Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1978 г., выпуск 17.
УДК.519.1

# О ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПРЕТОВ

А.И.Сердюков

Пусть задан $n$-вершинный неориентированный (ориентированный) граф $G=(X,U)$, ребрам (дугам) которого приписаны веса $d(u)$, где $d(u)$ -вещественные положительные числа. Пусть также задана система подмножеств $X^i \subseteq X$, $|X^i| \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для некоторого натурального $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество взаимно-однозначных отображений из $X_n = \{1,2,3,\dots,n\}$ в $X$ таких, что $f(i) \in X^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для любого $f \in \mathcal{F}$. Задача состоит в выборе такого отображения $f_0 \in \mathcal{F}$, для которого

$$d(f_0) = \sum_{i=1}^{n} d(f_0(i), f_0(j)) = \min_{f \in \mathcal{F}} d(f), \qquad /1/$$

$$j \equiv i+1 \ (\mathrm{mod}\, n).$$

При $|X^i| = n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, задача /1/ совпадает с классической задачей коммивояжера и, следовательно, при $k=n$ относится к числу полиноминально полных (или $NP$ -полных) проблем /1/. При $k=1$ задача /1/ тривиальна в том смысле, что искомое отображение определяется либо однозначно, либо задача неразрешима. Заметим также, что если при некотором $k=k_1$ задача /1/ является $NP$ -полной проблемой, то она остается таковой при всех $k \geqslant k_1$. Возникает вопрос: при каком наименьшем $k$ задача /1/ все еще остается $NP$ -полной проблемой?

В настоящей работе установлено, что при $k=2$ задача /1/ является $NP$ -полной проблемой. Вместе с этим изучается верхняя оценка мощности множества $\mathcal{F}$ для различных наборов подмножеств $X^i \subseteq X$, $1 \leqslant i \leqslant n$, при $k=2$. Оказывается, что для "почти всех" наборов $X^i \subset X$, $|X^i| \leqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обладающих свойством $\mathcal{F} \neq \emptyset$, мощность множества $\mathcal{F}$ не превышает $n$. (На самом деле легко установить, что для "почти всех" наборов $X^i \subset X$, $|X^i| \leqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, множество $\mathcal{F}$ пусто и для проверки выполнения этого свойства каждой конкретной задачи требуется $O(n^2)$ элементарных операций.)

Все термины, относящиеся к теории графов и используемые в настоящей работе, можно найти в /2/.

## § 1. Оценка мощности множества $\mathcal{F}$ при $k=2$

Для простоты положим $X = X_n$. Рассмотрим двудольный граф $\bar{G} = (X, X, \bar{U})$ с равными долями вершин $X$ и множеством ребер

$\overline{U}=\{\overline{u}_{ij}\,/\,j\in X^i\}$ . Заметим, что между множествами $\mathcal{F}$ и $W$ (множество совершенных паросочетаний в графе $\overline{G}$) существует взаимно-однозначное соответствие. Действительно, всякому элементу $\{\overline{u}_{1i_1}, \overline{u}_{2i_2}, \dots, \overline{u}_{ni_n}\}\in W$ можно сопоставить элемент $f\in\mathcal{F}: f(j)=i_j$, $1\leq j\leq n$ , и наоборот. Будем предполагать в дальнейшем, что $\mathcal{F}\neq\phi$. Введем необходимые понятия.

Ребро $\overline{u}_{ij}\in\overline{U}$ назовем особым, если $\overline{u}_{ij}$ принадлежит любому совершенному паросочетанию в графе $\overline{G}$ . Помеченной вершиной будем называть любую вершину в графе $\overline{G}$ , инцидентную особому ребру. Под блоком в графе $\overline{G}$ будем понимать блок, определенный в [3, с.41] , который содержит не менее двух ребер. Заметим, что в каждом блоке графа $\overline{G}$ степень любой вершины равна двум, иначе $\mathcal{F}=\phi$ . В силу вышесказанного, каждый блок имеет ровно два максимальных паросочетания, и любое паросочетание $w\in W$ можно разбить на особые ребра и максимальные паросочетания в блоках. Обратно, любой набор максимальных паросочетаний (по одному из каждого блока) и множество особых ребер в совокупности образуют совершенное паросочетание в графе $\overline{G}$ . Таким образом, любое совершенное паросочетание $w\in W$ полностью определяется совокупностью максимальных паросочетаний (по одному из каждого блока) , и наоборот. Итак, нами доказана

Л е м м а I. $|\mathcal{F}|=|W|=2^{q(\overline{G})}$ , $q(\overline{G})$ – число блоков в графе $\overline{G}$.

Легко привести пример графа $\overline{G}$ с числом блоков $q(\overline{G})=\left[\frac{n}{2}\right]$ , где $\left[\frac{n}{2}\right]$ - целая часть числа $\frac{n}{2}$ . Однако можно показать, что для "почти всех" графов $\overline{G}$ справедливо неравенство $q(\overline{G})\leq 1{,}1\ln n$ . Используя этот результат, для решения задачи /I/ при $k=2$ можно построить алгоритм, основанный на переборе всех элементов множества $W$ , трудоемкость которого "почти всегда" $O(n^2)$ операций

О п р е д е л е н и е Граф $\overline{G}$ назовем "хорошим", если $q(\overline{G})\leq 1{,}1\ln n$ , и "плохим"–в противном случае.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}_n$ множество хороших графов, $\widetilde{\mathfrak{A}}_n$ -множество плохих графов. Положим $\mathfrak{A}_n=\overline{\mathfrak{A}}_n\bigcup\widetilde{\mathfrak{A}}_n$. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а I. $$|\overline{\mathfrak{A}}_n|/|\mathfrak{A}_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad /2/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случайную подстановку $s$ , выбираемую равновероятным образом из $S_n$ . Пусть $\xi(s)$ - число циклов в подстановке $s$ . Известно [5, с.264] , что математическое ожидание $M_\xi$ случайной величины $\xi$ равно $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ , а дисперсия $\mathcal{D}_\xi$ равна $\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{i^2}$ . Обозначим через $\overline{S}_n$ множество подстановок из $S_n$ с числом циклов, не превосходящим $1{,}1\ln n$ . Тогда, согласно неравенству Чебышева [5,с.239] , справедливо соотношение:

$$|\bar{S}_n| / |S_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \qquad /3/$$

Теперь пусть $S'_n$ - множество подстановок из $S_n$, не содержащих циклов единичной длины. Используя принцип включения и исключения [4, с.64], получаем:

$$|S_n \setminus S'_n| = |\bigcup_{1\le i\le n} S_n^{(i)}| = \sum_{i=1}^{n} |S_n^{(i)}| - \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}} |S_n^{(i)} \cap S_n^{(j)}| +$$

$$+ \sum_{\substack{1\le i,j,k\le n\\ i\ne j,\ i\ne k,\ j\ne k}} |S_n^{(i)} \cap S_n^{(j)} \cap S_n^{(k)}| - \dots = n! - C_n^2 \cdot (n-2)! +$$

$$+ C_n^3 \cdot (n-3)! - \dots \le \frac{n!}{2} + \frac{n!}{6} = 2/3 n! = 2/3 |S_n|,$$

где $S_n^{(i)}$ - множество подстановок из $S_n$, содержащих единичный цикл с элементом $i$, $1\le i\le n$. Или, что то же самое,

$$|S'_n| \ge 1/3 |S_n|. \qquad /4/$$

Далее, учитывая /3/,/4/, получаем

$$|\bar{S}'_n| / |S'_n| = 1 - \frac{|S'_n \setminus \bar{S}'_n|}{|S'_n|} \ge 1 - \frac{3|S'_n \setminus \bar{S}'_n|}{|S_n|} \ge 1 - \frac{3|S_n \setminus \bar{S}_n|}{|S_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \qquad /5/$$

где $\bar{S}'_n = S'_n \cap \bar{S}_n$.

Поставим в соответствие произвольной подстановке $s \in S'_\ell$, $\ell \le n$, множество двудольных графов $\mathfrak{A}_n(s) \subset \mathfrak{A}_n$ следующим образом. Выделим произвольные $n-\ell$ ребер в качестве особых. Непомеченные вершины $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} \subset X_n$ первой доли разобьем на $\xi(s)$ блоков, где $\xi(s)$ - число циклов в подстановке $s$, таким образом, чтобы вершины с номерами $\{j_{t_1}, j_{t_2}, \dots, j_{t_r}\}$, $2\le r\le \ell$, принадлежали одному блоку в том и только том случае, когда элементы $(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, t_r)$ составляют цикл в подстановке $s$. В этом случае потребуем, чтобы для любой пары вершин $j_{t_p}, j_{t_{p+1}}$ существовала смежная с ними вершина данного блока из второй доли графа, $1\le p\le r$, $j_{t_{r+1}} = j_{t_1}$. Далее, кроме особых ребер и блоков, в графах из класса $\mathfrak{A}_n(s)$ допускаются и другие ребра, инцидентные выделенным вершинам первой доли, с тем условием, чтобы они не приводили к образованию новых блоков и степень любой вершины первой доли не превосходила двух. Тогда количество различных графов из класса $\mathfrak{A}_n(s)$, $s \in S'_\ell$, $\ell \le n$, выражается при помощи следующего соотношения:

$$|\mathfrak{A}_n(s)| = C_n^\ell \frac{n!}{2^{\xi_1(s)}} h(n,\ell), \qquad /6/$$

где $\xi_1(s)$ - количество циклов длины 2 в подстановке $s$, а функция $h(n,\ell)$ зависит только от $n$ и $\ell$. Пусть $s = c_1, c_2, \dots, c_{\xi(s)}$ - подстановка из множества $S'_\ell$, представленная в виде циклов $c_i$,

$1\leqslant i\leqslant \xi(s)$, и $c_j$ - произвольный цикл подстановки $s$, содержащий не менее трех элементов, $1\leqslant j\leqslant \xi(s)$. Преобразуем подстановку $s$ в $s_1$:

$$s_1 = c_1 c_2 \dots c_{j-1} c_j^{-1} c_{j+1} \dots c_{\xi(s)} \qquad /7/$$

путем замены цикла $c_j$ на обратный. В этом случае подстановка $s_1$ порождает то же самое множество графов из классов $\mathfrak{A}_n$, что подстановка $s$. Таким образом, для любых двух подстановок $s_1$ и $s_2$ из $S'_\ell$, $\ell\leqslant n$, порождаемые ими множества графов из класса $\mathfrak{A}_n$ совпадают, если одну подстановку можно получить из другой путем применения нескольких преобразований вида /7/, и не пересекаются - в противном случае. Заметим также, что $\mathfrak{A}_n(s_1)\bigcap\mathfrak{A}_n(s_2)=\emptyset$, если $s_1\in S'_{\ell_1}$, $s_2\in S'_{\ell_2}$, $\ell_1\neq\ell_2$. С учетом вышесказанного имеем:

$$|\bar{\mathfrak{A}}_n| \geqslant \sum_{2\leqslant \ell\leqslant n}\ \sum_{s\in \bar{S}'_\ell} C_n^\ell\, \frac{n!}{2^{1,1\ell n\ell}}\cdot h(n,\ell) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{2\leqslant \ell\leqslant n} |\bar{S}'_\ell|\cdot C_n^\ell \frac{n!}{2^{1,1\ell n\ell}} h(n,\ell) \geqslant \sum_{\ell=[1,1\ell n n]}^{n} |\bar{S}'_\ell|\cdot C_n^\ell \frac{n!}{2^{1,1\ell n\ell}} h(n,\ell), \qquad /8/$$

$$|\tilde{\mathfrak{A}}_n| \leqslant \sum_{\ell=[1,1\ell n n]}^{n} |\tilde{S}'_\ell|\cdot C_n^\ell \frac{n!}{2^{1,1\ell n\ell}} h(n,\ell), \qquad /9/$$

где $\tilde{S}'_\ell = S'_\ell \setminus \bar{S}'_\ell$, $[1,1\ell n n]$ - целая часть числа $1,1\ell n n$. Теперь, полагая $\psi(n)=\max\limits_{[1,1\ell n n]\leqslant \ell\leqslant n} |\tilde{S}'_\ell|/|\bar{S}'_\ell|$ и учитывая /5/,/8/,/9/, получаем

$$|\tilde{\mathfrak{A}}_n|/|\bar{\mathfrak{A}}_n| \leqslant \psi(n), \qquad /10/$$

где $\psi(n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Далее справедливость теоремы I следует из /10/. Теорема доказана.

## § 2. Сложность решения исходной задачи

Рассмотрим $m$-вершинный $(m=2\ell)$ неориентированный граф $H_m=(X_m,\hat{\mathfrak{U}})$ с множеством вершин $X_m=\{1,2,3,\dots,m\}$ и множеством ребер $\hat{\mathfrak{U}}=\{\hat{u}_{ij},\ i\neq j+\ell,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant m\}$. Пусть каждому ребру $\hat{u}_{ij}\in\hat{\mathfrak{U}}$ приписан вес $\hat{\rho}_{ij}$, где $\hat{\rho}_{ij}$ - вещественные числа. Требуется в графе $H_m$ выделить максимальную клику с минимальным весом. Сформулированную задачу назовем задачей $\mathcal{A}$. Справедлива следующая

Л е м м а 2. Задача $\mathcal{A}$ - полиноминально полная проблема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно /I/, что задача отыскания максимальной клики в графе относится к числу полиноминально полных проблем. Рассмотрим $\ell$ - вершинный неориентированный граф $\tilde{G}_\ell=(X_\ell,\tilde{\mathfrak{U}})$. Пусть ребрам графа $H_m$ приписаны веса

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{cases} \ell^4, & \text{если } 1\leqslant i,\ j\leqslant \ell,\ \tilde{u}_{ij}\notin\tilde{\mathfrak{U}}, \\ 1, & \text{если } 1\leqslant i,\ j\leqslant \ell,\ \tilde{u}_{ij}\in\tilde{\mathfrak{U}}, \\ \ell^2 & \text{- в противном случае.}\end{cases} \qquad /11/$$

В этом случае, как нетрудно заметить, клика мощности $\ell$ в графе $H_m$ оптимальна тогда и только тогда, когда множество входящих в нее вершин, номера которых не превосходят $\ell$, образует максимальную клику в графе $\tilde{G}_\ell$. Таким образом, для нахождения максимальной клики в графе $\tilde{G}_\ell$ достаточно знать оптимальное решение задачи $\mathcal{A}$ в графе $H_m$, веса ребер которого удовлетворяют /II/. Лемма 2 доказана.

Отметим, что вышеприведенные рассуждения при доказательстве леммы 2 справедливы и в случае, когда ребрам графа $H_m$ приписаны веса:

$$\hat{\rho}_{ij} = \begin{cases} \ell^2, & \text{если } 1 \leqslant i,\ j \leqslant \ell,\ \tilde{u}_{ij} \notin \tilde{\mathcal{U}}, \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant i,\ j \leqslant \ell,\ \tilde{u}_{ij} \in \tilde{\mathcal{U}}, \\ \ell & \text{– в противном случае.} \end{cases} \qquad /12/$$

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Задача /I/ при $k=2$ – полиноминально полная проблема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорему будем доказывать для ориентированного случая (ориентированных графов), поскольку ориентированный случай легко сводится к неориентированному путем замены каждой вершины тремя вершинами [I]и заданием соответствующей системы подмножеств $X^i$, $1 \leqslant i \leqslant 3n$.

Построим полный $n$-вершинный $(n = 2C_\ell^2)$ ориентированный граф $G=(X,\mathcal{U})$ с множеством вершин $X=\{(i,j)/1 \leqslant i \leqslant \ell-1, 1 \leqslant j \leqslant \ell\}$. Перенумеруем вершины графа $G$ натуральными числами от I до $n=|X|=2C_\ell^2$ при помощи отображения $g : X \longrightarrow N$:

$$g(i,j) = \begin{cases} 2i+(j-1)(j-2), & 1 \leqslant i < j \leqslant \ell, \\ i(i-1)+2j-1, & 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant \ell-1. \end{cases} \qquad /13/$$

Заметим, что отображение $g$ взаимно-однозначное. Система подмножеств $X^i \subset X$, $|X^i|=2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, задается следующим образом:

$$X^i=\{(p,t),(r,t) \in X/i = g(p,t), \quad r \equiv p+1\,(mod(\ell-1))\}. \qquad /14/$$

Припишем каждой дуге $u \in \mathcal{U}$ графа $G$ вес $d(u)$:

$$d[(k_1,t_1),(k_2,t_2)] = \begin{cases} \hat{\rho}_{t_1,t_2}, & 1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \ell,\ k_2=t_1, \quad k_1+1=t_2, \\ \hat{\rho}_{t_1+\ell,t_2}, & 1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \ell,\ k_2=t_1, \quad k_1 \equiv t_2 (mod\,\ell-1), \\ \hat{\rho}_{t_1,t_2+\ell}, & 1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \ell,\ k_2-1 \equiv t_2 (mod\,\ell-1),\ k_1+1=t_2, \\ \hat{\rho}_{t_1+\ell,t_2+\ell}, & 1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \ell,\ k_2-1 \equiv t_2 (mod\,\ell-1),\ k_1 \equiv t_2 (mod\,\ell-1), \\ 0 & \text{– в остальных случаях,} \end{cases} \qquad /15/$$

где $\hat{\rho}_{ij}$ – вес ребра $\hat{u}_{ij} \in \hat{\mathcal{U}}$ в графе $H_m$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество клик мощности $\ell$ в графе $H_m$. Между множествами $\mathcal{K}$ и $\mathcal{Y}$ легко установить взаимно-однозначное соответствие. Действительно, учитывая /I4/, каждой клике

$\{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\} \in \mathcal{K}$, $i_j \equiv j (mod\, \ell)$ можно поставить в соответствие отображение $f : X_n \longrightarrow X$ :

$$f(g(\kappa,t)) = \begin{cases} (\kappa,t), & \text{если } i_t = t,\ 1 \leqslant \kappa \leqslant \ell-1,\ 1 \leqslant t \leqslant \ell, \\ (\kappa_1,t), \text{ где } \kappa_1 - 1 \equiv \kappa (mod\, \ell-1), & \text{если } i_t = t-\ell,\ 1 \leqslant \kappa \leqslant \ell-1,\ 1 \leqslant t \leqslant \ell, \end{cases} \qquad /16/$$

которое принадлежит множеству $\mathcal{Y}$, и наоборот. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \mathcal{Y}$ и соответствующую ему клику $K \in \mathcal{K}$. Нам понадобится следующая

Л е м м а 3. $$\hat{\rho}(K) = \sum_{\{i_p, i_r\} \subset K} \hat{\rho}_{i_p i_r} = d(f). \qquad /17/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим две произвольные вершины $\{i_p, i_r\} \subset K$ в графе $\hat{H}_m$. Пусть $p < r$. Используя /15/, выразим вес ребра $\hat{u}_{i_p i_r} \in \hat{\mathcal{U}}$ через вес соответствующей дуги в графе $G$ :

$$\hat{\rho}_{i_p i_r} = \begin{cases} \hat{\rho}_{pr} = d[(r-1,p),(p,r)], & \text{если } i_p = p, \quad i_r = r, \\ \hat{\rho}_{p+\ell,r} = d[(\alpha_1,p),(p,r)], & \text{если } i_p = p+\ell, \quad i_r = r, \\ \hat{\rho}_{p,r+\ell} = d[(r-1,p),(\beta_1,r)], & \text{если } i_p = p, \quad i_r = r+\ell, \\ \hat{\rho}_{p+\ell,r+\ell} = d[(\alpha_1,p),(\beta_1,r)], & \text{если } i_p = p+\ell, \quad i_r = r+\ell, \\ \text{где } \alpha_1 \equiv r (mod\, \ell-1), \quad \beta_1 \equiv p+1 (mod\, \ell-1). \end{cases} \qquad /18/$$

Из /18/, /16/ получим

$$\hat{\rho}_{i_p i_r} = d[f \circ g(r-1,p), f \circ g(p,r)],$$

откуда с учетом /13/

$$\hat{\rho}_{i_p i_r} = d[f((r-1)(r-2)+2p-1), f((r-1)(r-2)+2p)].$$

Таким образом, каждой паре вершин $\{i_p, i_r\} \subset K$ однозначно соответствует натуральное $j = j(p,r) = (r-1)(r-2)+2p-1 \equiv 1 (mod\, 2)$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ (и наоборот) такое, что

$$\hat{\rho}_{i_p i_r} = d[f(j), f(j+1)],$$

следовательно,

$$\hat{\rho}(K) = \sum_{\{i_p, i_r\} \subset K} \hat{\rho}_{i_p i_r} = \sum_{\substack{j \equiv 1 (mod 2) \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} d[f(j), f(j+1)]. \qquad /19/$$

Далее, из /15/, /16/, /13/ получим

$$d[f(j), f(j_1)] = 0, \quad j_1 \equiv j+1 (mod\, n) \text{ при } j \equiv 0 (mod\, 2)$$

или, учитывая /19/,

$$\hat{\rho}(K) = d(f).$$

Лемма доказана.

Таким образом, зная оптимальное решение задачи /1/ при $k=2$ в графе $G$, легко построить оптимальное решение задачи $\mathcal{A}$ в графе $H_m$ (достаточно воспользоваться /16/). Далее справедливость теоремы 2 следует из леммы 2.

В заключение автор выражает благодарность Н.И.Глебову за ценные советы при написании работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
I марта 1978 г.

Литература

I. Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем.-"Кибернетический сборник" М.,"Мир",1975, вып.12, с.16-38.

2. Харари Ф. Теория графов. М.,"Мир", 1963.

3. Берж К. Теория графов и ее приложение. М.,ИЛ,1962.

4. Риордан ДЖ. Введение в комбинаторный анализ.М.,ИЛ,1963.

5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение. М.,"Мир",1967,т.I.