Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 18.
УДК 519.3:62-50

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В.В.Сивов (Ленинград)

Введение

При наличии одного из основных [1] классов ограничений на управления ставится $\mathcal{E}$ - задача линейного быстродействия. На основе свойств оптимальных в $\mathcal{E}$ - задаче программных управлений проводится исследование гладкости (непрерывность, дифференцируемость, дважды непрерывная дифференцируемость) функции Беллмана. Устанавливаются вид уравнения Беллмана и оптимальных синтезирующих управлений, а также связь $\mathcal{E}$ - задачи с задачей линейного быстродействия. Настоящая работа примыкает к исследованиям[1-7] и является резвернутым изложением доклада автора [16].

Рассмотрим стандартную задачу оптимального быстродействия для системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_r u, \quad x(0) = x_0 \in G_r, \qquad /1/$$

с множеством допустимых управлений U_r, состоящим из всех измеримых вектор-функций $(u_1(t), \ldots, u_r(t))$, определенных при $t > 0$ и удовлетворяющих неравенствам $|u_\ell(t)| < 1$, $\ell = 1, \ldots, r$, почти всюду. Предположим, что $n \times n$ - матрица A и $n \times r$ - матрица B_r имеют вещественные элементы, G_r - множество управляемости [10] системы /1/, $T_r(x_0)$ - время быстродействия, $\operatorname{rang} B_r = r$, $1 \leqslant r \leqslant n$.

Известно (см., например, [9]), что решение функционального уравнения-уравнения Беллмана, - возникающего при решении задачи быстродействия методом динамического программирования, затруднительно. Предположение о гладкости решения уже в простейших случаях (см., например, [8,10]) оказывается невыполненным. Результаты статьи [6] показывают, что $T_r(x)$, $x \in G_r$, в поставленной задаче заведомо не будет гладкой.

Регуляризация метода динамического программирования Беллмана в задачах линейного быстродействия проводилась многими авторами. Так Н.Н.Красовский [1] доказал непрерывную дифференцируемость функции Беллмана для класса допустимых управлений со значениями из n -мерного эллипсоида и исследовал предельные переходы, что заведомо позволило сгладить функцию $T_1(x)$ в задачах вида /1/ с одним управлением.

Л.А.Кун и Ю.Ф.Пронозин [3,5](на основе разработанных ими достаточных условий гладкости [4])создали схему регуляризации путем аппроксимации множества допустимых управлений так называемым каноническим множеством.

Ю.Ф.Пронозин [7] , опираясь на результаты своих исследований [6] , предложил следующий способ сглаживания: при некоторых достаточно общих предположениях функция Беллмана в задаче быстродействия на телесное в R^n целевое множество сколь угодно малого диаметра, содержащее начало координат в качестве внутренней точки, оказывается непрерывно дифференцируемой. При таком подходе, однако, оптимальное синтезирующее управление может оказаться,например, разрывным, что нежелательно [II] .

Заметим также, что в работах [I-5,7] авторы основывали методы регуляризации на изменении либо множества допустимых управлений, либо целевого множества и оставались при этом в рамках задачи линейного быстродействия в системе /I/.

В настоящей статье делается попытка регуляризации метода Беллмана (в задаче быстродействия в системе /I/ при наличии одного из основных[I] типов ограничений) другим способом: меняется оптимизируемый функционал и рассматривается ε -задача линейного быстродействия.

§ I. ε -задача линейного быстродействия

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$V(t_1,u,v)=t_1+\varepsilon_1\sum_{\ell=1}^{n}\int_0^{t_1}v_\ell(t)dt, \qquad /2/$$

заданного на решениях $x(t/u)$ системы /I/ при $r=n,\ t\in[0,t_1]$, выбором управляющих воздействий $(u,v)\in\mathcal{M}$ так, чтобы выполнялось условие $x(t_1/u)=0$. Здесь $\varepsilon_1=\varepsilon/n(\varepsilon+1)$, ε - произвольное положительное число

$$\mathcal{M}=\left\{(u,v)\in U_n\times U_n:\ u_\ell^2(t)+v_\ell^2(t)\leqslant 1,\ \ell=1,\dots,n,\ t\in[0,t_1]\right\}.$$

Пусть $[\dots]_\ell$ - ℓ -я координата вектора, стоящего в квадратных скобках, $[\cdot,\cdot]$ - знак скалярного произведения векторов в R^n, $*$ - знак транспонирования матриц, $W^*(t)$- нормированная в нуле фундаментальная матрица однородной части системы /I/, $T_\varepsilon(x)$- функция Беллмана (если она существует) задачи /I/ - /2/.

Существование и единственность решения ε - задачи, а также ряд свойств, необходимых в дальнейшем и имеющих определенный самостоятельный интерес, устанавливает следующая

Т е о р е м а I. Для произвольного $x_0 \in G_n$ существует оптимальное управление в задаче /1/-/2/. Если же $x_0 \in G_n \setminus \{0\}$, то оптимальное управление единственно и имеет вид

$$u_\ell^\varepsilon(t) = \frac{[B_n^* W^{-1}(t)\mu^\varepsilon(x_0)]_\ell}{\sqrt{[B_n^* W^{-1}(t)\mu^\varepsilon(x_0)]_\ell^2 + \varepsilon_1^2}}, \qquad /3/$$

$$v_\ell^\varepsilon(t) = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{[B_n^* W^{-1}(t)\mu^\varepsilon(x_0)]_\ell^2 + \varepsilon_1^2}}, \qquad /4/$$

$$\ell = \overline{1,n}, \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, t_1^\varepsilon].$$

При этом $\mu^\varepsilon(x_0) \in R^n \setminus \{0\}$, и гиперплоскость, ортогональная вектору $\mu^\varepsilon(x_0)$ и проходящая через точку x_0, есть опорная гиперплоскость к множеству

$$F_{T_\varepsilon(x_0)} = \{x \in R^n : T_\varepsilon(x) \leq T_\varepsilon(x_0)\}, \qquad /5/$$

т.е. при всех $x \in F_{T_\varepsilon(x_0)}$ выполняется неравенство

$$[\mu^\varepsilon(x_0), x - x_0] \geq 0. \qquad /6/$$

Разобьем доказательство теоремы на доказательство ряда лемм.

Л е м м а I. Пусть t_1^ε, $u^\varepsilon(t)$, $v^\varepsilon(t)$, $0 < t < t_1^\varepsilon$, - решение ε-задачи. Тогда существует $\mu^\varepsilon(x_0) \in R^n \setminus \{0\}$ такой, что имеют место равенства /3/-/4/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных предположениях существует [10, с.91] такой ненулевой вектор $(\mu, \lambda) \in R^n \times R^1$, что

$$\max_{(u,v)\in M} \left\{[p(t), Ax(t/u) + B_n u] - \lambda(1 + \varepsilon_1 \sum_{\ell=1}^n v_\ell)\right\} =$$

$$= [p(t), Ax(t/u^\varepsilon) + B_n u^\varepsilon(t)] + \lambda(1 + \varepsilon_1 \sum_{\ell=1}^n v_\ell^\varepsilon(t)) = 0, \qquad /7/$$

п.в. $t \in [0, t_1^\varepsilon]$, причем $p(t)$ - решение системы

$$\frac{dp}{dt} = -A^* p, \qquad /8/$$

удовлетворяющее условию $p(0) = \mu$, $\lambda = const \geq 0$. Пусть $\lambda = 0$, тогда необходимо $\mu \neq 0$ и из /7/ следует, что $B_n^* p(t_1^\varepsilon) = 0$. Последнее в силу /8/ противоречит нетривиальности вектора μ. Предположение $\mu = 0$ с необходимостью влечет $\lambda > 0$, что опять же противоречит второму равенству в /7/, так как $1 + \varepsilon_1 \sum_{\ell=1}^n v_\ell(t) > 0$ при $v \in U$, п.в. $t \geq 0$. Следовательно,

$$[p(t), Ax(t/u^\varepsilon) + B_n u^\varepsilon(t)] > 0, \qquad /9/$$

п.в. $t \geq 0$, где $\bar{p}(t)$ - решение системы /8/, $p(0) = \mu^\varepsilon(x_0) = \mu/\lambda$.

Зафиксируем произвольно $\bar{t} \in [0, t_1^\varepsilon]$. Если $[B_n^* p(\bar{t})]_\ell \neq 0$, то

значение $\max\limits_{u_\ell^2+v_\ell^2\leq 1}\left\{[B_n^*p(\bar t)]_\ell u_\ell+\varepsilon v_\ell\right\}$ (см. /7/) достигается на границе (как экстремум линейной функции, отличной от нулевой). В этом случае равенства /3/-/4/ устанавливаются непосредственно с помощью введения множителей Лагранжа для учета ограничений типа равенств. Если же в случае $[B_n^*p(\bar t)]_\ell=0$ предположить $u_\ell^\varepsilon(\bar t)\neq 0$, то приходим к противоречию:

$$\left\{[B_n^*p(\bar t)]_\ell u_\ell^\varepsilon(\bar t)+\varepsilon_1 v_\ell^\varepsilon(\bar t)\right\}=\max_{u_\ell^2+v_\ell^2\leq 1}\left\{[B_n^*p(\bar t)]u+\varepsilon_1 v\right\}<\varepsilon_1,$$

так как $(u,v)=(0,1)\in\mathcal{M}$. Таким образом, равенства /3/-/4/ выполняются почти всюду на $[0,t_1^\varepsilon]$. Лемма доказана.

Заменой $\tau(t)=\int\limits_0^t(1+\varepsilon_1\sum\limits_{\ell=1}^n v_\ell(\theta))d\theta$, $0\leq t\leq t_1$, задача /1/-/2/ может быть сведена к эквивалентной задаче оптимального быстродействия в нуль в системе

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{1}{1+\varepsilon_1\sum\limits_{\ell=1}^n w_\ell(\tau)}[Ay+B\omega],\quad y(0)=x_0, \qquad /10/$$

причем $w(\tau(t))=v(t)$, $\omega(\tau(t))=u(t)$, п.в. $t\in[0,t_1]$ (см. [8, с. 352-356]).

Ниже нам потребуется следующий аналог леммы 1.

Лемма 2. Если τ_1 - время быстродействия в системе /10/, $(\omega^\varepsilon(\tau), w^\varepsilon(\tau))$, $0\leq\tau\leq\tau_1$, - оптимальное управление, то существует нетривиальное решение $\psi(\tau/w^\varepsilon)$ системы

$$\frac{d\psi}{d\tau}=-\frac{1}{1+\varepsilon_1\sum\limits_{\ell=1}^n w_\ell^\varepsilon(\tau)}A^*\psi \qquad /11/$$

такое, что выполняются равенства

$$\omega_\ell^\varepsilon(\tau)=\frac{[B_n^*\psi(\tau/w^\varepsilon)]_\ell}{\sqrt{[B_n^*\psi(\tau/w^\varepsilon)]_\ell^2+\varepsilon_1^2}}, \qquad /12/$$

$$w_\ell^\varepsilon(\tau)=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{[B_n^*\psi(\tau/w^\varepsilon)]_\ell^2+\varepsilon_1^2}}, \qquad /13/$$

$$\ell=\overline{1,n},\quad \text{п.в. } \tau\in[0,\tau_1].$$

Утверждение леммы вытекает из принципа максимума и из того, что $\lambda>0$ и

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1\sum\limits_{\ell=1}^n w_\ell^\varepsilon(\tau)}[Ay(\tau/\omega^\varepsilon,w^\varepsilon)+B_n\omega^\varepsilon(\tau),\psi(\tau/w^\varepsilon)]=\lambda,$$

п.в. $\tau \in [0,\tau_1]$.

Замечание I. Пусть $W(t/w)$ - нормированная в нуле фундаментальная матрица системы /10/. Тогда задача быстродействия в этой системе, очевидно, совпадает с задачей наискорейшего перевода из состояния $z=0$ в состояние $z=x_0$ системы, $\tau \geq 0$,

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} w_l^2} W^{-1}(t/w) B_n \omega . \qquad /14/$$

Лемма 3. Пусть $(u_1(t), v_1(t))$, $0 \leq t \leq t_1^\varepsilon$, и $(u_2(t), v_2(t))$, $0 \leq t \leq t_2^\varepsilon$, - решения ε -задачи. Тогда $t_1^\varepsilon = t_2^\varepsilon$ и $u_1(t) = u_2(t)$, $v_1(t) = v_2(t)$ п.в. $t \in [0, t_1^\varepsilon]$.

Доказательство. Пусть $t_1^\varepsilon > t_2^\varepsilon$.Тогда $(\omega_1(\tau)$, $w_1^2(\tau))$, $0 \leq \tau \leq \tau_1$, и $(\omega_2(\theta), w_2^2(\theta))$, $0 \leq \theta \leq \tau_1$, - быстродействующие управления в системе /14/. Здесь $\tau(t) = \int_0^t (1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} v_{1l}(\nu)) d\nu$, $0 \leq t \leq t_1^\varepsilon$ и $\theta(t) = \int_0^t (1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} v_{2l}(\nu)) d\nu$, $0 \leq t < t_2^\varepsilon$. Имеем

$$\int_0^{\tau_1} \frac{1}{1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} w_{1l}^2(\tau)} W^{-1}(\tau/w_1^2) B_n \omega_1(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{\tau_1} \frac{1}{1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} w_{2l}^2(\tau)} W^{-1}(\tau/w_2^2) B_n \omega_2(\tau) d\tau . \qquad /15/$$

Пусть в задаче /14/ μ^ε - вектор, соответствующий, в силу принципа максимума, управлению (ω_1, w_1^2) . Тогда

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} w_{1l}^2(\tau)} [\psi(\tau/w_1^2), B_n \omega_1(\tau)] \geq$$

$$\geq \frac{1}{1+\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} w_{2l}^2(\tau)} [\psi(\tau/w_2^2), B_n \omega_2(\tau)] , \qquad /16/$$

п.в. $\tau \in [0,\tau_1]$, где $\psi(\tau/w_i^2)$ - решения системы /11/ при $w = w_i^2$, $i = 1,2$, $0 \leq \tau \leq \tau_1$, $\psi(0/w_i^2) = \mu^\varepsilon$. Соотношения /15/-/16/ устанавливают, что в /16/ имеет место знак равенства. Неравенство /16/ должно выполняться, если в его правой части управление (ω_2, w_2^2) заменить на любое управление $(\tilde{\omega}_2, \tilde{w}_2^2) \in \mathcal{M}$, определенное на отрезке $[0,\tau_1]$. Поэтому управление (ω_2, w_2^2) удовлетворяет принципу максимума с вектор-функцией $\psi(\tau/w_2^2)$. Тогда, по лемме 2, $(\omega_2(\theta), w_2^2(\theta))$ удовлетворяет уравнениям

$$[w_2(\theta)]_l = \frac{[B_n^* \psi(\theta/w_2)]_l}{\sqrt{[B_n^* \psi(\theta/w_2)]_l^2 + \varepsilon_1^2}}, \qquad /17/$$

$$[v_2(\theta)]_l = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{[B_n^* \psi(\theta/w_2)]_l^2 + \varepsilon_1^2}}, \qquad /18/$$

$$l = \overline{1,n}, \text{ п.в. } \theta \in [0, \tau_1].$$

В свою очередь, $(w_1(\tau), v_1(\tau))$ удовлетворяет уравнениям

$$[w_1(\tau)]_l = \frac{[B_n^* \psi(\tau/w_1)]_l}{\sqrt{[B_n^* \psi(\tau/w_1)]_l^2 + \varepsilon_1^2}}, \qquad /19/$$

$$[v_1(\tau)]_l = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{[B_n^* \psi(\tau/w_1)]_l^2 + \varepsilon_1^2}}, \qquad /20/$$

$l = \overline{1,n}$, п.в. $\tau \in [0, \tau_1]$. В соответствии с [8] замена $\theta = \theta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_2^\varepsilon$, в /17/-/18/ и замена $\tau = \tau(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1^\varepsilon$, в /19/ - /20/ сведет эти равенства к соотношениям типа /3/-/4/ для (u_2, v_2) и (u_1, v_1) соответственно с вектор-функциями $\rho_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_2^\varepsilon)$ и $\rho_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1^\varepsilon)$, $\rho_1(0) = \rho_2(0) = \mu^\varepsilon$. По предположению, $V(t_1^\varepsilon, u_1, v_1) = V(t_2^\varepsilon, u_2, v_2)$, но тогда

$$V(t_1^\varepsilon, u_1, v_1) = V(t_2^\varepsilon, u_2, v_2) + \int_{t_2^\varepsilon}^{t_1^\varepsilon} (1 + \varepsilon_1 \sum_{l=1}^{n} v_{1l}(t)) dt,$$

что невозможно при $t_1^\varepsilon > t_2^\varepsilon$. Итак, $u_1(t)$, $u_2(t)$ имеют вид /3/, $v_1(t)$, $v_2(t)$ имеют вид /4/ с одной и той же вектор-функцией $\rho(t)$ и, следовательно, совпадают (с точностью до эквивалентных). Лемма доказана.

Л е м м а 4. Для того чтобы существовало решение ε-задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение задачи быстродействия (т.е. $x_0 \in G_n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из того, что $u^\varepsilon \in U$, $x(t_1^\varepsilon/u^\varepsilon) = 0$, $t_1^\varepsilon < +\infty$, и из теоремы 13 [10, с. 142] (а также из теоремы А.Ф.Филиппова [12]).

<u>Достаточность</u>. Пусть $(u_k(t), v_k(t)) \in \mathcal{M}$ - минимизирующая функционал V последовательность управлений, определенных на $[0, t_k]$, $t_k \geqslant 0$, $x(t_k/u_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. (Такая последовательность существует, так как $V(t_1^0, u^0, 0) = t_1^0 < \infty$, где t_1^0, $u^0(t)$, $0 < t < t_1^0$, - оптимальные в задаче быстродействия.) В силу компактности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем считать: $t_k \to \bar{t}$ при

$k \to +\infty$. Доопределим, где это потребуется, (u_k, v_k) на промежуток $[t_k, \bar{t}]$ так, чтобы вновь полученное управление, которое также обозначим через (u_k, v_k), было допустимым и чтобы $x(\bar{t}/u_k)=0$. (Это можно сделать, положив, например, $u_k(t)=v_k(t)=0$ при $t\in[t_k,\bar{t}]$, $t_k<\bar{t}$). Так как $\int_{t_k}^{\bar{t}}(1+\varepsilon_1\sum_{l=1}^{n} v_{kl}(t))dt \to 0$ при $k\to+\infty$, получаем

$$\int_0^{\bar{t}}\sum_{l=1}^{n} v_{kl}(t)dt \to \frac{1}{\varepsilon}(\inf_{\mathcal{M}} V(t_1,u,v)-\bar{t}). \qquad /21/$$

С учетом линейности по v_l $(l=1,\dots,n)$ функционала в правой части /21/ по аналогии с [10, с.143-145] установим существование таких u^ε, $v^\varepsilon\in U$, определенных на $[0,\bar{t}]$, что $x(\bar{t}/u^\varepsilon)=0$ и $V(\bar{t},u^\varepsilon,v^\varepsilon)=\inf_{\mathcal{M}} V$. Так как $\Omega_l=\{(u_l,v_l)\in R^1\times R^1:\ u_l^2+v_l^2\leqslant 1\}$ — выпуклое множество $(l=1,\dots,n)$, то $(u_l^\varepsilon(t))^2+(v_l^\varepsilon(t)^2)\leqslant 1$, п.в. $t\in[0,\bar{t}]$ (см. [13, с. 172-173]), что и устанавливает включение $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)\in\mathcal{M}$, при этом, очевидно, $\bar{t}=t_1^\varepsilon$.

Замечание 2. Изменение u^ε, v^ε на множестве нулевой меры из $[0,t_1^\varepsilon]$ не нарушит слабой сходимости управлений (использовавшейся при доказательстве предыдущей леммы), не изменит оптимальной траектории системы /1/ и значения $\min_{\mathcal{M}} V$.

Сказанное выше и выражение u^ε, v^ε по формулам /3/-/4/ дают право считать здесь и далее оптимальное управление допускающим производные сколь угодно высокого порядка, а неравенство /9/ выполненным при всех $t\in[0,t_1^\varepsilon]$.

Лемма 5. Для произвольного $x_0\in G_n\setminus\{0\}$ существует единственный не нулевой вектор $\mu^\varepsilon(x_0)$, определяющий оптимальное управление по формулам /3/-/4/, при этом на множестве $F_{T_\varepsilon}(x_0)$ выполняется неравенство /6/.

Доказательство единственности следует из утверждения леммы 3, формул /4/ и /3/, а также из того, что $\operatorname{rang} B_n = n$ и $t_1^\varepsilon>0$. Установим /6/. Пусть $(\omega_1(\tau), u_1(\tau))$, $0<\tau<\tau_1$, — оптимальное управление в задаче /14/, $(\omega_2(\tau), u_2(\tau))$, $0<\tau<\tau_2$, — оптимальное по быстродействию управление в системе /14/ из $z=0$ в $z=x$, $\tau_2<\tau_1$. Доопределяя $(\omega_2(\tau), u_2(\tau))$ при $\tau\in[\tau_2,\tau_1]$, если это потребуется, так, чтобы $u_2\in U$, $\omega_2=0$, и интегрируя /16/ на $[0,\tau_1]$, получаем /6/. При этом $T_\varepsilon(x)=\tau_2<\tau_1=T_\varepsilon(x_0)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Для произвольного $x_0\in G_n$ число нулей каждой координаты оптимального управления конечно.

§ 2. Исследование свойств гладкости

В соответствии с проведенными ранее рассуждениями определим функцию $t_1^{\varepsilon}: G_n \to R^1$ и отображение $\mu^{\varepsilon}: G_n \setminus \{0\} \to R^n \setminus \{\cdot\}$.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения: I) функция $T_{\varepsilon}(x)$ локально липшицева на множестве G_n ; 2) отображение $\mu^{\varepsilon}(x)$ непрерывно на $G_n \setminus \{0\}$, функция $T_{\varepsilon}(x)$ непрерывно дифференцируема на $G_n \setminus \{0\}$, причем $\operatorname{grad} T_{\varepsilon} = -\mu^{\varepsilon}$ при $x \in G_n \setminus \{0\}$; 3) функция $t_1^{\varepsilon}(x)$ непрерывна на G_n .

Доказательство. Заметим, во-первых, что G_n - открытое в R^n выпуклое множество, $\operatorname{int}_{R^n} G_n \ni 0$ (см., например, [8]). Утверждение I непосредственно следует из результатов работ [6,I4] , так как $T_{\varepsilon}(y)$ - время быстродействия в системе /I0/, $y \in G_n$. Утверждение 2 вытекает из /5/-/6/, /9/, из лемм I (часть I), 2 и замечания 3 (часть II) работы [6] .

Докажем утверждение 3. Определим функцию $f: G_n \times [0,+\infty) \to R^1$ вида

$$f(x, t_1^{\varepsilon}) = T_{\varepsilon}(x) - \int_0^{t_1^{\varepsilon}} (1 - \varepsilon_1^2 \sum_{\ell=1}^{n} ([B^*(W^{-1}(t))^* \mu^{\varepsilon}(x)]_{\ell}^2 + \varepsilon_1^2)^{-1/2}) dt .$$

Из утверждений I,2 теоремы 2, из непрерывной зависимости решений системы /8/ по начальным данным и из теоремы о неявных функциях следует, что уравнение $f(x, t_1^{\varepsilon}) = 0$ определяет непрерывную функцию $t_1^{\varepsilon} = t_1^{\varepsilon}(x)$, $x \in G_n \setminus \{0\}$. Таким образом, отображение $x : (0,+\infty) \times (R^n \setminus \{0\}) \to G_n \setminus \{0\}$ вида $x(t_1^{\varepsilon}, \mu^{\varepsilon}) = -\int_0^{t_1^{\varepsilon}} W^{-1}(t) B_n u(t, \mu^{\varepsilon}) dt$, где $u(t, \mu^{\varepsilon}) = u^{\varepsilon}(t)$ (см. /3/) , есть гомеоморфизм, т.е. $(t_1^{\varepsilon}(x)$, $\mu^{\varepsilon}(x))$ - непрерывное по $x \in G_n \setminus \{0\}$ отображение. Непрерывность $t_1^{\varepsilon}(x)$ в нуле вытекает из неравенства /23/, которое нам удобнее будет установить ниже. Теорема доказана.

Замечание 4. Из соотношения $\operatorname{grad} T_{\varepsilon} = -\mu^{\varepsilon}$ и из /8/ вытекает непрерывная дифференцируемость $T_{\varepsilon}(x)$ вдоль оптимальных траекторий. Отсюда же следует отсутствие у $T_{\varepsilon}(x)$ частных производных в начале координат. Этот же факт может быть получен с помощью применения результатов [I4] к задаче быстродействия в системе /I0/.

Предположим теперь, что рассматривается задача минимизации функционала /2/, заданного на решениях системы /I/, но уже при произвольном $z = 1, \dots , n$. Можно показать, что лемма 4 будет справедлива и в данном случае, т.е. при $x \in G_z$ определена функция Беллмана $T_{\varepsilon}^{z}(x)$ $(T_{\varepsilon}^{n}(x) = T_{\varepsilon}(x))$. Следующее утверждение су-

щественно дополняет теорему 2.

Т е о р е м а 3. Функция $T_\varepsilon^{r}(x)$ непрерывна на G_r и локально липшицева на $G_r \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда $r = n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого факта проводится по схеме доказательства теоремы 3 части I работы [6] с использованием соотношений /5/-/6/ и результатов [15].

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы $T_\varepsilon^{r}(x)$ была непрерывно дифференцируемой на $G_r \setminus \{0\}$, необходимо и достаточно, чтобы $T_r(x)$ была локально липшицевой на G_r.

С л е д с т в и е 2. Функция $T_\varepsilon^{r}(x)$ непрерывно дифференцируема, если и только если она локально липшицева.

Последние утверждения гарантируют непрерывную дифференцируемость $T_\varepsilon^{r}(x)$ на $G_r \setminus \{0\}$ в том и только том случае, когда $r = n$.

§ 3. Уравнение Беллмана. Гладкий синтез

Предыдущими утверждениями установлена

Т е о р е м а 4. Существует положительная функция $T_\varepsilon(x)$, являющаяся при $x \in G_n \setminus \{0\}$ решением уравнения

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x_j}a_{jk}x_k-\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x_j}b_{jl}^{n}\Big)^2+\varepsilon_1^2}=-1$$

и удовлетворяющая условию $T_\varepsilon(0)=0$. При этом оптимальное в ε-задаче синтезирующее управление есть

$$\hat{u}_l^{\varepsilon}(x)=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial T_\varepsilon(x)}{\partial x_j}b_{jl}^{n}}{\sqrt{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial T_\varepsilon(x)}{\partial x_j}b_{jl}\Big)^2+\varepsilon_1^2}},$$

$$\hat{v}_l^{\varepsilon}(x)=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial T_\varepsilon(x)}{\partial x_j}b_{jl}\Big)^2+\varepsilon_1^2}},$$

$l=1,\dots,n$.

З а м е ч а н и е 5. Решение $x(t/\hat{u}^\varepsilon)$, $x(0/\hat{u}^\varepsilon)=x_0\in G_n$ нелинейной системы

$$\frac{dx}{dt}=Ax+B_n\hat{u}^\varepsilon(x) \qquad /22/$$

существует в классическом смысле на промежутке $[0, t_1^\varepsilon(x_0)]$.

Действительно, $\hat{u}^{\varepsilon}(x)$ - непрерывное отображение, причем $|\hat{u}^{\varepsilon}_{\ell}(x)| \leqslant 1, \quad \ell = 1, \dots, n.$

Лемма 6. Отображение $\mu^{\varepsilon}(x)$ непрерывно дифференцируемо на $G_n \setminus \{0\}$.

Доказательство следует из вида отображения $x(t^{\varepsilon}_1, \mu^{\varepsilon})$ и теоремы о неявных функциях.

Следствие 3. Функция $T_{\varepsilon}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, отображения $\hat{u}^{\varepsilon}(x)$ и $\hat{v}^{\varepsilon}(x)$ непрерывно дифференцируемы на $G_n \setminus \{0\}$.

Зафиксируем произвольно $x_0 \in G_n \setminus \{0\}$. Множество $F_{T_{\varepsilon}(x_0)}$ вида /5/ компактно, так как T_{ε} - время быстродействия в системе /10/, непрерывное (и даже локально липшицево) на G_n (см., например, [15]). Отсюда и из следствия 3 вытекает, что правая часть /22/ удовлетворяет на $F_{T_{\varepsilon}(x_0)}$ условию Липшица с некоторой константой L_F. Следовательно, применение синтезирующего управления $\hat{u}^{\varepsilon}(x)$ в системе /1/ обеспечивает существование, единственность и непрерывную зависимость по начальным данным из $G_n \setminus \{0\}$ решений этой системы, что важно как с практической, так и с теоретической стороны [11].

§. 4. Связь ε-задачи с задачей линейного быстродействия

Теорема 5. На множестве G_n имеет место неравенство

$$t^{\varepsilon}_1(x) \leqslant (1+\varepsilon) T_n(x). \qquad /23/$$

Действительно, при произвольном $x_0 \in G_n$:

$$T_{\varepsilon}(x_0) = V(t^{\varepsilon}_1, u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}) = \min_{x(t_1/u)=0;\, \mathcal{U}} V(t_1, u, v) =$$

$$= \min_{x(t_1/u)=0;\, (u,0)\in \mathcal{U}} V(t_1, u, 0) = T_n(x_0).$$

Далее,

$$t^{\varepsilon}_1(x_0) = V(t^{\varepsilon}_1, u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}) - \varepsilon_1 \int_0^{t^{\varepsilon}_1} \sum v^{\varepsilon}_{\ell}(t)\, dt \leqslant T_n(x_0) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\, t^{\varepsilon}_1(x_0).$$

Из неравенства /23/ следует непрерывность $t^{\varepsilon}_1(x)$ в начале координат: очевидно, $t^{\varepsilon}_1(x) = T_n(x) = 0$ при $x=0$, причем $t^{\varepsilon}_1 \geqslant 0$, а $T_n(x)$ непрерывна на G_n.

Теорема 5 устанавливает "степень близости" решений ε-задачи и задачи оптимального быстродействия, когда $r = n$.

В заключение остается рассмотреть случай $1 \leqslant r < n$. Очевидно, $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n$ и $t^{\varepsilon}_1(x) \leqslant T_r(x)$, как только $x \in G_r$. Зафиксируем произвольное натуральное $r < n$ и точ-

ку $x_0 \in G_r$. Будем считать матрицу B_r имеющей размерность $n \times n$ (это всегда можно сделать, дополнив вектор управлений до n-мерного, а матрицу B_r – нулями, где это потребуется, что не изменит системы /I/). Пусть $\|\cdot\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\cdot|$ – векторная норма в R^n (этим же символом обозначим согласованную с ней норму $n \times n$-матриц).

Лемма 7. Для решений $x(t/u)$, $x(0/u)=x_0$ системы /I/ имеет место оценка

$$\|x(t_1^\varepsilon(x_0)/u^\varepsilon)\| < e^{\|A\| t_1^\varepsilon(x_0)} \|B_n - B_r\| \, t_1^\varepsilon(x_0). \qquad /24/$$

Полученные в § I результаты для задач оптимального быстродействия в случае $r<n$ могут применяться, например, в следующем. Матрица B_r дополняется до матрицы B_n полного ранга функциями $\varphi_1(\varepsilon_1), \dots, \varphi_k(\varepsilon)$, $k \geqslant n-2$, такими, что $\varphi_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $i=1,\dots,k$. Оценка /24/ гарантирует, что при воздействии на систему голоморфного управления $(u_1^\varepsilon(t),\dots$ $\dots, u_r^\varepsilon(t)) \in U_r$ (или допустимого непрерывного синтезирующего управления $(\hat{u}_1^\varepsilon(x), \dots, \hat{u}_r^\varepsilon(x))$ решения системы /I/ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будут попадать в сколь угодно малую окрестность начала координат за время, не большее времени быстродействия.

Поступила в ред.-изд.отдел
14 октября 1977 г.

Литература

I. Красовский Н.Н. К теории оптимального регулирования.- Прикладная математика и механика, 1959, т.23, вып.4, с.625-639.

2. Дубовицкий А.Я., Рубцов В.А. Линейные быстродействия.- Журнал вычислит.математики и мат.физики, 1968, т.8,№5,с.937-949.

3. Кун Л.А.,Пронозин Ю.Ф. К регуляризации метода Беллмана в задачах оптимального быстродействия.-Докл. АН СССР, 1971,т.200, № 6, с.1294-1297.

4. Кун Л.А.,Пронозин Ю.Ф. Достаточные условия гладкости функции Беллмана в линейных задачах оптимального быстродействия.- Техническая кибернетика, 1972, № I, с. 9-16.

5. Кун Л.А.,Пронозин Ю.Ф. Регуляризация метода динамического программирования в линейных задачах оптимального быстродействия.-Техническая кибернетика, 1972; № 2, с. 3-7.

6. Пронозин Ю.Ф. Исследование свойств гладкости функции Беллмана по уравнению движения системы в задачах оптимального быстродействия. I,II.-Автоматика и телемеханика, 1972, № 12, с. 22-32, 197?, № I, с. 38-46.

7. Пронозин Ю.Ф. Об оптимальных быстродействиях.-Докл.АН СССР, 1975, № 5, т. 221, с. 1042-1045.

8. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.- М.: Наука, 1969. - 392 с.

9. Зубов В.И. Лекции по теории оптимального управления.I.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972, - 201 с.

10. Понтрягин Л.С.,Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.-М.:Наука, 1969.-391 с.

11. Летов А.М. Некоторые нерешенные задачи теории оптимального управления.-Дифференц.уравнения, 1970, т.6, № 4, с.592-615.

12. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.-Вестник Моск.ун-та. Серия математика,механика, 1959, № 2, с. 25-32.

13. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.-М.: Наука, 1972, - 250 с.

14. Петров Н.Н. О функции Беллмана для задачи оптимального быстродействия.-Прикладная математика и механика, 1970, т. 34, вып. 5, с. 820-826.

15. Петров Н.Н. О непрерывности обобщенной функции Беллмана.-Дифференц.управления, 1970,т.6, № 2,с.373-374.

16. Сивов В.В. ε-задача о линейных быстродействиях.-В кн.: 4-я Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тез.докл. Новосибирск, 1977, с.71-72.