Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1978 г., выпуск I7,
УДК.519.3

НАХОЖДЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ В ФОРМЕ НЕРАВЕНСТВ И РАВЕНСТВ

И.И.Дикин

Рассматривается система условий:

$$x_j \geqslant \alpha_j, \quad j \in J_1; \quad x_j \leqslant \beta_j, \quad j \in J_2; \qquad /I/$$

$$\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j, \quad j \in J_3; \qquad /2/$$

$$f_i(x) = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad /3/$$

где $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор n -мерного евклидова пространства E_n, $f_i(x)$ - непрерывные функции, α_j, β_j - вещественные числа. Предполагается также, что $\alpha_j < \beta_j$, $j \in J_3$.

Множество точек, которое описывается ограничениями /I/-/3/, обозначим через X.

Пусть $x^* \in X$. Будем говорить, что

$$j \in J_1^*, \text{ если } j \in J_1 \cup J_3, \quad x_j^* = \alpha_j;$$
$$j \in J_2^*, \text{ если } j \in J_2 \cup J_3, \quad x_j^* = \beta_j.$$

Положим $J^* = J_1^* \cup J_2^*$.

О п р е д е л е н и е. Вектор $x^* \in X$ называется локально относительно внутренней точкой множества X, если существует такая окрестность M точки x^*, что для произвольного $x \in M \cap X$ выполняются соотношения

$$x_j = \alpha_j, \quad j \in J_1^*; \quad x_j = \beta_j, \quad j \in J_2^*.$$

При этом точка x^* называется строго относительно внутренней, если для ее координат неравенства /I/,/2/ выполняются как строгие.

Множество локально относительно внутренних точек X обозначим через $ri\,X$. Заметим, что когда A - выпуклое множество, $ri\,A$ - относительная внутренность A.

Т е о р е м а I. Пусть $f_i(x)$ - гладкие функции, $x^* \in X$, градиенты $f_i'(x^*)$ линейно-независимы, существует окрестность точки x^*, не содержащая строго относительно внутренних точек X. Тогда найдутся такие числа $u_1, u_2, \dots, u_m$ и такое непустое множество $\bar{J} = \bar{J}_1 \cup \bar{J}_2$, $\bar{J}_1 \subset J_1^*$, $\bar{J}_2 \subset J_2^*$, что

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} < 0, \quad j \in \bar{J}_1; \qquad /4/$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} > 0, \quad j \in \bar{J}_2; \qquad /5/$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j \notin \bar{J}. \qquad /6/$$

Доказательство. Рассмотрим область $\bar{X}$, которая задается ограничениями /1/,/2/ и условиями

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j}(x_j - x_j^*) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad /7/$$

Пусть

$$\bar{x} \in ri\bar{X}. \qquad /8/$$

Положим

$$\bar{J}_1 = \{ j : j \in J_1 \cup J_3, \ \ \bar{x}_j = \alpha_j \},$$
$$\bar{J}_2 = \{ j : j \in J_2 \cup J_3, \ \ \bar{x}_j = \beta_j \}.$$

Легко видеть, что $\bar{J} \subset J^*$. Покажем, что $\bar{J}$ непусто. В самом деле, предположим, что $\bar{x}$ - строго относительно внутренняя точка $\bar{X}$, и построим такой вектор $x(\lambda)$, что его координаты удовлетворяют /3/ [1, с. 40-41] ,

$$x(\lambda) = x^* + \lambda\rho + r(\lambda), \quad \rho = \bar{x} - x^*,$$
$$\lim_{\lambda \to 0} r_j(\lambda)/\lambda = 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Тогда при малых $\lambda > 0$ $x(\lambda) \in X$, являясь внутренней точкой множества, описываемого условиями /1/,/2/, что противоречит одному из предположений теоремы.

Система условий:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} \rho_j = 0, \quad i = \overline{1,m}; \qquad /9/$$

$$\rho_j \geq 0, \quad j \in \bar{J}_1; \quad \rho_j \leq 0, \quad j \in \bar{J}_2; \qquad /10/$$

$$\sum_{j \in \bar{J}_1} \rho_j - \sum_{j \in \bar{J}_2} \rho_j = 1 \qquad /11/$$

несовместна, так как, предположив, что в /9/-/11/ существует допустимый вектор, мы можем получить противоречие с соотношением /8/. Поэтому по теореме отделимости [2 ,теорема 2.6] существуют такие числа $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m, \vartheta_{m+1}$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \qquad j \notin \bar{J}; \qquad /12/$$

$$\sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} + \vartheta_{m+1} \leq 0, \quad j \in \bar{J}_1; \qquad /13/$$

$$\sum_{i=1}^{m} \vartheta_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} - \vartheta_{m+1} \geq 0, \quad j \in \bar{J}_2; \quad \vartheta_{m+1} > 0. \qquad /14/$$

Полагая в /12/-/14/ $u_i = \vartheta_i$, $i = \overline{1,m}$, получаем условия /4/-/6/, что и требовалось.

С л е д с т в и е 1. Пусть

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = \overline{1,m}, \qquad /15/$$

$x^* \in ri X$. Тогда существуют такие множители $u_1, u_2, \ldots, u_m$, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i < 0, \qquad j \in J_1^*;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i > 0, \qquad j \in J_2^*; \qquad /16/$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = 0, \qquad j \notin J^*.$$

С л е д с т в и е 2. Если вместо последнего условия теоремы 1 предположить, что $x^* \in ri X$, множество J^* непусто, то имеют место соотношения /4/-/6/.

В качестве применения теоремы 1 рассмотрим задачу минимизации гладкой функции $F(x)$ на множестве X, определенном выше. Пусть x^* -точка локального минимума $F(x)$ на X, т.е.

$$F(x^*) \leq F(x), \quad x \in \mathcal{D} \cap X, \qquad /17/$$

$\mathcal{D}$ - окрестность вектора x^*.

Дополним систему ограничений /1/-/3/ условиями

$$F(x) - x_{n+1} = F(x^*), \quad x_{n+1} \geq 0. \qquad /18/$$

Тогда в силу /17/ для векторов $x \in \mathcal{D} \times E_1$, которые удовлетворяют /1/-/3/ и /18/, $x_{n+1} = 0$. Нетрудно убедиться, что в точке $(x^*, 0)$ условия теоремы 1 выполнены, когда градиенты $f_i'(x^*)$ линейно-независимы. Записав в этой точке для системы /1/-/3/, /18/ соотношения /4/-/6/, получим известное правило множителей Лагранжа.

Опишем алгоритм нахождения допустимого вектора системы /1/-/3/.

Пусть X^0 - множество точек, определенное неравенствами /1/-/2/, $x^0 \in int X^0$, $J_4 = J \setminus J_5$, $J_5 = J_1 \cup J_2 \cup J_3$, $J = \{1,2,\ldots,n\}$.

Положим

$$r_i(x^k) = b_i - f_i(x^k), \quad a_{ij}(x^k) = \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j}, \qquad /19/$$

$$\sigma_j(x^k) = \begin{cases} (x_j^k - \alpha_j)^2, & j \in J_1; \\ (\beta_j - x_j^k)^2, & j \in J_2; \\ \dfrac{(x_j^k - \alpha_j)^2(\beta_j - x_j^k)^2}{(x_j^k - \alpha_j)^2 + (\beta_j - x_j^k)^2}, & j \in J_3; \\ N_j > 0, & j \in J_4. \end{cases}$$

На k-й итерации требуется найти

$$\min_u \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x^k)\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}(x^k)u_i\right]^2 - 2\sum_{i=1}^{m} r_i(x^k)u_i \qquad /20/$$

Пусть $u(x^k)$ – некоторое решение задачи /20/.
Положим

$$\delta_j(x^k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(x^k)u_i(x^k), \quad s_j(x^k) = \sigma_j(x^k)\delta_j(x^k),$$

$$\psi(x^k) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x^k)[\delta_j(x^k)]^2.$$

Тогда

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda(x^k)s_j(x^k), \quad j = \overline{1,n}; \qquad /21/$$

$$\lambda(x^k) = \min(1, 1/\sqrt{\psi(x^k)}). \qquad /22/$$

Если

$$\|r(x^k)\| < \varepsilon, \qquad /23/$$

вычисления прекращаются.

Когда множество индексов J_5 пусто (отсутствуют ограничения неравенства), алгоритм /20/–/23/ является одним из вариантов метода Ньютона при $m \leqslant n$.

Если градиенты $f_i'(x^k)$ линейно-независимы, $x^k \in \operatorname{int} X^0$, $i \in I_i$, то задача /20/ имеет единственное решение.

Приравняв у минимизируемой функции частные производные по u_i нулю, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^k)s_j(x^k) = r_i(x^k), \quad i = \overline{1,m}. \qquad /24/$$

Из /24/ следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(x^k)u_i(x^k) = \psi(x^k). \qquad /25/$$

Равенства /24/-/25/ можно использовать для контроля вычислений.

Алгоритм /20/-/23/ применяется нами для поиска начального приближения при решении некоторых задач математического программирования методом внутренних точек [3] .

Теперь рассмотрим непрерывный аналог метода /20/-/23/:

$$\frac{dx_j}{dt} = s_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \qquad /26/$$

$$x(0) = x^0 . \qquad /27/$$

Покажем, что

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = -r_i(t), \qquad /28/$$

если существует вектор $u[x(t)]$. Здесь $r_i(t) = b_i - f_i[x(t)]$, $x(t)$ - решение системы дифференциальных уравнений /26/-/27/.

В самом деле,

$$-\frac{dr_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i[x(t)]}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i[x(t)]}{\partial x_j} s_j[x(t)]. \qquad /29/$$

Откуда на основании /19/,/24/ получаем соотношения /28/.

Из /28/ имеем

$$r(t) = r^0 e^{-t} . \qquad /30/$$

В силу /30/ вектор $s(x)$ есть направление убывания нормы невязки $r(x)$. Поэтому при реализации алгоритма /20/-/23/ можно использовать регулировку шага, благодаря которой $\|r(x^{k+1})\| < \|r(x^k)\|$ (см.,например, [I, с. 250]).

Некоторое представление о качественной картине сходимости процессов /20/-/23/ и /26/, /27/ дает следующая

Т е о р е м а 2. Пусть для функций $f_i(x)$ имеет место представление /15/, система /1/-/3/ совместна, $x^0 \in int X^0$

Тогда

$$x(t) \to \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in ri X . \qquad /31/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что

$$x(t) \in int X^0, \quad t \geq 0 . \qquad /32/$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{j\in J_1}\left[ln(x_j - \alpha_j) + \frac{\bar{x}_j - \alpha_j}{x_j - \alpha_j}\right] + \sum_{j \in J_2}\left[ln(\beta_j - x_j) + \frac{\beta_j - \bar{x}_j}{\beta_j - x_j}\right] +$$

$$+ \sum_{j\in J_3}\left[ln(x_j - \alpha_j)(\beta_j - x_j) + \frac{\bar{x}_j - \alpha_j}{x_j - \alpha_j} + \frac{\beta_j - \bar{x}_j}{\beta_j - x_j}\right] + \sum_{j\in J_4}\frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{2N_j}, \qquad /33/$$

где

$$\bar{x} = \varepsilon x^{\circ} + (1-\varepsilon) x^{*}, \quad 0<\varepsilon<1, \quad x^{*} \in riX. \qquad /34/$$

Очевидно, что $\bar{x}$ - внутренняя точка множества X° . Поэтому

$$g(x) \geqslant g(\bar{x}) > -\infty, \quad x \in X^{\circ}. \qquad /35/$$

Имеем

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\delta_j(x)}, \quad j \in \mathcal{J}. \qquad /36/$$

Положим

$$g[x(t)] = g(t), \quad u_i[x(t)] = u_i(t), \quad \Psi[x(t)] = \Psi(t).$$

На основании /36/ и определения вектора $\delta(x)$ имеем

$$\dot{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} [x_j(t) - \bar{x}_j] \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(t). \qquad /37/$$

В силу /34/,/37/

$$\dot{g}(t) = \sum_{j=1}^{n} [x_j(t) - x_j^{*} + \varepsilon(x_j^{*} - x_j^{\circ})] \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} z_i(t) u_i(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} z_i(0) u_i(t).$$

Теперь в силу /25/, /30/ имеем

$$\dot{g}(t) = \Psi(t)(-1 + \varepsilon e^{t}). \qquad /38/$$

Из /38/ видно, что для произвольного $T>0$ в /34/ можно подобрать такое ε , что

$$\dot{g}(t) < 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad /39/$$

Из формул /39/,/35/ следует, что каждое слагаемое в представлении функции $g(t)$ ограничено при $0 \leqslant t \leqslant T$, поэтому справедливо условие /32/.

Воспользовавшись соотношениями /30/,/32/, получаем

$$z_i(t) \longrightarrow 0, \quad i = \overline{1,m}; \qquad /40/$$

$$\rho(x(t), X) \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty. \qquad /41/$$

Если размерность X не равна нулю, то введем функцию

$$z(t) = \sum_{j \in \mathcal{J}_1} \frac{x_j^{*} - y_j}{x_j(t) - \alpha_j} + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \frac{y_j - x_j^{*}}{\beta_j - x_j(t)} +$$
$$+ \sum_{j \in \mathcal{J}_3} \left(\frac{x_j^{*} - y_j}{x_j(t) - \alpha_j} + \frac{y_j - x_j^{*}}{\beta_j - x_j(t)} \right) + \sum_{j \in \mathcal{J}_4} \frac{x_j(t)(y_j - x_j^{*})}{N_j}, \qquad /42/$$

где $y \in X$. Имеем

$$\dot{z}(t) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j^*) \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} u_i(t) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (y_j - x_j^*) = 0 .$$

Поэтому

$$z(t) = z(0). \qquad /43/$$

Теперь соотношения /4I/-/43/ с помощью рассуждений, аналогичных изложенным в [4], позволяют получить условие /3I/, что и требовалось.

Так же, как и в [5], для $\rho \geqslant 1$ можно рассмотреть такое семейство непрерывных процессов, что при $\rho = 2$ получаем алгоритм /26/,/27/. При этом для $\rho > 2$ схема доказательства теоремы 2 аналогична приведенной здесь, если $1 \leqslant \rho < 2$, то условие /3I/ устанавливается проще.

Поступила в ред.-изд.отдел
27 января I976 г.

Л и т е р а т у р а

I. Пшеничный Б.Н.,Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах, М.,"Наука", I975.

2. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей, М.,ИЛ., I963.

3. Дикин И.И. Исследование задач оптимального программирования методом внутренних точек. - В сб."Методы оптимизации" (Прикладная математика), Иркутск, I975, с.72-I08.

4. Дикин И.И. О непрерывных аналогах метода внутренних точек. - В кн.:Управляемые системы, Новосибирск, I97I, вып.9, с.59-64.

5. Дикин И.И. О сходимости семейства непрерывных градиентных процессов метода внутренних точек. - В кн.: Тезисы Ш Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, I974, с.80-8I.