Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск I8.
УДК 519.3

О ВЫПУКЛОСТИ ДОСТИЖИМЫХ МНОЖЕСТВ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.И.Суслов (Новосибирск)

В работе [I] рассматривается динамическая система вида

$$\dot{x} = f(t, x, u),$$
$$u \in \mathcal{U},$$

где $\mathcal{U} \subset R^m$ - компакт,

$$f(t, x, \mathcal{U}) = f(t, x', \mathcal{U})$$

при $x, x' \in \mathcal{D}(t)$,где $\mathcal{D}(t)$ - множество достижимости системы за время t и $f(t, x, \mathcal{U})$ выпукло при всех (t, x) . При определенных ограничениях на функцию $f(t,x,u)$ доказывается,что $\mathcal{D}(t)$ выпуклы и компактны.

В настоящей работе этот результат переносится на случай динамических систем более общего вида. Как и в [I] , метод доказательства - это представление $\mathcal{D}(t)$ как интеграла от многозначного отображения.

Будем использовать следующие обозначения: R^n - n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot\rangle$ и нормой $|\cdot|$. Для $A \subset R^n$ через $cl A$, $co A$, $ex A$ обозначаем соответственно замыкание, выпуклую оболочку и множество крайних точек , $L^n([0,t])$ - пространство суммируемых на $[0,t]$ функций со значениями в R^n .

I°. На числовом отрезке $[0,T]$ рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = 0, \qquad /I/$$

$$u(t) \in \mathcal{U}(t) \subseteq R^m, \qquad /2/$$

где $\mathcal{U}$ - измеримое многозначное отображение [3,6,7] с компактными значениями, а $f(t,x,u): R^1 \times R^n \times R^m \to R^n$ измерима по t , непрерывна по x, u , и существует константа $K > 0$ такая, что

$$|f(t,x,u) - f(t,x',u)| \leq K|x - x'| \qquad /3/$$

при $t \in [0,T]$, $u \in \bigcup_{t\in[0,T]} \mathcal{U}(t)$. Кроме того, будем предполагать, что найдутся $c > 0$ и суммируемая на $[0,T]$ числовая функция z такие, что

$$\langle x, f(t,x,u)\rangle \leq c|x|^2 + z(t). \qquad /4/$$

Измеримые функции u такие, что $u(t)\in \mathcal{U}(t)$ при $t\in[0,T]$, будем называть управлениями. Траекторией системы /1/, /2/, соответствующей управлению u, будем называть абсолютно непрерывную функцию x такую, что

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(\tau)=f(\tau,x(\tau),u(\tau))$$

почти всюду на $[0,T]$. Множеством достижимости системы /1/-/2/ за время $t\in[0,T]$ будем называть такое множество $\mathcal{D}(t)\subset R^n$, что для $y\in\mathcal{D}(t)$ найдется траектория системы /1/-/2/ x, проходящая через y в момент времени t, т.е. $x(t)=y$.

Т е о р е м а 1. Пусть дана система /1/-/4/ и пусть для любых $t\in[0,T]$, $x,x'\in\mathcal{D}(t)$ верно

$$co f(t,x,\mathcal{U}(t))=co f(t,x',\mathcal{U}(t)),$$

где $f(t,x,\mathcal{U})=\{f(t,x,u):\ u\in\mathcal{U}\}$. Тогда при любом $t\in[0,T]$ множество $\mathcal{D}(t)$ выпукло и компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим на $[0,T]$ многозначные отображения F,S,S' следующим образом:

$$F(t)=\{f(t,x,u):\ x\in\mathcal{D}(t),\ u\in\mathcal{U}(t)\},$$

$$S(t)=co F(t),\quad S'(t)=cl\,ex\,co\,F(t).$$

Заметим, что $F(t)=f(t,x(t),\mathcal{U}(t))$ для произвольной траектории x, и, следовательно, по теореме 1 [6], многозначное отображение F измеримо. Тогда из той же теоремы следует, что S измеримо и, по теореме 1.7 [5] и следствию 1.2 [6], S' также измеримо. Используя условия /3/,/4/ и неравенство Йенсена, получаем, что существует константа $M>0$ такая, что

$$\sup\{|x|:\ x\in S(t),\ t\in[0,T]\}<M.$$

Тогда $\int_0^t S$ и $\int_0^t S'$ выпуклы и компактны при любом $t\in[0,T]$ (см. [2]), где для многозначного отображения H

$$\int_0^t H=\left\{\int_0^t h:\ h(\tau)\in H(\tau),\quad \tau\in[0,t],\quad h\in L^n([0,t])\right\}.$$

Кроме того,

$$\int_0^t S=\int_0^t S'$$

для $t\in[0,T]$ (см. [2]). Теперь понятно, что, доказав соотношения

$$\mathcal{D}(t)\subseteq\int_0^t S, \qquad /*/$$

$$\int_0^t S'\subseteq\mathcal{D}(t) \qquad /**/$$

для $t\in[0,T]$, тем самым мы докажем и теорему.

Возьмем $a \in \mathcal{D}(t)$, и пусть x - такая траектория системы /I/-/2/, что $x(t) = a$. Тогда

$$\dot{x}(\tau) \in f(\tau, x(\tau), U(\tau)) \subseteq S(\tau)$$

почти всюду на $[0,t]$. Это доказывает соотношение /ж/.

Далее, пусть $a \in \int\limits_0^t S'$ и $s \in L^n([0,t])$ такова, что $s(\tau) \in S'(\tau)$, $\tau \in [0,t]$ и $\int\limits_0^t s = a$. Рассмотрим следующий итеративный процесс. Пусть u^0 - некоторое управление на $[0,t]$ и x^0 - соответствующая ему траектория системы /I/-/2/. Так как $x^0(\tau) \in \mathcal{D}(\tau)$, то

$$s(\tau) \in f(\tau, x^0(\tau), U(\tau))$$

при $\tau \in [0,t]$ и, по теореме 7.I [7], существует управление u^1 такое, что

$$s(\tau) = f(\tau, x^0(\tau), u^1(\tau)).$$

Действуя аналогично, получаем последовательности управлений $\{u^n\}_{n=1}^{\infty}$ и траекторий $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$s(\tau) = f(\tau, x^n(\tau), u^{n+1}(\tau))$$

при $\tau \in [0,t]$; $n = 0,1,2,\ldots$.

Покажем, что последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[0,t]$. Обозначим $y^n = x^n - x^{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} |\dot{y}^n(\tau)| &= |\dot{x}^n(\tau) - \dot{x}^{n+1}(\tau)| = |f(\tau, x^n(\tau), u^n(\tau)) - \\ &- f(\tau, x^{n+1}(\tau), u^{n+1}(\tau))| = |f(\tau, x^n(\tau), u^n(\tau)) - \\ &- f(\tau, x^{n-1}(\tau), u^n(\tau)) + f(\tau, x^n(\tau), u^{n+1}(\tau)) - \\ &- f(\tau, x^{n+1}(\tau), u^{n+1}(\tau))| < K|y^{n-1}(\tau)| + K|y^n(\tau)|. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{d\tau}|y(\tau)| \leqslant |\dot{y}(\tau)|,$$

почти всюду на $[0,t]$ имеем

$$\frac{d}{d\tau}|y^n(\tau)| \leqslant K|y^n(\tau)| + K|y^{n-1}(\tau)|.$$

Теперь, применяя неравенство Гронуолла (см., например, [4, с.378])

$$|y^n(\tau)| \leqslant e^{K\tau}\int\limits_0^\tau e^{-K\omega}\cdot K\,|y^{n-1}(\omega)|\,d\omega$$

и используя индукцию, получаем

$$|y^n(\tau)| \leqslant K^{n-1}e^{K\tau}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\omega_1}\ldots\int\limits_0^{\omega_{n-1}} e^{-K\omega}|y^1(\omega)|\,d\omega\, d\omega_{n-1}\ldots d\omega_1.$$

Тогда по формуле

$$\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n\ldots dt_1=\frac{1}{n!}\left[\int_0^t f(\omega)d\omega\right]^n$$

получаем

$$|y^n(\tau)|\leqslant\frac{1}{n!}K^{n-1}e^{Kt}\left[\int_0^t e^{-K\omega}|y^1(\omega)|d\omega\right]^n.$$

Таким образом, равномерно на $[0,t]$

$$|x^n(\tau)-x^{n+1}(\tau)|\longrightarrow 0$$

при $n\longrightarrow\infty$. Тогда из соотношения

$$|\dot{x}^n(\tau)-s(\tau)|=|f(\tau,x^n(\tau),u^n(\tau))-f(\tau,x^{n-1}(\tau),u^n(\tau))|\leqslant K|x^n(\tau)-x^{n-1}(\tau)|$$

почти всюду на $[0,t]$ следует, что

$$x^n(\tau)=\int_0^t\dot{x}^n\longrightarrow\int_0^\tau s$$

равномерно на $[0,t]$. Покажем теперь, что функция x, $x(\tau)=\int_0^\tau s$, является траекторией системы /I/-/2/. В силу условия /3/, для сколь угодно малого $\varepsilon>0$ справедливо

$$f(\tau,x,U(\tau))\subseteq f(\tau,x',U(\tau))+B_\varepsilon^n$$

при x, достаточно близких к x' (здесь $B_\varepsilon^n=\{x\in R^n:|x|\leqslant\varepsilon\}$).

Следовательно, при достаточно больших n

$$\dot{x}^n(\tau)\in f(\tau,x(\tau),U(\tau))+B_\varepsilon^n$$

почти всюду на $[0,t]$, откуда

$$s(\tau)\in f(\tau,x(\tau),U(\tau))+B_\varepsilon^n$$

почти всюду на $[0,t]$. В силу произвольности ε и компактности $f(\tau,x(\tau),U(\tau))$, $\tau\in[0,t]$, получаем

$$\dot{x}(\tau)\in f(\tau,x(\tau),U(\tau)).$$

По теореме 7.I [7], это означает, что x - траектория системы /I/-/2/. Тогда $a=x(t)\in\mathcal{D}(t)$. Соотношение /**/ доказано.

Следствие. Пусть дана система

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,x,u),\quad x(0)=0 \qquad /5/$$

вместе с /2/-/4/, где $A(t)=(a_{ij}(t))$, $a_{ij}\in L^1([0,T])$, $i,j=1,2,\ldots,n$, а функция f удовлетворяет условию теоремы I. Тогда множества достижимости системы /5/,/2/ $\mathcal{D}(t)$ выпуклы и компактны при $t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть $X(t)$ - решение матричного уравнения

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)$$

с начальным условием

$$X(0)=E,$$

где E - единичная матрица. Тогда после преобразования

$$x=X(t)y$$

система /5/ перейдет в систему

$$\dot{y} = X^{-1}(t)f(t,X(t)y,u),$$

удовлетворяющую условиям теоремы I. Следовательно, множества достижимости этой системы $\mathcal{D}'(t)$ выпуклы и компактны. Но поскольку $X(t)$ осуществляет линейное непрерывное преобразование, то множества $\mathcal{D}(t)=X(t)\mathcal{D}'(t)$ также выпуклы и компактны.

2°. В заключение приведем пример системы, к которой применима доказанная теорема.

На плоскости рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1\cos^2((1-u_1)x_1)+(1-u_1)\sin^2(u_1u_2x_2),\\ \dot{x}_2 &= u_2\cos^2((1-u_2)x_2)+(1-u_2)\sin^2(u_2u_1x_1),\\ x_1(0)&=0,\ x_2(0)=0 \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{U}(t)=\mathcal{U}=\left\{(u_1,u_2)\in R^2:\ 0\leqslant u_i\leqslant 1,\ i=1,2\right\}.$$

Условие равномерной липшицевости /3/ здесь очевидно выполнено. Условие /4/ обеспечивало нам при доказательстве теоремы равномерную ограниченность множеств $S(t)$, $t\in[0,T]$. Здесь мы сразу имеем эту равномерную ограниченность. Остается проверить, что при $x,x'\in\mathcal{D}(t)$, $t\in[0,T]$ выполняется

$$co\,f(x,\mathcal{U}) = co\,f(x',\mathcal{U}).$$

Легко видеть, что для любого $x\in R^n$ крайние точки множества $\mathcal{U}$ при отображении $f(x,\cdot)$ остаются на месте и $f(x,\mathcal{U})\subseteq\mathcal{U}$. Таким образом, $co\,f(x,\mathcal{U})=\mathcal{U}$ при любом $x\in R^2$. Следовательно, по теореме I, $\mathcal{D}(t)$ выпукло и компактно при $t\in[0,T]$. Более того,

$$\mathcal{D}(t)=\int_0^t\mathcal{U}=t\mathcal{U}=\left\{tu\in R^2:\ u\in\mathcal{U}\right\}.$$

Поступила в ред.-изд.отдел
II апреля 1977 г.

Л и т е р а т у р а

1. Hermes H. On the closure and convexity of attainable sets in finite and infinite dimensions. - J.SIAM Control, 1967, v. 5, p. 409-417 and Errata: On the closure and convexity of attainable sets in finite and infinite dimensions. - J.SIAM Control, 1968, v. 6, p. 594-595.

2. Aumann R.J. Integrals of set-valued function. - J.Math. Analysis and Applic, 1965, v. 12, p. 1-12.

3. Bridgland T.F. Trajectory integrals of set-valued functions. - Pacific J.Math, 1970, v. 33, p. 43-68.

4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974. - 479 с.

5. Аркин В.И., Левин В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи. - Успехи мат. наук, 1972, т. 27, № 3, с. 21-77.

6. Rockafellar R.T. Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. - J.Math. Analysis and Applic, 1969, v. 28, p. 4-25.

7. Himmelberg C.J. Measurable relations. - Fundam. Math., 1975, v. 87, p. 53-72.