P}',\ S(k(i(\ell_1), j(\ell_1))) \in S^5\}.$$

Этим завершается определение переменных группы t', так как

$$\bar{P}_1 = s_2 + s_5 + s_7.$$

Переменные групп t_2 и t_4 легко вычисляются из /3/, /4/.

Для одного из способов определения столбца, вводимого на итерации симплекс-метода в базис, необходимо решить систему

$$B^T z = \gamma, \qquad /19/$$

где B^T - транспонированная матрица B,

z - вектор двойственных переменных,

γ - вектор коэффициентов целевой функции /I/,

соответствующих базису. Строки $S(k)$ и столбцы $P(\ell)$ матрицы B стали соответственно столбцами и строками матрицы B^T.

Аналогично вектору $\bar{t}$, введем вектор $\bar{z} = (z^2)$, где z^2 - группа двойственных переменных, соответствующих множеству столбцов S^2, $\tau = \overline{1,10}$.

Переменные группы z^2 выражаются через переменные группы z^1 формулой

$$z^2_\ell = \gamma_\ell - z'_\ell,\ \ell \in \{\ell \mid P(\ell) \in \bar{P}^2\}. \qquad /20/$$

Вычеркнем в матрице B^T строки $P(\ell) \in \bar{P}'(S^5)$ и столбцы $S(k) \in S''$, а также строки $P(\ell) \in \bar{P}'(S^5)$ и столбцы $S(k) \in S'(S^5)$. Так как в каждой вычеркнутой строке по одному ненулевому элементу и $|S''| = |\bar{P}^2 \cup \bar{P}^4|$, $|S'(S^5)| = |\bar{P}'(S^5)|$, то получится квадратная, неособенная матрица $\bar{B}'$.

Отметим, что переменные, соответствующие столбцам $S(k) \in S'' \cup S'(S^5)$, вычисляются в силу определения строк $\bar{P}^2$, $\bar{P}^4$ и $\bar{P}'(S^5)$.

В матрице $\bar{B}'$ останется $n - s_5$ столбцов $S(k) \in S' \setminus S'(S^5)$, т.е. $n - s_5$ соответствующих переменных группы z'.

Оставшиеся переменные группы Z^2 выразим через оставшиеся переменные группы Z^1 и подставим в уравнения, соответствующие строкам $P(\ell) \in \bar{P}^3$ матрицы $\bar{B}^1$, но только для $i(\ell) \in \mathcal{J}_{11}$.

В результате придем к системе

$$B_5 Z(\mathcal{J}_{11}) = \gamma^1, \qquad /21/$$

где B_5 - соответствующая матрица, причем нетрудно заметить, что

$$B_5 = B_1^T, \quad Z(\mathcal{J}_{11}) = (Z_i), \quad i \in \mathcal{J}_{11}, \quad \gamma^1 = (\gamma_i^1), \quad i \in \mathcal{J}_{11}$$

и γ_i^1 вычисляются по формуле

$$\gamma_i^1 = \gamma_i + \sum_{\substack{i(\ell) = i \\ P(\ell) \in \bar{P}^1}} \gamma_i .$$

Таким образом, определены все переменные группы Z^1.

Осталось вычислить переменные групп Z^6 и Z^9. Но в строку $P(\ell) \in \bar{P}^3$ матрицы B^T с ненулевым коэффициентом может входить не более одной переменной групп Z^6 и Z^9, что позволяет определить и эти переменные.

Использование полученных свойств базисной матрицы многогранника /2/-/5/ позволяет построить модификацию симплекс-алгоритма, для которого объем необходимой памяти равен $C_1 mn$ ячеек и трудоемкость выполнения одной итерации равна $C_2 mn$ элементарных опреаций, где C_1 и C_2 - константы.

Литература

I. Береснев В.Л. Алгоритм неявного перебора для задачи типа размещения и стандартизации. - В кн.: Управляемые системы. вып.I2. Новосибирск, I974, 24-34.

2. Зуховицкий С.И.,Поляк Р.А., Примак М.Е. Об одном классе задач вогнутого программирования. - "Экономика и мат.методы", I968, т.IУ, № 3, 43I-443.

3. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.,Дискретное программирование. М., "Наука", I969.

4. Данциг Дж. Линейное программирование. Его применения и обобщения. М., "Прогресс", I966.