Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1978 г. выпуск I7.
УДК.519.I

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОБХОДАХ В ГРАФАХ

А.И.Сердюков

I. Пусть задан n -вершинный неориентированный граф $G=(X,U)$, ребрам которого приписаны веса ρ_{ij}, $u_{ij}\in U$, $1\leq i, j\leq n$, где ρ_{ij} -вещественные положительные числа. Пусть также задано некоторое вещественное k, $k\geq 1$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество гамильтоновых циклов в графе G, а через $\mathcal{M}$ -множество циклов, каждый из которых содержит все вершины графа G. Рассмотрим две экстремальных задачи.

<u>Задача А.</u> Требуется указать элемент $L^*\in\mathcal{L}$, обладающий свойством:

$$\rho(L^*)=\sum_{u_{ij}\in L^*}\rho_{ij}\leq k\cdot\min_{L\in\mathcal{L}}\rho(L).$$

Заметим, что при $k=1$ задача А есть не что иное, как задача коммивояжера.

<u>Задача Б</u>. Требуется указать элемент $M^*\in\mathcal{M}$, обладающий свойством:

$$\rho(M^*)=\sum_{u_{ij}\in M^*}\rho_{ij}\leq k\cdot\min_{M\in\mathcal{M}}\rho(M)$$

(здесь учитывается кратность вхождения любого ребра в соответствующий цикл).

При $k=1$ задачи А и Б относятся к числу полиномиально полных проблем [I]. Более того, как показано в работе [2], задача А является полиномиально полной проблемой при любом вещественном $k\geq 1$. В работе [3] приводится алгоритм степенной трудоемкости для задачи А при $k=2$ в классе полных неориентированных графов, веса ребер которых удовлетворяют неравенству треугольника.

В настоящей работе для задачи А при $k=3/2$ в этом же классе графов строится алгоритм, трудоемкость которого $O(n^3\ln n)$ операций. Далее показывается, что построенный алгоритм применим для задачи Б при $k=3/2$ в произвольном графе.

Все термины, относящиеся к теории графов и используемые в настоящей работе, можно найти в [4].

2. Предположим, что для весов ребер в полном n -вершинном неориентированном графе G выполнено неравенство треугольника:

$$\rho_{ij}\leq\rho_{ik}+\rho_{kj},\quad 1\leq i,j,k\leq n. \qquad /I/$$

Введем необходимые обозначения:

L_0 - минимальный гамильтонов цикл в графе G ;

M_0 - кратчайший цикл, содержащий все вершины графа G ;

$\mathcal{D}_0$ - кратчайшее связывающее дерево в графе G ;

X_1 ($X_1 \subseteq X$) - множество вершин нечетной степени в дереве $\mathcal{D}_0$:

$\bar{G}=(X_1, \bar{\mathcal{U}})$ - полный подграф графа G с множеством вершин X_1 ;

$\bar{L}_0$ - минимальный гамильтонов цикл в графе $\bar{G}$;

w_0 - минимальное совершенное паросочетание в графе $\bar{G}$.

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а I. Каковы бы ни были веса ребер исходного графа G , удовлетворяющие /I/, всегда выполнены соотношения:

$$\rho(L_0) = \rho(M_0), \qquad /2/$$

$$\rho(L_0) \geq \rho(\bar{L}_0), \qquad /3/$$

$$\rho(w_0) \leq 1/2\, \rho(\bar{L}_0). \qquad /4/$$

Доказательство равенства /2/ можно найти в [5] (см.лемму I). Справедливость неравенства /4/ вытекает из того, что в графе $\bar{G}$ четное число вершин (так как мощность множества вершин нечетной степени в графе четна [4])и гамильтонов цикл можно разбить на два совершенных паросочетания, не пересекающихся по ребрам. Докажем неравенство /3/. Для этого представим гамильтонов цикл L_0 в виде последовательности вершин:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1\}. \qquad /5/$$

Если $X_1 = X$, то неравенство /3/ доказано. Пусть $X_1 \subset X$. В этом случае должны существовать вершины $x_i \in X_1$, $x_j \in X_1$, $i<j-1$,такие что $x_{i+s} \notin X_1$, $1 \leq s < j-i$. Тогда, заменив цепь между вершинами i и j в гамильтоновом цикле L_0 на ребро u_{ij} , получим некоторый элементарный цикл, проходящий через все вершины множества X_1 с весом, не большим $\rho(L_0)$. Это возможно сделать в силу того, что граф G полный и выполнены неравенства /I/.Проделав этот процесс одновременно для всех пар таких вершин последовательности /5/, получим некоторый гамильтонов цикл в графе $\bar{G}$ с весом, не большим $\rho(L_0)$. Теорема I доказана.

3. Перейдем к описанию алгоритма для задачи А в классе полных неориентированных взвешенных графов,веса ребер которых удовлетворяют /I/. Алгоритм состоит из пяти этапов.

<u>Первый этап</u>. В графе G отыскивается кратчайшее связывающее дерево $\mathcal{D}_0$. Для нахождения такого дерева можно использовать алгоритм Прима [6], трудоемкость которого $O(n^2)$ операций.

<u>Второй этап.</u> В дереве $\mathcal{D}_0$ отыскиваются все вершины нечетной степени, которые образуют множество $X_1 \subseteq X$. Далее строится подграф $\bar{G}=(X_1, \bar{\mathcal{U}})$, описанный выше.

<u>Третий этап.</u> В графе $\bar{G}$ отыскивается совершенное паросоче-

тание w_0 . Чтобы найти такое паросочетание, можно использовать алгоритм, описанный в [7], трудоемкость которого $O(n^3 \ln n)$ операций. (На самом деле в работе [7] решается задача нахождения паросочетания максимального веса в графе. Чтобы свести задачу нахождения минимального совершенного паросочетания в графе $\bar{G}$ к этой задаче, достаточно ребрам графа $\bar{G}$ приписать новые веса: $\rho^*_{ij} = 2a - \rho_{ij}$, $\bar{u}_{ij} \in \bar{\mathcal{U}}$, где $a = \max\limits_{\bar{u}_{ij} \in \bar{\mathcal{U}}} \rho_{ij}$.) Заметим, что множество ребер $\mathcal{D}_0 \bigcup w_0$ образует эйлеров граф (здесь учитывается кратность ребер, которая возникает при условии $\mathcal{D}_0 \bigcap w_0 \neq \emptyset$) .

<u>Четвертый этап.</u> Задается эйлеров обход всех ребер графа $\mathcal{D}_0 \bigcup w_0$ при помощи алгоритма, изложенного в [4] .

<u>Пятый этап.</u> Представим эйлеров обход ребер множества $\mathcal{D}_0 \bigcup w_0$ в виде последовательности вершин:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_1, x_k, \ldots, x_1\} . \qquad /6/$$

Если в этой последовательности нет повторяющихся вершин, то $\mathcal{D}_0 \bigcup w_0$ является гамильтоновым циклом. Тогда положим $L^* = \mathcal{D}_0 \bigcup w_0$. В этом случае алгоритм закончил свою работу. Предположим, что некоторая вершина (без потери общности) x_1 повторена в последовательности /6/. Тогда преобразуем /6/ в цикл $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_1\}$, не увеличивая его веса. Это возможно проделать в силу того, что граф G полный и для весов его ребер выполнены неравенства /I/. Проделав этот процесс одновременно для каждой вершины графа G столько раз, сколько она повторена в последовательности /6/, получим некоторый гамильтонов цикл L_1. Положим $L^* = L_1$. Алгоритм описан полностью.

Т е о р е м а 2. Вес гамильтонова цикла L^* , полученного при помощи описанного алгоритма, в графе G удовлетворяет следующему неравенству:

$$\rho(L^*) < 3/2\, \rho(L_0) . \qquad /7/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что $\rho(L^*) \leq \rho(\mathcal{D}_0) + \rho(w_0) < \rho(L_0) + \rho(w_0)$, и воспользоваться теоремой I.

4. Рассмотрим теперь задачу Б на произвольном связном графе $\tilde{G} = (X, \tilde{\mathcal{U}})$, ребрам которого приписаны веса $\tilde{\rho}_{ij}$, $\tilde{u}_{ij} \in \tilde{\mathcal{U}}$, $1 \leq i, j \leq n$, где $\tilde{\rho}_{ij}$ - вещественные положительные числа. Построим для графа $\tilde{G}$ граф кратчайших расстояний $G = (X, \mathcal{U})$, который является полным и для весов ребер которого выполнены неравенства /I/ (см. [5]). Обозначим через $\tilde{M}_0$ кратчайший цикл, содержащий все вершины графа $\tilde{G}$. Тогда имеет место следующее равенство [5] :

$$\tilde{\rho}(\tilde{M}_0) = \rho(L_0) . \qquad /8/$$

Путем замены каждого ребра $u_{ij} \in L^*$ кратчайшей цепью между вершинами i и j в графе $\tilde{G}$ найдем некоторый цикл $\tilde{M}^*$, содержащий все вершины графа $\tilde{G}$, с весом, равным $\rho(L^*)$. Далее, учитывая /7/,/8/, получим следующее неравенство:

$$\tilde{\rho}(\tilde{M}^*) < 3/2\,\tilde{\rho}(\tilde{M}_0).$$

Последнее неравенство означает, что цикл $\tilde{M}^*$ можно взять в качестве решения задачи Б на графе $\tilde{G}$.

При оценке трудоемкости алгоритма достаточно заметить, что на каждом из пяти этапов его работы требуется не более $Cn^3 \ln n$ операций. Все дальнейшие вычисления, связанные с нахождением решения задачи Б, осуществляются при помощи алгоритма Дийкстра [8] за $O(n^3)$ операций. Таким образом, количество операций, требуемое при реализации описанных алгоритмов, пропорционально $n^3 \ln n$.

Поступила в ред.-изд.отдел.
27 января 1976 г.

Литература

1. Карп Р.М. Сложность решения экстремальных комбинаторных проблем.-"Кибернетический сборник",вып.12,М.,"Мир",1975, с.

2. Sahni S. and Gonzales T. P - Complete Approximation Problems.-"Journal of Association for Computing Machinery, July 1976, N° 3, v. 23, pp. 555-565.

3. Rosenkrantz D.J., Stearns R.E. and Lewis P.M. Approximate algorithms for the travelling salesperson problem. 15th Annual IEEE Symp. on Switching and Automata Theory, 1974, pp. 33-42.

4. Берж К. Теория графов и ее приложение.М.,ИЛ,1962.

5. Сердюков А.И. О взаимной сводимости некоторых экстремальных задач теории графов.-В кн.:Управляемые системы,вып.15.Новосибирск, 1976,с.68-73.

6. Прим Р.М. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения.-"Кибернетический сборник", вып.2,М.,"Мир",1961.

7. Карзанов А.В. Экономные реализации алгоритмов Эдмондса для нахождения паросочетаний максимальной мощности (максимального веса). - В кн.: Исследование по дискретной оптимизации. М.,"Мир",1976, с.306-327.

8. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.,"Мир", 1974.