Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 18.

УДК 519.95

ОБОБЩЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

В.А.Шпак (Новосибирск)

В различных приложениях теории управления, исследования операций и оптимизационных методов встречаются задачи, в которых определение целевой функции (или критерия оптимизации) связано с известными трудностями, так как цели управления характеризуются не одним, а несколькими показателями. Исследователи часто стремятся объединить эти показатели тем или иным способом в один обобщенный показатель, используя последний при постановке соответствующих задач оптимизации. Методам построения таких обобщенных показателей посвящено много работ (см., например, обзор [4]).

В настоящей работе исследуются обобщенные показатели, предназначенные для задач управления процессами выполнения программ развития, которые предполагаются известными. Использование обобщенных показателей обеспечивает устойчивое выполнение указанных программ за возможно короткие сроки. При этом важной самостоятельной задачей является обоснование самих программ развития.

Типичной задачей управления с использованием обобщенных показателей является задача управления качеством и выпуском промышленной продукции многономенклатурного производства. Одну из таких задач можно сформулировать следующим образом. Системе производства (предприятию, производственному объединению и т.п.) задана программа выпуска (улучшения качества) промышленной продукции, предусматривающая достижение к определенным срокам необходимых показателей выпуска (качества) по нескольким видам производимой продукции. Требуется построить обобщенный показатель, позволяющий в каждый момент времени оценить выполнение принятой программы и стимулирующий устойчивое ее выполнение для всех видов продукции за возможно короткие сроки.

1. Основные понятия и допущения

1.1. Будем считать, что состояние управляемой системы описывается в каждый момент времени n -мерным вектором $x=\{x_1, \ldots, x_n\} \in R^n$, компонентами которого являются показатели состояния системы. Такими показателями для систем производства могут служить, например, валовые объемы продукции различных видов, а также соответствующие показатели качества.

1.2. Пусть непрерывная вектор-функция $\bar{x}(t)=\{\bar{x}_1(t),\ldots,\bar{x}_n(t)\}$, заданная на отрезке $[0,T]$ с множеством значений в R^n, характеризует желаемую программу развития. Множество значений вектор-функции $\bar{x}(t)$ в пространстве R^n будем называть программной траекторией. Обозначим его через M.

1.3. Введем множество возможных управлений $U=\{u\}$, элементами которого являются управления u. Содержательный смысл последних зависит от специфики конкретных задач. Здесь нам важно только то, что каждому управлению $u\in U$ и вектору $x_0\in X_u^0$, где множество X_u^0 есть множество допустимых начальных состояний системы, из которых при выборе управления u возможно развитие системы, соответствует определенное развитие системы - непрерывная, кусочно-гладкая вектор-функция времени $x(t,u,x_0)$, заданная на отрезке $[0,T]$ с множеством значений в R^n. Ее компоненты $x_k(t,u,x_0)$ $(k=\overline{1,n})$ отражают закономерности изменения показателей состояния системы при управлении $u\in U$.

1.4. Пусть $S(x)$ - вещественная непрерывная функция состояния системы, характеризующая "затраты" основного "ресурса", лимитирующего развитие системы. Будем считать, что функция $\bar{S}(t)=S(\bar{x}(t))$ строго монотонно возрастает с увеличением t и, кроме того, для каждого $u\in U$ и $x_0\in X_u^0$ выполнено $S(x(t,u,x_0))\leqslant\bar{S}(t)$ при всех $t\in[0,T]$.

1.5. Обозначим множество возможных состояний системы за весь период T буквой $\mathcal{D}$. Будем считать, что $int\mathcal{D}\neq\emptyset$, $M\subset\mathcal{D}$ и $\bar{x}(t)\in int\mathcal{D}$ при $t\in(0,T)$ и, кроме того, множество $\mathcal{D}$ замкнуто и компактно в R^n. Множеством эквивалентной достижимости по основному ресурсу в момент времени t назовем множество.

$$B_t=\left\{x: x\in\mathcal{D},\ S(x)\leqslant S(\bar{x}(t))\right\}.$$

Очевидно, что при каждом $t\in[0,T]$ точка $\bar{x}(t)\in B_t$.

1.6. Определение. Обобщенным показателем для управляемой системы будем считать вещественную функцию $W(x)$, определенную в $\mathcal{D}$. Обобщенный показатель $W(x)$ назовем состоятельным, если $W(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) функция $W(x)$ имеет строгий максимум на множестве B_t в точке $\bar{x}(t)$, т.е. $W(\bar{x}(t))=\max W(x)$, $x\in B_t$, при этом если $x\neq\bar{x}(t)$, то $W(x)<W(\bar{x}(t))$ при всех $t\in[0,T]$;

б) вдоль программной траектории функция $W(\bar{x}(t))$ строго монотонно возрастает с увеличением t.

Ниже будет показано, что с этими условиями связаны важные свойства состоятельного обобщенного показателя, позволяющие обоснованно использовать его в задачах управления и оптимизации.

2. Свойства состоятельного обобщенного показателя

Т е о р е м а 2.I. Пусть для управляемой системы выполнены допущения I.I, I.2 -I.5. Тогда существует состоятельный обобщенный показатель.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим на множестве $\mathcal{D}$ функцию $\tau(x)$ следующим образом:

$$\tau(x) = \begin{cases} \bar{S}^{-1}(S(x)) & \text{при} \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad S(x) \geqslant \bar{S}(0), \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad S(x) < \bar{S}(0). \end{cases} \qquad /2.1/$$

Из принятых допущений и вида функции $\tau(x)$ следует, что она определена и непрерывна на всем множестве $\mathcal{D}$. Покажем теперь, что обобщенный показатель $W(x) = \tau(x) - \rho(x, M)$, где функция $\rho(x, M)$ есть расстояние от точки x до программной траектории, является состоятельным. Заметим вначале, что вдоль программной траектории $W(\bar{x}(t)) = t$, т.е. условие б) выполняется автоматически. Выполнение условия а) следует из очевидного неравенства:

$$W(x) = \tau(x) - \rho(x, M) < \tau(x) \leqslant \bar{S}^{-1}(\bar{S}(t)) = t = W(\bar{x}(t)),$$
$$x \in B_t, \quad x \neq \bar{x}(t).$$

Из теоремы 2.I вытекает, что практически во всех задачах с заданными программами развития и основными ресурсами можно построить состоятельный обобщенный показатель.

Для дальнейшего сделаем следующие предположения. Множество возможных состояний системы в каждый момент времени (будем обозначать его через $\mathcal{D}_t$) задается в виде:

$$\mathcal{D}_t = \left\{ x : x \in R^n, \ S_i(x) \leqslant \tilde{S}_i(t), \ i = 1, \dots, \ell \right\},$$

где $\{S_i(x)\}$ - выпуклые, дважды дифференцируемые функции. Функции $\{\tilde{S}_i(t)\}$ характеризуют количество ресурса типа i, имеющегося в системе в момент времени t, непрерывны и кусочно гладки по t. Примем для определенности, что $S_1(x) = S(x)$, т.е. в этом случае при всех t множество $B_t \supset \mathcal{D}_t$ и при недостаточном количестве ресурсов программные состояния могут быть недостижимы в соответствующие моменты времени. Однако оказывается возможным при некоторых предположениях определить такое управление системой, что эти состояния достижимы за наименьшее возможное время при наличии в системе необходимого количества ресурсов. Состоятельный обобщенный показатель $W(x)$ будем считать строго вогнутой, дважды дифференцируемой функцией в R^n, а кроме того, $\nabla W \neq 0$ нигде в $\mathcal{D}$.

Определим с помощью $W(x)$ следующее управление системой, обозначив его через $\bar{u}$. На множестве $\mathcal{D}_t$, оптимизируя состояние системы в каждый момент времени, т.е. соответствующее этому $\bar{u}$ развитие системы, получаем вектор-функцию $x(t, \bar{u}, X_0)$, кото-

рая при всех t является решением задачи

$$\max_{x\in\mathcal{D}_t} W(x) = W(x(t,\bar{u},x_0)). \qquad /2.2/$$

Сделанные предположения относительно вида функций $W(x)$ и $\{S_i(x)\}$ позволяют выполнить условия теоремы Куна-Таккера, обеспечивающие существование и единственность решения задачи /2.2/, которое при всех t удовлетворяет системе уравнений

$$\nabla W(x(t,\bar{u})) - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(t)\nabla S_i = 0, \qquad /2.3/$$

$$\lambda_i(t)(S_i(x(t,\bar{u})) - \tilde{S}_i(t)) = 0, \quad i=1,\dots,\ell, \qquad /2.4/$$

где $\lambda_i(t)\geqslant 0$ - множители Лагранжа.

Обозначим

$$C_t^* = \{i / S_i(x(t,\bar{u})) = \tilde{S}_i(t)\}.$$

Т е о р е м а 2.2. Пусть выполнены сделанные выше предположения и, кроме того, условия

а) градиенты $\{\nabla S_i\}$ $(i\in C_t^*)$ линейно-независимы вдоль решения /2.4/,/2.3/;

б) $\lambda_i(t) > 0$, если $i\in C_t^*$.

Тогда вектор-функция $x(t,\bar{u},x_0)$ непрерывна и кусочно-гладка по t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система /2.3/ - /2.4/ имеет $n+\ell$ уравнений относительно $n+\ell+1$ неизвестных x,λ,t. Матрица Якоби этой системы относительно переменных x,λ в точке $x(t,\bar{u},x_0)$, λ, t равна

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 W - \sum\limits_{i=1}^{\ell}\lambda_i\nabla^2 S_i & -\nabla S_i \ \dots - \nabla S_\ell \\ \lambda_1\nabla^T S_1 & S_1 \\ \vdots & \ddots \\ \lambda_\ell \nabla^T S_\ell & \qquad S_\ell \end{bmatrix}. \qquad /2.5/$$

Можно показать (см. [5, теорема I4]), что из условий а), б) и сделанных предположений следует существование матрицы, обратной к /2.5/. В силу теоремы о неявной функции, вектор-функция $[x(t,\bar{u},x_0),\lambda(t)]$, удовлетворяющая системе /2.3/ - /2.4/, непрерывна и дифференцируема во всех точках гладкости функций $\{\tilde{S}_i(t)\}$.

Т е о р е м а 2.3. Пусть при управлении $\bar{u}$ заданное состояние $\bar{x}(T)$ достижимо в момент времени T^*; выполнены условия теоремы 2.2 и, кроме того, функция $W(x(t,\bar{u},x_0))$ строго возрастает по t. Тогда T^* есть наименьшее время достижения системой состояния $\bar{x}(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное, т.е. что существуют управление u, вектор $y_0\in X_u^0$ и соответствующее ему развитие системы - непрерывная, кусочно-гладкая вектор-функция $x(t,u,y_0)$ такая, что в момент времени $\tilde{T}<T^*$ выполняется $x(\tilde{T},u,y_0) = \bar{x}(T)$. Заметим, что поскольку вектор-функция $x(\tilde{T},u,x_0)$ кусочно-гладкая по t, то разность $\tilde{T}-T^*$ мож-

но представить в виде

$$\tilde{T}-T^{*}=\int_{0}^{\tilde{T}}[1-\frac{d}{dt}W(x(t,u,y_0))]dt-\int_{0}^{T^{*}}[1-\frac{d}{dt}W(x(t,\bar{u},x_0))]dt+$$
$$+W(x(\tilde{T},u,y_0))-W(y_0)-W(x(T^{*},\bar{u},x_0))+W(x_0).$$

Отсюда, учитывая соотношения $x(\tilde{T},u,y_0)=x(T^{*},\bar{u},x_0)=\bar{x}(T)$, $W(x(t,\bar{u},x_0))\geqslant W(x(t,u,y_0))$ при всех t и условие строго монотонного возрастания $W(x(t,\bar{u},x_0))$, имеем

$$\tilde{T}-T^{*}=\int_{T^{*}}^{\tilde{T}}[1-\frac{d}{dt}W(x(t,\bar{u},x_0))]dt-\int_{0}^{T^{*}}\frac{d}{dt}[W(x(t,\bar{u},x_0))-W(x(t,u,y_0))]dt+$$
$$+W(x_0)-W(y_0)=\tilde{T}-T^{*}+\int_{T^{*}}^{\tilde{T}}\frac{d}{dt}W(x(t,\bar{u},x_0))dt+W(x(T^{*},\bar{u},x_0))-$$
$$-W(x(\tilde{T},u,y_0))>\tilde{T}-T^{*}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из определения состоятельного обобщенного показателя легко видеть,что заданное состояние $\bar{x}(T)$ при управлении $\bar{u}$ достигается в момент, когда оно реально достижимо,т.е. когда в системе определенные ресурсы имеются в необходимом количестве.

Теорема 2.3 выражает то важное свойство состоятельного обобщенного показателя, согласно которому, если постоянно "стимулировать" систему за достижение возможно более высоких значений $W(x)$, то достижение намеченных состояний $\bar{x}(t)$ будет происходить за наименьшее время.

3. Устойчивость программного развития системы

Программную траекторию системы будем называть у с т о й ч и в о й п о Л я п у н о в у при управлении $u\in U$, если по любому $\varepsilon>0$ можно указать величину $\delta>0$ такую,что при $x_0\in X_u^0$ и $\rho(x_0,M)<\delta$ будет $\rho(x(t,u,x_0),M)<\varepsilon$, $t\geqslant 0$. Систему назовем W – управляемой, если существует управление $\tilde{u}\in U$ такое, что функция

$$\bar{V}(x(t,\tilde{u},x_0))=W(\bar{x}(t))-W(x(t,\tilde{u},x_0))\leqslant W(\bar{x}(0))-W(x_0)$$

при всех $x_0\in X_{\tilde{u}}^0$, $t>0$. Функция $\bar{V}(x(t,\tilde{u},x_0))$ характеризует меру отклонения системы, развивающейся по траектории, соответствующей управлению $\tilde{u}$, от наиболее желательного развития системы по программной траектории в каждый момент времени t.

Т е о р е м а 3.I. Пусть система W –управляемая для некоторого $\tilde{u}\in U$. Тогда программная траектория системы устойчива по Ляпунову при управлении $\tilde{u}$

Для доказательства определим функционал $V(x)$ следующим образом:

$$V(x)=W(\bar{x}(\tau(x)))-W(x), \qquad /3.I/$$

где $\tau(x)$ имеет вид /2.I/, и покажем для него выполнение свойств

а) для любой достаточно малой величины $C_1>0$ можно ука-

зать величину $c_2 > 0$ такую, что $V(x) > c_2$ при $x \in \mathcal{D}$, $\rho(x, M) > c_1$;

б) для сколь угодно малой величины $\gamma_2 > 0$ можно указать сколь угодно малую величину $\gamma_1 > 0$ такую, что при $\rho(x, M) < \gamma_1$ будет $V(x) \leqslant \gamma_2$;

в) функция $V(x(t, \tilde{u}, x_0)) \leqslant V(x_0)$ при $x_0 \in X^{\circ}_{\tilde{u}}$ и всех $t \geqslant 0$, пока $x(t, \tilde{u}, x_0) \in \mathcal{D}$. Повторяя далее ход рассуждений, изложенный в [3, при доказательстве достаточности условий теоремы I2,с.5I], получим требуемое.

Действительно, проверим выполнение свойства а) (свойство б) проверяется аналогично). Предположим, что оно не выполняется, т.е. существует $c_1 > 0$ и такая последовательность $\{x_n\}$, что $V(x_n) \leqslant \frac{1}{n}$, $\rho(x_n, M) > c_1$. Из компактности и замкнутости множества $\mathcal{D}$ следует, что существует $x_0 \in \mathcal{D}$, $\rho(x_0, M) \geqslant c_1$ и $V(x_0) = 0$. В силу /3.I/, $V(x)$ обращается в нуль только в точках программной траектории и при $x \bar{\in} M$, $V(x) > 0$. Следовательно, $x_0 \in M$, но, с другой стороны, $\rho(x_0, M) \geqslant c_1$. Полученное противоречие влечет за собой выполнение свойства а).

Наконец, проверим выполнение свойства в).

$$V(x(t, \tilde{u}, x_0)) = W(\bar{x}(\tau(x))) - W(x(t, \tilde{u}, x_0)) \leqslant$$
$$\leqslant W(\bar{x}(t)) - W(x(t, \tilde{u}, x_0)) = \bar{V}(x(t, \tilde{u}, x_0)). \qquad /3.2/$$

Так как при каждом t имеет место $S(x(t, \tilde{u}, x_0)) \leqslant \bar{S}(t)$, то $\tau(x) \leqslant t$ и, кроме того, функция $W(\bar{x}(t))$ строго монотонно возрастает. Это обеспечивает выполнение неравенства /3.2/ при всех t. Из предположения W -управляемости для $\tilde{u} \in U$ следует, что выполнено и свойство в).

Полученное утверждение показывает, что состоятельные обобщенные показатели аналогичны функциям Ляпунова динамических систем и способствуют обеспечению устойчивости принятой программы.

4. Управление многономенклатурным производством

В качестве примера построения и использования состоятельного обобщенного показателя рассмотрим систему многономенклатурного производства (предприятия, производственного объединения и т.п.), которая, согласно принятой программе (плану производства) обеспечивает выпуск различных видов продукции. Состояние системы производства определяется совокупностью показателей, характеризующих выполнение отдельных заданий по выпуску каждого вида продукции. Мы будем рассматривать практически важный случай пропорциональной программы развития, т.е. функции $\bar{x}_k(t) = x^{\circ}_k \cdot f(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\{x^{\circ}_k\}$ - начальные значения показателей, а функция $f(t)$ строго монотонно возрастает с увеличением t. Обоснованием для принятия пропорциональных программ развития производства служит сложившаяся практика планирования, а также

магистральные теоремы [8], согласно которым оптимальное развитие системы большую часть времени должно быть близко к неймановскому лучу, вдоль которого увеличение выпуска каждого вида продукции происходит с одинаковым темпом. Функция затрат основного ресурса линейная и определяется зависимостью

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k . \qquad /4.1/$$

Функция $\bar{S}(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \bar{x}_k(t)$, как сумма монотонных функций, строго монотонно возрастает. Заметим, что часто используемый в практике обобщенный показатель, характеризующий выполнение плана по "валу" и являющийся линейной комбинацией показателей выполнения отдельных планов, в данном случае не является состоятельным и его использование для оценки и стимулирования за достигнутые результаты приводит к выпуску системой одного вида продукции за счет свертывания производства других. Действительно, известно, что максимум линейной функции на множестве

$$B_t = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k \le \bar{S}(t),\ x \in R_n^+ \right\}$$

достигается в крайних точках, каждая из которых представляет вектор с одной отличной от нуля компонентой (мы исключаем из рассмотрения показатель, пропорциональный количеству затрат основного ресурса $\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k$, необходимого для достижения состояния x).

Рассмотрим обобщенный показатель

$$W(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \ln \frac{x_k}{x_k^\circ} , \qquad /4.2/$$

$$\alpha_k > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 .$$

Покажем, что при выборе значений параметров

$$\bar{\alpha}_k = \frac{x_k^\circ \cdot b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k^\circ} , \quad k = 1, 2, \ldots, n ,$$

он является состоятельным. Действительно, функция /4.2/ является строго вогнутой, поэтому достаточно показать, что точка $\bar{x}(t)$ является стационарной точкой функции Лагранжа

$$h = W(x) - \lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k x_k - \bar{S}(t) \Big) .$$

При выборе $\lambda = \dfrac{1}{f(t) \sum_{k=1}^{n} b_k x_k^\circ} > 0,\ k=1,2,\ldots,n$, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\bar{x}(t)) = \bar{\alpha}_k \frac{1}{\bar{x}_k(t)} - \lambda b_k = b_k\Big(\frac{1}{f(t) \sum_{k=1}^{n} x_k^\circ b_k} - \lambda \Big) = 0 .$$

Кроме того, с увеличением t функция $W(\bar{x}(t))$ строго монотонно возрастает, как сумма монотонных функций. Этими же свойствами обладает и средневзвешенный геометрический показатель

$$W^*(x) = e^{W(x)} = \prod_{K=1}^{n} \left[\frac{x_K}{x_K^\circ}\right]^{\bar{\alpha}_K} \qquad /4.3/$$

Согласно установленным выше свойствам, использование обобщенного показателя /4.3/ для оценки и стимулирования систем многономенклатурного производства за достигнутые результаты обеспечивает устойчивое выполнение всей совокупности плановых заданий по выпуску отдельных видов продукции за наиболее короткие сроки.

Отметим еще одно свойство обобщенного показателя /4.3/. Из /4.I/ следует

$$W(\bar{x}(t)) = \prod_{K=1}^{n} \left[\frac{\bar{x}_K(t)}{x_K^\circ}\right]^{\bar{\alpha}_K} = f(t) = \frac{\bar{S}(t)}{\sum_{K=1}^{n} b_K x_K^\circ}.$$

Таким образом, увеличение его значений вдоль программной траектории пропорционально увеличению количества затрат основного ресурса, требуемого для ее достижения. Практические приложения показателей /4.2/ и /4.3/ в задачах комплексной оценки и управления качеством промышленной продукции имеются в [6,7].

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность И.Б.Погожеву за постоянное внимание и помощь при написании настоящей работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
6 сентября 1978 г.

Литература

I. Погожев И.Б. Вопросы оптимизации и устойчивости систем выполнения заданий.-В кн: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, Наука , 1975, с.272-280.

2. Погожев И.Б. Обобщенные показатели выполнения програмы развития.-В кн.: АСУ и исследования операций. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 54-62.

3. Зубов В.И. Устойчивость движения.-М.: Высшая школа , 1973.

4. Емельянов С.В.,Борисов В.И., Малевич А.А.,Черкашин А.М. Модели и методы векторной оптимизации.-В кн.: Техническая кибернетика ,М., ВИНИТИ, 1973,с.386-447.

5. Фиакко, Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование.-М.: Мир , 1972.

6. Методика оценки уровня качества продукции с помощью комплексных показателей и индексов.-М.:Госстандарт, 1974.

7. Методика оценки уровня качества промышленной продукции.-М.:Госстандарт, 1973.

8. Красс И.А. Математические модели экономической динамики. М.: Советское радио , 1976.