Управляемые системы, ИМ СО АН СССР,1978 г., выпуск 17.
УДК.519.8

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ВЫПУКЛОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н.И.Глебов

Известно [1 - 3], что решение некоторых задач выпуклого целочисленного программирования может быть получено посредством алгоритма типа покоординатного спуска. В настоящей работе продолжается исследование возможности использования такого алгоритма для решения задач из более широкого, по сравнению с рассматривавшимися ранее, класса. Полученные достаточные условия разрешимости представляют собой обобщение соответствующих результатов из [2 , 3] .

1. Рассмотрим класс задач выпуклого целочисленного программирования следующего вида:

$$\max_{x\in P} \sum_{i=1}^{m} f_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big), \qquad /1/$$

где $f_i(\cdot)$ - выпуклые вверх функции целочисленного аргумента; $A=\{a_{ij}\}$ - $m\times n$ - матрица с неотрицательными целочисленными элементами a_{ij} ;

P - конечное множество целочисленных точек x , лежащее в положительном ортанте и содержащее начало координат.

Нашей целью является исследование разрешимости задачи /1/ посредством алгоритма покоординатного спуска (ПС) . Согласно этому алгоритму процесс вычислений начинается с точки 0 .Если после некоторого числа шагов мы пришли к точке $x\in P$, то следующий шаг состоит в переходе (если это возможно) к такой точке x' из P , которая получается добавлением единицы к одной из компонент вектора x и переход к которой приводит к наибольшему увеличению целевой функции. В случае существования нескольких точек такого типа выбирается любая из них. Ввиду конечности множества P этот процесс закончится в некоторой точке $\bar{x}\in P$.

Будем изучать вопрос: для каких A и P алгоритм ПС приводит к точке $\bar{x}$, являющейся решением задачи /1/?

Используемые обозначения:

$x, y, t, b, \ldots$ - векторы с целочисленными компонентами, размерность которых будет видна из контекста;

$x\leqslant y$ - если соответствующие компоненты векторов x и y удовлетворяют неравенствам $x_j\leqslant y_j$;

$$[0,x] = \{y / 0 \leq y < x\}; \quad \delta_j = (0,\dots,0,1_j,0,\dots,0);$$

$E(x,P)=\{j / x+\delta_j \in P\}$ – множество допустимых направлений в точке x относительно множества P;

$max\,P = \{x \in P / E(x,P) = \emptyset\}$ – множество максимальных точек множества P;

$$P(A;b) = \{x \in P / Ax \leq b\};$$

$$Q = \{x / \sum_{j=1}^{n} x_j > 0 \text{, и существует } y \in P \text{ такой, что } x \leq y\};$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right); \quad \Delta_j f(x) = f(x+\delta_j) - f(x);$$

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}); \quad a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}).$$

Дополнительные ограничения на A и P:

1) $[0,x] \subset P$ при $x \in P$.

2) $\delta_j \in P$, $j = 1,2,\dots,n$.

3) Матрица A не содержит нулевых строк и столбцов.

Замечание. По алгоритму ПС переход из точки $x \in P$ происходит в такую точку $x+\delta_{j_0}$, для которой $j_0 \in E(x,P)$ и

$$\Delta_{j_0} f(x) = max\{\Delta_j f(x) / j \in E(x,P)\} > 0.$$

Приводимая ниже теорема устанавливает достаточные условия разрешимости задачи /I/ посредством алгоритма ПС.

Теорема I. Если A и P обладают свойствами:

(α) для всякого вектора $b > 0$ множество $max[P(A,b)]$ лежит в некоторой гиперплоскости вида $\sum_{j=1}^{n} x_j = const$;

(β) n – вектор $I = (1,\dots,1)$ является относительно внутренним вектором конуса, порожденного векторами a_i, $i = 1,\dots,m$,

то алгоритм ПС дает решение задачи /I/.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма I. Если A и P обладают свойством (α) и $x \in P$, $y \in Q$, $\sum_{j=1}^{n} x_j < \sum_{j=1}^{n} y_j$, то при некотором $j \in E(x,P)$ для каждого i, $1 \leq i \leq m$, такого, что $a_{ij} \geq 1$, имеет место неравенство $a_i x \leq a_i(y - \delta_j)$.

Доказательство проведем от противного. Пусть для каждого $j \in E(x,P)$ существует i, такое, что $a_{ij} \geq 1$ и $a_i x > a_i(y - \delta_j)$, или, другими словами, для любого $j \in E(x,P)$ множество

$$\mathcal{I}(j) = \{i / a_{ij} \geq 1 \text{ и } a_i x + a_{ij} - 1 > a_i y\}$$

непусто. Далее положим

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \notin \mathcal{I}(j) \text{ при всех } j \in E(x,P); \\ \min\limits_{j / i \in \mathcal{I}(j)} a_{ij} \text{ – в противном случае;} \end{cases}$$

$$b_i = max(a_i \cdot x + \alpha_i - 1,\ a_i \cdot y).$$

Очевидно, $\alpha_i \geq 1$, $b_i \geq 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$, и при $b=(b_1,\ldots,b_m)$ векторы x и y принадлежат множествам $P(A;b)$ и $Q(A;b)$ соответственно. Кроме того, x является максимальной точкой множества $P(A;b)$. В самом деле, для любого $j \in E(x,P)$ при $i \in J(j)$ имеем $a_i \cdot (x+\delta_j) = a_i \cdot x + a_{ij} \geq a_i \cdot x + \alpha_i$ и $a_i \cdot x + a_{ij} \geq a_i \cdot y + 1$, т.е. $a_i \cdot (x+\delta_j) > b_i$. Следовательно, $x+\delta_j \notin P(A;b)$ при любом $j \in E(x,P)$, что означает максимальность точки x в $P(A;b)$. Наконец, можно утверждать, что $y \in Q \setminus P$, поскольку в противном случае $y \in P(A;b)$ и вектор x, будучи максимальным в $P(A;b)$, не мог бы иметь, в силу свойства (α), меньшую сумму компонент, чем вектор y. Отношение $y \in Q \setminus P$, в свою очередь, означает, что вектор y имеет, по крайней мере, одну отрицательную компоненту.

Таким образом, в рамках рассматриваемого предположения нами установлено существование троек векторов $\langle x, y, b \rangle$ со следующими свойствами: $b \geq 0$, $x \in max[P(A;b)]$, $y \in Q(A;b) \setminus P$, $\sum_{j=1}^{n} x_j < \sum_{j=1}^{n} y_j$.

Среди всевозможных троек такого типа выберем ту, в которой вектор y имеет максимальную сумму компонент. Чтобы не загромождать обозначений, будем считать, что такой тройкой является $\langle x, y, b \rangle$.

Выберем отрицательную компоненту вектора y, $y_{j_0} < 0$, и рассмотрим векторы $y' = y + \delta_{j_0}$, $b' = b + A\delta_{j_0}$. Нетрудно видеть, что $\delta_{j_0} \in P(A;b')$, $Ay' \leq b'$, и так как увеличение на единицу отрицательной компоненты вектора y не выводит за пределы множества Q, то $y' \in Q(A;b')$. Среди максимальных элементов множества $P(A;b')$ найдется элемент x', мажорирующий δ_{j_0}, т.е. $x' \geq \delta_{j_0}$ и $x' \in max[P(A;b')]$. Для x' и y' должно выполняться неравенство $Ix' \geq Iy'$. В самом деле, если бы было наоборот, $Ix' < Iy'$, то в случае $y' \in P$ это противоречило бы свойству (α), а в случае $y \notin P$ – выбору тройки $\langle x, y, b \rangle$. Полагая теперь $x'' = x' - \delta_{j_0}$, мы будем иметь $x'' \in P(A;b)$ и $Ix'' = Ix' - 1 \geq Iy' - 1 = Iy > Ix$. Полученное неравенство $Ix'' > Ix$ противоречит свойству (α) для A и P, что и доказывает лемму.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Положим $f_i^{max} = max\{f_i(a_i \cdot x) / x \in P\}$ и доопределим функции f_i для отрицательных значений аргумента так, чтобы они оставались вогнутыми и при любом целом отрицательном s выполнялось неравенство

$$f_i(s) \leq f(0) - \sum_{k \neq i} f_k^{max}, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

Пусть $0 = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^r, \ldots, x^q = \bar{x}$ – последовательность то-

чек из P, получаемых в процессе применения алгоритма ПС к задаче /I/. Очевидно, $Ix^{\tau}=Ix^{\tau-1}+1,\ f(x^{\tau-1})<f(x^{\tau}),\ \tau=1,2,\dots,q$. Чтобы показать, что $\bar{x}$ является решением задачи /I/, достаточно доказать неравенства

$$f(y)\leqslant\begin{cases} f(x^{\tau}) \text{ при } y\in Q \text{ и } Iy=\tau\leqslant q,\\ f(\bar{x}) \text{ при } y\in Q \text{ и } Iy>q.\end{cases}$$

Последнее можно осуществить методом математической индукции по $\tau=0,1,\dots$, где $\tau=Iy$.

Начальный шаг $(\tau=0)$. Пусть $y\in Q$ и $Iy=0$. Рассмотрим гиперплоскость $\Gamma y=\{z/zy=0\}$. Так как $I\in\Gamma y$, то из свойства (β) следует, что порожденный векторами a_i, $i=1,\dots,m$, конус либо целиком лежит в Γy, либо рассекается гиперплоскостью Γy на две непустые части. В первом случае мы будем иметь $a_i y=0$ при всех $i=1,2,\dots,m$ и, следовательно,

$$f(y)=\sum_{i=1}^{m} f_i(a_i y)=\sum_{i=1}^{m} f_i(0)=f(x^{\circ}).$$

Во втором случае найдется вектор a_k такой, что $a_k y<0$, и следовательно,

$$f(y)=\sum_{i=1}^{m} f_i(a_i y)\leqslant f_k(a_k y)+\sum_{i\neq k} f_i^{max}\leqslant f(x^{\circ}).$$

Индуктивный шаг $(\tau\to\tau+1)$. Пусть $y\in Q$ и $Iy=\tau+1\ (\tau\geqslant 0)$. Возможен один из двух случаев: 1) $\tau+1\leqslant q$, 2) $\tau+1>q$.

Случай I. Пусть $x^{\tau+1}=x^{\tau}+\delta_{j_0}$, где $j_0\in E(x^{\tau},P)$ и

$$\Delta_{j_0} f(x^{\tau})=max\{\Delta_j f(x^{\tau})/\,j\in E(x^{\tau},P)\}>0.$$

По доказанной лемме, при некотором $j\in E(x^{\tau},P)$ для каждого i, такого, что $a_{ij}\geqslant 1$, имеет место неравенство $a_i x^{\tau}\leqslant a_i(y-\delta_j)$. Следовательно, $\Delta_j f(x^{\tau})\geqslant\Delta_j f(y-\delta_j)$. Кроме того, $I(y-\delta_j)=\tau$, $y-\delta_j\in Q$ и, по предположению индукции, $f(y-\delta_j)\leqslant f(x^{\tau})$. Таким образом, $f(y)=$ $=f(y-\delta_j)+\Delta_j f(y-\delta_j)\leqslant f(x^{\tau})+\Delta_j f(x^{\tau})\leqslant f(x^{\tau})+\Delta_{j_0} f(x^{\tau})=f(x^{\tau+1})$.

Случай 2. Применяя в этом случае лемму I к точкам $\bar{x}$ и y, получаем, что при некотором $j_0\in E(\bar{x},P)$ имеет место неравенство $\Delta_{j_0} f(\bar{x})\geqslant\Delta_{j_0} f(y-\delta_{j_0})$. Поскольку $\Delta_{j_0} f(\bar{x})\leqslant 0$, то, используя также предположение индукции, будем иметь $f(y)=f(y-\delta_{j_0})+\Delta_{j_0} f(y-\delta_{j_0})\leqslant$ $\leqslant f(\bar{x})$. Теорема доказана.

2. Дальнейшие рассмотрения будут посвящены исследованию условий (α) и (β) теоремы I в том случае, когда множества P задаются системами линейных ограничений следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\leqslant b_i,\qquad i=m+1,\dots,\bar{m}, \qquad /2/$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1,2,\dots,n, \qquad /3/$$

$$x_j \text{ целое}, \quad j=1,2,\ldots,n, \qquad /4/$$

где a_{ij} - целые неотрицательные числа, $\bar{m}\geqslant m$.

Обозначим по-прежнему через A расширенную матрицу (размерности $\bar{m}\times n$), первые m строк которой образуют матрицу, входящую в формулировку задачи /I/, а последние $\bar{m}-m$ строк - матрицу коэффициентов левых частей ограничений /2/.

Дополнительно введем следующие обозначения:

$$\mathcal{J}_k=\{1,2,\ldots,k\}, \quad k=1,2,\ldots ;$$

$A(S)$ - матрица, полученная из A после удаления всех строк, номера которых не принадлежат S, $S\subset\mathcal{J}_{\bar{m}}$;

$$A_i^{(t)}=\{j\in\mathcal{J}_n / a_{ij}>t_i\},$$

где $i\in\mathcal{J}_{\bar{m}}$ и $t=(t_1,t_2,\ldots,t_{\bar{m}})$ - произвольный $\bar{m}$ - вектор с неотрицательными целочисленными компонентами;

$$Z=\{z/z=Ay,\ Iy=1,\ y \text{ целочисленный}\};$$

$$O(A;b)=\{x/Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0 \text{ целочисленный}\}, \text{ где } b=(b_1,\ldots,b_{\bar{m}})\geqslant 0;$$

$$O_S(A;b)=\{x/\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\ i\in S;\ x\geqslant 0 \quad \text{целочисленный}\}.$$

Определение I. Будем говорить, что матрица A обладает свойством (α), если при любом $b\geqslant 0$ все максимальные точки множества $O(A;b)$ принадлежат некоторой гиперплоскости вида $Ix=const(b)$. Это равносильно тому, что матрица $A(\mathcal{J}_m)$ и множество P, заданное ограничениями /2/-/4/, удовлетворяют условию (α) теоремы I при произвольных значениях правых частей ограничений /2/.

Замечание. Если A обладает свойством (α), то любая ее подматрица $A(S)$, не содержащая нулевых столбцов, также обладает свойством (α).

Определение 2. Матрицу $A(S)$ будем называть t - покрытием (множества $\mathcal{J}_n$), если $\bigcup\{A_i^{(t)}/i\in S\}=\mathcal{J}_n$. Кроме того, если после удаления из нее любой строки она перестает быть t - покрытием, то будем ее называть тупиковым t - покрытием. Про матрицу $A(S)$ будем просто говорить, что она является (тупиковым) покрытием, если не будет особой необходимости акцентировать внимание на векторе t. Ту же самую терминологию мы будем применять и по отношению к множеству S, фигурирующему в определении матрицы $A(S)$.

Лемма 2. Матрица A обладает свойством (α) тогда и только тогда, когда этим свойством обладает любая ее подматрица $A(S)$, являющаяся тупиковым покрытием.

Доказательство. Пусть каждое тупиковое покрытие $A(S)$ обладает свойством (α). Посредством $C_S(b)$ обозначим значение константы в уравнении гиперплоскости $Ix=const(b)$, содержащей максимальные точки множества $O_S(A;b)$. Поскольку $O(A;b)\subset O_S(A;b)$ для любого покрытия S, то $Ix\leqslant\min\{C_S(b)/S$ - тупиковое покрытие$\}$ для всех точек x из $O(A;b)$. Пусть

x_0 - максимальная точка множества $O(A;b)$ и $t=b-Ax_0$. Тогда $\mathcal{I}_m$ является t -покрытием и некоторое его подмножество S_0 будет тупиковым t - покрытием. Другими словами, x_0 есть максимальная точка множества $O_{S_0}(A;b)$, и, следовательно, $Ix_0=C_{S_0}(b)\geqslant \min\{C_S(b)/$ $/S$ - тупиковое покрытие$\}$. С учетом предыдущего замечания, лемма 2 полностью доказана.

Л е м м а 3. Матрица A обладает свойством (α) тогда и только тогда, когда для любого целочисленного m -вектора, $t>0$, имеет место

$$\{z\in\mathcal{Z}/z<t\}\neq\emptyset\Longrightarrow\{j/a^j<t\}\neq\emptyset.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $z\in\mathcal{Z}$, $z<t$, где $z=Ay$, $Iy=1$. Представим y в виде $y=x''-x'$, где $x'\geqslant0$, $x''\geqslant0$, $Ix''=Ix'+1$, и положим $b=Ax'+t$. Тогда будем иметь $Ax'\leqslant b$, $Ax''=Ax'+Ay<Ax'+t=b$, и, поскольку $Ix'<Ix''$, должно существовать j такое, что $A(x'+\delta_j)\leqslant b=Ax'+t$. Следовательно, $a^j<t$.

Достаточность. Пусть $b\geqslant0$, $x'\geqslant0$, $x''\geqslant0$, $Ix'=Ix''-1$ и $Ax'<b$, $Ax''\leqslant b$. Положим $y=x''-x'$, $z=Ay$ и определим компоненты вектора t посредством равенств $t_i=\max(0,a_iy)$, $i\in\mathcal{I}_m$. Так как $z\in\mathcal{Z}$ и $z<t$, то, по условию, найдется номер j, такой, что $a^j\leqslant t$. Тогда $A(x'+\delta_j)=Ax'+a^j\leqslant Ax'+t\leqslant b$, и, следовательно, A обладает свойством (α). Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. Для матрицы A, обладающей свойством (α), условие (β) эквивалентно следующему условию: (γ) для любого $i\in\mathcal{I}_m$ существует тупиковое покрытие S, $S\subset\mathcal{I}_m$, содержащее i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(\gamma)\Longrightarrow(\beta)$. Предположим, что условие (β) не выполняется, т.е. вектор I не принадлежит относительной внутренности конуса, порожденного векторами a_i, $i\in\mathcal{I}_m$. В таком случае должен существовать вектор y_0, для которого $Iy_0=0$, $Ay_0\leqslant0$ и $a_{i_0}y_0<0$ при некотором $i_0\in\mathcal{I}_m$. При этом, в силу целочисленности элементов матрицы A, вектор y_0 можно считать также целочисленным.

Пусть S - тупиковое покрытие, содержащее i_0. Легко видеть, что для любого вектора t, при котором S является тупиковым t - покрытием, имеют место неравенства $t_i<\max\limits_j a_{ij}$, $i\in S$. Следовательно, среди целочисленных векторов рассматриваемого вида найдется вектор t^0, у которого сумма компонент с номерами из S имеет максимальное значение и $t_i^0\geqslant\max\limits_j a_{ij}$ при $i\notin S$. Другими словами, найдется вектор t^0, при котором S является (тупиковым) t^0- покрытием, а для любого целочисленного вектора t такого, что $t\geqslant t^0$ и $t_i>t_i^0$ при некотором $i\in S$, не существует t - покрытий.

Заметим теперь, что t - покрытие существует тогда и толь-

ко тогда, когда множество $\{j / a^j < t\}$ пусто.

Учитывая свойство (α) и применяя к A лемму 3, при $t=t^\circ$ будем иметь $\{z \in Z / z \leqslant t^\circ\} = \emptyset$, т.е. неравенство $Ay \leqslant t^\circ$ не выполняется ни при каком целочисленном векторе y, для которого $Iy = 1$. Отсюда, в частности, следует, что множество $\{j / a^j \leqslant t^\circ - Ay_0\}$ пусто. Тогда при $t = t^\circ - Ay_0$, где $t \geqslant t^\circ$ и $t_{i_0} > t^\circ_{i_0}$, должно существовать t - покрытие, что противоречит выбору t°.

$(\beta) \Longrightarrow (\gamma)$. Пусть i_0 не входит ни в какое тупиковое покрытие. Рассмотрим столбец с номером j_1, для которого $a_{i_0 j_1} > 0$, и определим m - вектор t, полагая $t_{i_0} = 0$, $t_i = a_{ij_1}$ при $i \neq i_0$. Если бы множество $\{j / a^j \leqslant t\}$ было пусто, то, во-первых, существовали бы t - покрытия и, во-вторых, любое t - покрытие, а значит, и любое тупиковое t - покрытие, содержало бы i_0. Поскольку это не так, то существует j_2 такое, что $j_2 \neq j_1$ и $a^{j_2} \leqslant t$. Если теперь определить n-вектор y, положив $y_{j_1} = -1$, $y_{j_2} = 1$ и $y_j = 0$ при $j \neq j_1, j_2$, то будем иметь $Iy = 0$, $Ay = a^{j_2} - a^{j_1} \leqslant 0$ и $a_{i_0} y = -a_{i_0 j_1} < 0$. Последнее означает, что условие (β) не выполняется. Теорема доказана.

Применим полученные результаты к (0,I) - матрицам. В этом случае при рассмотрении t- покрытий можно ограничиться только 0 - покрытиями, т.е. покрытиями, соответствующими вектору $t = 0$, так как любое t - покрытие будет 0- покрытием.

Пусть S - некоторое тупиковое покрытие. Если A обладает свойством (α), то $A(S)$ должна также обладать этим свойством. Очевидно, $\sum_{i \in S} a_{ij} \geqslant 1$ при любом $j \in J_n$.

Предположим, что $\sum_{i \in S} a_{ij} \geqslant 2$ при некотором $j_0 \in J_n$ и $a_{i_1 j_0} = a_{i_2 j_0} = 1$, где $i_1, i_2 \in S$, $i_1 \neq i_2$. Из определения тупикового покрытия следует, что любому $i \in S$ можно сопоставить, вообще говоря неоднозначно, такое $j \in J_n$, что $a_{ij} = 1$ и $a_{kj} = 0$ при $k \in S \setminus \{i\}$. Пусть j_1 и j_2 соответствуют в этом смысле i_1 и i_2, т.е. $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$ и $\sum_{i \in S} a_{ij_1} = \sum_{i \in S} a_{ij_2} = 1$. Определим n - вектор y, полагая $y_{j_0} = -1$, $y_{j_1} = y_{j_2} = 1$ и $y_j = 0$ - в остальных случаях. Тогда $A(S) y \leqslant 0$, $Iy = 1$, и, применяя к $A(S)$ лемму 3, мы получаем, что должен существовать столбец матрицы $A(S)$, все элементы которого не больше нуля. Поскольку таких столбцов в $A(S)$ нет, то для любого $j \in J_n$ должно иметь место равенство $\sum_{i \in S} a_{ij} = 1$.

Полученное соотношение означает, что система подмножеств $\{A_i^{(0)} / i \in S\}$ есть разбиение множества J_n на непересекающиеся подмножества. Справедливо и обратное утверждение, а именно: если $\{A_i^{(0)} / i \in S\}$ - разбиение множества J_n, то матрица $A(S)$ обладает свойством (α).

Таким образом, учитывая лемму 2 и теорему 2, приходим к

следующему утверждению: $(0,1)$ - матрица A обладает свойством (α), а ее подматрица $A(\mathcal{I}_m)$ удовлетворяет при этом условию (β) тогда и только тогда, когда всякое тупиковое покрытие $\{A_i^{(0)} / i \in S\}$, $S \subset \mathcal{I}_m$, является разбиением и каждое множество $A_i^{(0)}$, $i \in \mathcal{I}_m$, входит в некоторое разбиение при $S \subset \mathcal{I}_m$.

Поступила в ред.-изд.отдел
21 марта 1978 г.

Литература.

1. Горбачева О.С. Об одном классе задач выпуклого программирования.- В кн.: Труды 3-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. М., 1970, вып.П. с.246-257.

2. Глебов Н.И. Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1973, вып.II, с. 38-42.

3. Овчинников В.Г. Об одной задаче целочисленного программирования. -"Кибернетика", 1976, № 1, с.131-135.