Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 18.
УДК 519.2:62-50

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

А.Г.Орлов, И.В.Расина (Иркутск)

Рассматривается класс непрерывных и дискретных управляемых процессов с изменяющейся во времени размерностью векторов состояния и управления либо непрерывных процессов, описываемых уравнениями с разрывными правыми частями.

Указанные особенности хорошо описываются с помощью понятия сложных процессов [I] , которое позволило получить эффективные достаточные условия [I, 2, 6] и алгоритмы [3] оптимизации на основе известных достаточных условий В.Ф.Кротова [5] для непрерывных и ~~дискретных~~ процессов.

Цель данной работы - получение достаточных условий относительного минимума для такого класса задач.

Предварительно приведем вкратце имеющиеся результаты по сложным процессам, на которые далее будем опираться.

§ I. Сложные процессы и достаточные условия оптимальности

Пусть имеется множество $\mathcal{M}_0$ с элементами $z=(T, x(t))$, где $T=\{t_{\text{н}}, t_{\text{н}}+1, \dots, t_{\text{к}}\}$ - подмножество натурального ряда, $t_{\text{н}}<t_{\text{к}}$, $t\in T$, $x(t)\in X_0(t)$, $T\in \mathcal{T}$, $X_0(t)$ - заданное при каждом t множество любой природы; $\mathcal{T}$ - заданная совокупность множеств T. При любых натуральных $t_{\text{н}}$, $t_{\text{к}}$ и любых $x(t_{\text{н}})$, $x(t_{\text{к}})$, $x(t_{\text{н}})\in X_0(t_{\text{н}})$, $x(t_{\text{к}})\in X_0(t_{\text{к}})$ на $\mathcal{M}_0$ определен функционал

$$I = F(t_{\text{н}}, t_{\text{к}}, x(t_{\text{н}}), x(t_{\text{к}})).$$

Заданы подмножества $\mathcal{M}_0$:

$$\mathcal{M}_1 = \{(T, x(t)): x(t)\in X(t)\},$$

где $X(t)$ - заданное при каждом t подмножество $X_0(t)$, $X(t)\subset X_0(t)$,

$$\mathcal{M}_2 = \{(T, x(t)): (t_{\text{н}}, t_{\text{к}}, x(t_{\text{н}}), x(t_{\text{к}}))\in \Gamma\},$$

где Γ - заданное множество,

$$\mathcal{M}_3 = \{(T, x(t)): x(t+1)\in V(t, x(t))\},$$

где $V(t, x(t))$ - заданное при каждом натуральном t и x подмножество $X_0(t+1)$: $V(t, x(t))\subseteq X_0(t+1)$. Множество $\mathcal{D}$ есть пересечение $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$: $\mathcal{D} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$.

Далее, пусть имеется подмножество $T^*\subset T$ $(t_{\text{н}}, t_{\text{к}} \bar{\in} T^*)$, такое, что для всех $t\in T^*$, $x(t)\in X(t)$ заданы множества $\tau = [\tau_{\text{н}}, \tau_{\text{к}}]$ -

отрезок числовой оси, либо $\mathcal{T}=\{\tau_н, \tau_н+1, \dots, \tau_к\}$ - подмножество натурального ряда, $\tilde{\mathcal{T}}$ - заданная совокупность множеств $\mathcal{T}$; $E^{n(t,x(t))}$ - евклидово пространство с элементами y. Введем множество $\tilde{\mathcal{M}}_0=\{\tilde{z}=(\mathcal{T}, y(\tau)): y(\tau)\in Y(t,x(t),\tau), \mathcal{T}\in\tilde{\mathcal{T}}\}$, $Y(t,x(t),\tau)\subseteq E^{n(t,x(t))}$ и рассмотрим подмножества множества $\mathcal{M}_0$: $\tilde{\mathcal{M}}_1=\{(\mathcal{T}, y(\tau)): (\tau_н, \tau_к, y(\tau_н), y(\tau_к))=\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}(t,x(t))\}$, где $\tilde{\Gamma}(t, x(t))$ - заданное множество,

$$\tilde{\mathcal{M}}_2=\{(\mathcal{T}, y(\tau)): y(\tau+1)\in S(t,x(t),\tau,y(\tau))\} \qquad /1/$$

либо

$$\tilde{\mathcal{M}}_2=\{(\mathcal{T}, y(\tau)): \frac{dy}{d\tau}\in S(t,x(t),\tau,y(\tau))\}, \qquad /2/$$

$$S(t,x(t),\tau,y(\tau))\subseteq E^{n(t,x(t))}, \quad \tilde{\mathcal{D}}=\tilde{\mathcal{M}}_1\cap\tilde{\mathcal{M}}_2 .$$

Для всех $t\in T^*$, $x(t)\in X(t)$ выполняется

$$x(t+1)=g(t,x(t),\tau_н,\tau_к,y(\tau_н),y(\tau_к)).$$

Класс пар $(z,\tilde{z})$, $z\in\mathcal{D}$, $\tilde{z}\in\tilde{\mathcal{D}}$ обозначим через $\mathcal{D}$ и его элементы будем называть сложными процессами. Если множество $\tilde{\mathcal{M}}_2$ определено в виде /2/, то процесс назовем дискретно-непрерывным [1]. Если множество $\tilde{\mathcal{M}}_2$ определено в виде /1/, то процесс назовем сложным дискретным [2]. Если множество $\tilde{\mathcal{D}}$ не зависит от $x(t)$, то будем называть процессы многоэтапными [3].

Ставится задача о поиске минимизирующей последовательности $\{z_s,\tilde{z}_s\}\subset\mathcal{D}$, на которой $I(z_s,\tilde{z}_s)\to\inf_{\mathcal{D}} I$.

Введем в рассмотрение произвольные функции $\varphi(t,x(t))$, $\tilde{\varphi}(t,x(t),\tau,y(\tau))$ и построим с их помощью следующие конструкции:

$$R(t,x(t),u(t))=\varphi(t+1,u(t))-\varphi(t,x(t)), \quad t\in T\setminus T^*\setminus t_к,$$

$$\mu(t)=\sup_{\substack{x(t)\in X(t)\\ u(t)\in V(t,x(t))}} R(t,x(t),u(t)),$$

$$G(\gamma)=F(\gamma)+\varphi(t_к,x(t_к))-\varphi(t_н,x(t_н))-\sum_{t_н}^{t_к-1}\mu(t),$$

$$m=\inf_{\gamma\in\Gamma\cap\Gamma^*} G(\gamma),$$

$$\Gamma^*=\{\gamma: x(t_н)\in X(t_н),\ x(t_к)\in X(t_к)\},$$

$$\tilde{R}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau))=\tilde{\varphi}(t,x(t),\tau+1,w(\tau))-\tilde{\varphi}(t,x(t),\tau,y(\tau)),$$

если $\tilde{\mathcal{M}}_2$ определено условием /2/, и

$$\tilde{R}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau))=\tilde{\varphi}_y(t,x(t),\tau,y(\tau))\cdot w(\tau)+\tilde{\varphi}_\tau(t,x(t),\tau,y(\tau)),$$

если $\tilde{\mathcal{M}}_2$ определено условием /1/;

$$\mu(t,\tau) = \sup_{\substack{x(t)\in X(t) \\ w(\tau)\in S(t,x(t),\tau,y(\tau)) \\ y(\tau)\in \mathcal{Y}(t,x(t),\tau)}} \tilde{R}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau)).$$

Аналогично функции $\tilde{R}$ для двух вариантов множества $\tilde{\mathcal{M}}_2$ определяется функция

$$\tilde{G}(t,x(t),\tilde{\gamma}) = -\varphi(t+1,g(t,x(t),\tilde{\gamma})) + \varphi(t,x(t)) + \tilde{\varphi}(t,x(t),\tau_K,y(\tau_K)) - \tilde{\varphi}(t,x(t),\tau_H,y(\tau_H)) - \sum_{\tau_H}^{\tau_K-1} \tilde{\mu}(t,\tau),$$

$$\tilde{G}(t,x(t),\tilde{\gamma}) = -\varphi(t+1,g(t,x(t),\tilde{\gamma})) + \varphi(t,x(t)) + \tilde{\varphi}(t,x(t),\tau_K,y(\tau_K)) - \tilde{\varphi}(t,x(t),\tau_H,y(\tau_H)) - \int_{\tau_H}^{\tau_K} \tilde{\mu}(t,\tau)d\tau,$$

$$\mu(t) = -\inf_{\substack{x(t)\in X(t) \\ \tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}\cap\tilde{\Gamma}^*}} \tilde{G}(t,x(t),\tilde{\gamma}),\quad t\in T^*,$$

$$\tilde{\Gamma}^* = \left\{\tilde{\gamma} : y(\tau_H)\in \mathcal{Y}(t,x(t),\tau_H),\ y(\tau_K)\in \mathcal{Y}(t,x(t),\tau_K)\right\}.$$

Т е о р е м а I. Для того чтобы последовательность $\left\{\gamma_s, \tilde{\gamma}_s\right\}$ была минимизирующей, достаточно существования таких функций $\varphi(t,x(t))$, $\tilde{\varphi}(t,x(t),\tau,y(\tau))$, что выполняются следующие условия:

1. $R(t,x_s(t),x_s(t+1)) \longrightarrow \mu(t),\ t\in T\,|\,T^*\backslash t_K$;
2. $\tilde{R}(t,x_s(t),\tau,y_s(\tau),y_s(\tau+1)) \longrightarrow \tilde{\mu}(t,\tau)$ либо $\int_{\tau_{H_s}}^{\tau_{K_s}} (\tilde{\mu}(t,\tau) - \tilde{R}(t,x_s(t),\tau,y_s(\tau),\frac{dy_s(\tau)}{d\tau}))d\tau \longrightarrow 0,\ t\in T^*$;
3. $\tilde{G}(t,x_s(t),\tilde{\gamma}_s) \longrightarrow -\mu(t),\ t\in T^*$;
4. $G(\gamma_s) \longrightarrow m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с двумя определениями множества $\tilde{\mathcal{M}}_2$ непосредственно проверяется, что функционал I на $\mathcal{D}$ представим в виде

$$I = G(\gamma) - \sum_{t\in T|T^*\backslash t_K} R(t,x(t),u(t)) + \sum_{t_H}^{t_K-1} \mu(t) + \sum_{t\in T^*} \Big(\tilde{G}(t,x(t),\tilde{\gamma}) - \sum_{\tau_H}^{\tau_K-1} \tilde{R}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau))\Big) + \sum_{\tau_H}^{\tau_K-1} \tilde{\mu}(t,\tau),$$

$$I = G(y) - \sum_{t\in T\setminus T^*\setminus t_K} R(t,x(t),u(t)) + \sum_{t_H}^{t_K-1} \mu(t) +$$
$$+ \sum_{t\in T^*} \Big(\widetilde{G}(t,x(t),\widetilde{y}) - \int_{\tau_H}^{\tau_K} \widetilde{R}(t,x(t),\tau,y(t),w(\tau))d\tau + \int_{\tau_H}^{\tau_K} \widetilde{\mu}(t,\tau)d\tau\Big).$$

Отсюда следует, что $I \geqslant m$. Выполнение условий теоремы означает, что $I(z_s,\widetilde{z}_s)\to m$, т.е. последовательность $\{z_s,\widetilde{z}_s\}$ минимизирующая.

§ 2. Достаточные условия относительного минимума сложных процессов

Предположим, что T,τ фиксированы, $X(t)\subset E^m$, множества $V(t,x(t))$ и $S(t,x(t),\tau,y(\tau))$ заданы параметрически:
$V(t,x(t))=f(t,x(t),U)$, $S(t,x(t),\tau,y(\tau))=\widetilde{f}(t,x(t),\tau,y(\tau),W)$,
где U и W - заданные подмножества евклидовых пространств E^r и E^k с элементами $u(t)$, $w(\tau)$ соответственно, имеющие внутренние точки; $f(t,x(t),u(t))$, $\widetilde{f}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau))$ - вектор-функции $1+m+r$ и $2+n(t)+k+m$ переменных соответственно. Будем предполагать, что функции $f,\widetilde{f},F,\varphi,\widetilde{\varphi}$ таковы, что справедливы все нижеследующие операции.

Пусть $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(\tau)$ - элементы из $\mathcal{D}(T),\widetilde{\mathcal{D}}(\tau)$ соответственно $(\mathcal{D}(T),\widetilde{\mathcal{D}}(\tau)$ - сечения $\mathcal{D}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ при заданных $T,\tau)$, причем имеется по крайней мере по одному значению $u(t)$ и $w(\tau)$, соответствующему значениям $\bar{x}(t+1)$, $\bar{y}(\tau+1)$, а именно: $\bar{u}(t),\bar{w}(\tau)$, которые являются внутренними точками множеств U,W. Последнее предположение относительно элемента $\bar{w}(\tau)$ необходимо лишь для сложных дискретных процессов.

Обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon$ подмножество класса $\mathcal{D}$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$|x(t)-\bar{x}(t)|<\varepsilon,\quad |y(t,\bar{x}(t),\tau)-\bar{y}(t,\bar{x}(t),\tau)|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Будем говорить, что функционал I достигает на сложном процессе $(\bar{z},\bar{\widetilde{z}})$ относительного минимума на $\mathcal{D}$, если

$$I(\bar{z},\bar{\widetilde{z}}) = \inf_{\mathcal{D}_\varepsilon} I(z,\widetilde{z}).$$

На основании вышеуказанной теоремы достаточными условиями относительного минимума являются

а) для сложных дискретных процессов:

$$dR=0,\quad dG=0,\quad d\widetilde{R}=0,\quad d\widetilde{G}=0, \qquad /3/$$
$$d^2R<0,\quad d^2G>0,\quad d^2\widetilde{R}<0,\quad d^2\widetilde{G}>0; \qquad /4/$$

б) для дискретно-непрерывных процессов:

$$dR=0,\quad dG=0,\quad d\tilde{P}=0,\quad d\tilde{G}=0, \qquad /5/$$

$$d^2R<0,\quad d^2G>0,\quad d^2\tilde{P}<0,\quad d^2\tilde{G}>0, \qquad /6/$$

где

$$\tilde{P}(t,x(t),\tau,y(\tau))=\sup_{w(\tau)\in W}\tilde{R}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau)).$$

Рассмотрим конкретный вид этих условий для задачи со свободным правым концом, т.е. когда $x(t_н)$ фиксировано, а $x(t_к)\in E^m$. При этом будем считать, что множество $\tilde{\Gamma}$ имеет вид

$$\tilde{\Gamma}(t,x(t))=\left\{\tilde{\gamma}: y(\tau_н)=y_н=\xi(t,x(t)),\ y(\tau_к)\in E^{k(t,x(t))}\right\}.$$

Заметим, что в конструкции, определенные на множестве $\mathcal{T}$, $x(t)$ входит как параметр.

Из условия /3/ следует, что

$$\bar{R}_x=0,\quad \bar{R}_u=0,\quad \bar{G}_{x(t_к)}=0,\quad \bar{\tilde{R}}_x=0,\quad \bar{\tilde{R}}_y=0, \qquad /7/$$

$$\bar{\tilde{R}}_w=0,\quad \bar{\tilde{G}}_x=0,\quad \bar{\tilde{G}}_{y(\tau_к)}=0.$$

Здесь и далее черточкой сверху обозначены значения соответствующих производных на элементах $\bar{z}=(\bar{x}(t),\bar{u}(t))$, $\bar{\tilde{z}}=(\bar{y}(\tau),\bar{w}(\tau))$. Иначе,

$$\psi(t)=\psi(t+1)\bar{f}_x,\quad \psi(t+1)\bar{f}_u=0,$$

$$\psi(t_к)=-\bar{F}_{x(t_к)},\quad t\in T|T^*,$$

$$\tilde{\psi}(t,\tau_к)=-\psi(t+1)g_{y(\tau_к)},$$

$$\tilde{\psi}(t,\tau)=\tilde{\psi}(t,\tau+1)\bar{\tilde{f}}_y,\quad \alpha(t,\tau_к)=0,$$

$$\alpha(t,\tau)=\alpha(t,\tau+1)+\tilde{\psi}(t,\tau+1)\bar{\tilde{f}}_x,\quad \tau\in\mathcal{T},$$

$$\psi(t)=\psi(t+1)(g_x+g_{y_н}\cdot\xi_x)+\alpha(t,\tau_н)+\tilde{\psi}(t,\tau_н)\xi_x,\quad t\in T^*$$

Здесь $\psi(t)=\varphi_x(t,\bar{x}(t))$, $\tilde{\psi}(t,\tau)=\tilde{\varphi}_y(t,\bar{x}(t),\tau,\bar{y}(\tau))$, $\alpha(t,\tau)=\tilde{\varphi}_x(t,\bar{x}(t),\tau,\bar{y}(\tau))$.

Аналогичную последовательность равенств получим из условия /5/, но при этом $\tilde{\psi}(t,\tau)$ и $\alpha(t,\tau)$ определяются из решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{\psi}(t,\tau)}{d\tau}=\bar{\tilde{\mathcal{H}}}_y(t,\bar{x}(t),\tau,y(\tau),\tilde{\psi}(t,\tau)), \qquad /8/$$

$$\frac{d\alpha(t,\tau)}{d\tau}=\bar{\tilde{\mathcal{H}}}_x(t,x(t),\tau,y(\tau),\tilde{\psi}(t,\tau)),$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}(t,x(t),\tau,y(\tau),\tilde{\psi}(t,\tau))=\sup_{w\in W}(\tilde{\psi}(t,\tau)\cdot\tilde{f}(t,x(t),\tau,y(\tau),w(\tau))).$$

Как и в [4], из условий $d^2R<0$, $d^2G>0$ для $t\in T|T^*$ получим

$$\bar{f}'_u \sigma(t+1)\bar{f}_u + \psi(t+1)\bar{f}_{uu} < 0,$$

$$\sigma(t) = \bar{f}'_x \sigma(t+1)\bar{f}_x + \psi(t+1)\bar{f}_{xx} - (\bar{f}'_x \sigma(t+1)\bar{f}_u + \psi(t+1)\bar{f}_{xu}) \times$$
$$\times (\bar{f}'_u \sigma(t+1)\bar{f}_u + \psi(t+1)\bar{f}_{uu})^{-1} (\bar{f}'_u \sigma(t+1)\bar{f}_x + \psi(t+1)\bar{f}_{ux}) - \theta(t), \quad /9/$$
$$\sigma(t_k) = -\bar{F}_{x(t_k)x(t_k)} + \theta_1,$$

где $\sigma(t) = \varphi_{xx}(t, \bar{x}(t))$, $\theta(t)$ – отрицательно, а θ_1 – положительно определенные матрицы.

Обозначим $\tilde{x} = (x, y)$. Тогда для сложных дискретных процессов условие $d^2R < 0$ можем по аналогии с [4] представить в виде

$$\bar{\bar{R}}_{ww} < 0,$$
$$\bar{\bar{R}}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \bar{\bar{R}}_{\tilde{x}w} \cdot \bar{\bar{R}}^{-1}_{ww} \bar{\bar{R}}_{w\tilde{x}} - \tilde{\theta}(t,\tau) = 0, \quad /10/$$

где $\tilde{\theta}(t,\tau)$ – отрицательно определенная матрица,

$$\bar{\bar{R}}_{yy} = \bar{\bar{f}}'_y \tilde{\sigma}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_y + \tilde{\varphi}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_{yy} - \tilde{\sigma}(t,\tau),$$
$$\bar{\bar{R}}_{xy} = \bar{\bar{f}}'_x \tilde{\sigma}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_y + \omega(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_y + \tilde{\varphi}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_{xy} - \omega(t,\tau),$$
$$\bar{\bar{R}}_{xx} = \bar{\bar{f}}'_x \tilde{\sigma}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_x + \tilde{\varphi}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_{xx} + \bar{\bar{f}}'_x \omega(t,\tau+1) +$$
$$+ \omega(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_x + \beta(t,\tau+1) - \beta(t,\tau),$$
$$\bar{\bar{R}}_{xw} = \omega(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_w + \bar{\bar{f}}'_x \tilde{\sigma}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_w + \tilde{\varphi}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_{xw},$$
$$\bar{\bar{R}}_{yw} = \bar{\bar{f}}'_y \tilde{\sigma}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_w + \tilde{\varphi}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_{yw},$$
$$\bar{\bar{R}}_{ww} = \bar{\bar{f}}'_w \tilde{\sigma}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_w + \tilde{\varphi}(t,\tau+1)\bar{\bar{f}}_{ww},$$
$$\tilde{\sigma}(t,\tau) = \tilde{\varphi}_{yy}(t, \bar{x}(t), \tau, \bar{y}(\tau)),\quad \omega(t,\tau) = \tilde{\varphi}_{xy}(t, \bar{x}(t), \tau, \bar{y}(\tau)),$$
$$\beta(t,\tau) = \tilde{\varphi}_{xx}(t, \bar{x}(t), \tau, \bar{y}(\tau)).$$

Для дискретно-непрерывных процессов имеем

$$\bar{\bar{P}}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \tilde{\theta}(t,\tau) = 0,$$
$$\bar{\bar{P}}_{yy} = \bar{\bar{\mathcal{H}}}_{yy} + \bar{\bar{\mathcal{H}}}_{y\tilde{\psi}}\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{\tilde{\psi}y} + \tilde{\sigma}'\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}\tilde{\sigma} + \dot{\tilde{\sigma}}, \quad /11/$$
$$\bar{\bar{P}}_{xx} = \bar{\bar{\mathcal{H}}}_{xx} + \omega\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{\tilde{\psi}x} + \bar{\bar{\mathcal{H}}}_{x\tilde{\psi}}\omega + \omega'\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}\omega + \dot{\beta},$$
$$\bar{\bar{P}}_{xy} = \bar{\bar{\mathcal{H}}}_{xy} + \bar{\bar{\mathcal{H}}}_{y\tilde{\psi}}\omega + \tilde{\sigma}\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{\tilde{\psi}x} + \tilde{\sigma}'\bar{\bar{\mathcal{H}}}_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}\omega + \dot{\omega}.$$

Условие $d^2\tilde{G} > 0$ эквивалентно условию

$$d\tilde{x}'\bar{\bar{G}}_{\tilde{x}\tilde{x}}d\tilde{x} + d\tilde{y}'\bar{\bar{G}}_{\tilde{y}\tilde{y}}d\tilde{y} > 0,$$

$\tilde{y} = (z, y)$, $z = x(t)$ в случае, когда $x(t)$ играет роль параметра. Тогда последнее неравенство представимо в виде

$$\bar{\bar{G}}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0, \quad \bar{\bar{G}}_{\tilde{y}\tilde{y}} - \theta_2(t) = 0, \quad /12/$$

где $\theta_2(t)$ - положительно определенная матрица.

Получаем

$$\begin{aligned}\delta(t) = {} & \bar{g}_x'\delta(t+1)\bar{g}_x + \bar{\xi}_x'(\tau_H)\bar{g}_{y_H}'\delta(t+1)\bar{g}_x + \psi(t+1)\bar{g}_{xx} + \\ & + \psi(t+1)\bar{g}_{xy_H}\bar{\xi}_x(\tau_H) + \bar{g}_x'\delta(t+1)\bar{g}_{y_H}\bar{\xi}_x(\tau_H) + \\ & + \bar{\xi}_x'(\tau_H)\bar{g}_{y_H}'\delta(t+1)\bar{g}_{y_H}\bar{\xi}_x(\tau_H) + \bar{\xi}_x'(\tau_H)\bar{g}_{y_H x}\psi(t+1) + \\ & + \psi(t+1)\bar{\xi}_x'(\tau_H)\bar{g}_{y_H y_H}\bar{\xi}_x(\tau_H) + \psi(t+1)\bar{g}_{y_H}\bar{\xi}_{xx}(\tau_H) + \\ & + \beta(t,\tau_H) + \omega(t,\tau_H)\bar{\xi}_x(\tau_H) + \bar{\xi}_x'(\tau_H)\omega(t,\tau_H) + \\ & + \bar{\xi}_x'(\tau_H)\tilde{\delta}(t,\tau_H)\bar{\xi}_x(\tau_H) + \tilde{\psi}(t,\tau_H)\bar{\xi}_{xx}(\tau_H), \quad t \in T^*,\end{aligned}$$

$$\bar{\bar{G}}_{zz} = \beta(t,\tau_K), \quad \bar{\bar{G}}_{zy} = \omega(t,\tau_K), \quad \bar{\bar{G}}_{yy} = \tilde{\delta}(t,\tau_K).$$

Т е о р е м а 2. Для того чтобы на $(\bar{z},\bar{\bar{z}})$ достигался относительный минимум I на $\mathcal{D}$, достаточно существования при каждом t таких функций $\psi(t)$, $\alpha(t,\tau)$, $\tilde{\psi}(t,\tau)$, матриц $\delta(t)$, $\tilde{\delta}(t,\tau)$, $\beta(t,\tau)$, $\omega(t,\tau)$, отрицательно определенных матриц $\theta(t)$, $\tilde{\theta}(t,\tau)$ и положительно определенных матриц θ_1, $\theta_2(t)$, что выполняются условия /7/, /9/, /10/, /12/ для сложного дискретного процесса и /5/, /9/, /11/, /12/ для дискретно-непрерывного процесса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим функции $\varphi(t,x(t))$, $\tilde{\varphi}(t,x(t),\tau,y(\tau))$ в виде

$$\varphi(t,x(t)) = \psi'(t)x + \frac{1}{2}(x-\bar{x}(t))'\delta(t)(x-\bar{x}(t)),$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t,x(t),\tau,y(\tau)) = {} & \tilde{\psi}'(t,\tau)y + \alpha'(t,\tau)x + \frac{1}{2}(y-\bar{y}(\tau))'\tilde{\delta}(t,\tau)(y-\bar{y}(\tau)) + \\ & + (x-\bar{x}(t))'\omega(t,\tau)(y-\bar{y}(\tau)) + \frac{1}{2}(x-\bar{x}(t))'\beta(t,\tau)(x-\bar{x}(t)),\end{aligned}$$

где $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t,\tau)$, $\alpha(t,\tau)$, $\delta(t)$, $\tilde{\delta}(t,\tau)$, $\omega(t,\tau)$, $\beta(t,\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы. Выполнение перечисленных условий означает, что соответствующие функции $R, G, \tilde{R}, \tilde{G}$ $(R, G, \tilde{P}, \tilde{G})$ достигают относительного экстремума в точках $(\bar{z},\bar{\bar{z}})$, $(\bar{z}(t_K)$, $\bar{\bar{z}}(t,\tau_K))$. Это, в свою очередь, означает, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что $R, G, \tilde{R}, \tilde{G}$ $(R, G, \tilde{P}, \tilde{G})$ достигают экстремума на множествах $\{x : |x-\bar{x}(t)| < \varepsilon\}$, $\{y : |y-\bar{y}(\tau)| < \varepsilon\}$.

Отсюда следует в силу теоремы I, что функционал I достигает на элементе $(\bar{z},\bar{\bar{z}})$ минимума на множестве $\mathcal{D}_\varepsilon$, т.е. относительного минимума.

Авторы приносят глубокую благодарность В.И.Гурману за постоянное внимание к работе, помощь и поддержку.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 января 1978 г.

Л и т е р а т у р а

I. Гурман В.И. К теории оптимальных дискретных процессов.- Автоматика и телемеханика, 1973, № 7, с.53-58.

2. Расина И.В. Сложные дискретные процессы.-В кн.:Методы оптимизации и исследование операций (Прикладная математика). Иркутск, 1976, с. 30-38.

3. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов.-Автоматика и телемеханика, 1974, № 12, с. 72-80.

4. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. -М.:Наука, 1977.-172 с.

5. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления.-М.:Наука, 1973.-220 с.

6. Орлов А.Г.,Расина И.В. Достаточные условия оптимальности сложных процессов.-Тез.докл. Ш Всесоюзной Четаевской конференции. Иркутск, 1977, с. 51-52.