Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., вып. 19.
УДК 519.854.3

# О МАТРИЦАХ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ СВЯЗНОСТИ

В.Л.Береснев, А.И.Давыдов ( Новосибирск )

1. Известно [1,2], что задача стандартизации (или, по-другому, размещения производства), имеющая вид:

$$\sum_{i\in\mathcal{U}} g_i^0 x_i + \sum_{j\in X}\sum_{i\in\mathcal{U}} g_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min_{(x_i)(x_{ij})};$$
$$\sum_{i\in\mathcal{U}} x_{ij} = 1, \qquad j\in X;$$
$$x_i \geqslant x_{ij}, \qquad i\in\mathcal{U}, \quad j\in X;$$
$$x_{ij}\in\{0,1\}, \qquad i\in\mathcal{U}; \quad j\in X,$$

где $\mathcal{U}=\{1,\ldots,m\}$, $X=\{1,\ldots,n\}$, допускает эффективное решение, если матрица $G=(g_{ij})$ $(i\in\mathcal{U},\ j\in X)$ обладает свойством связности. Это свойство состоит в том, что для любых номеров $i$, $k\in\mathcal{U}$ разность $g_{ij}-g_{kj}$ (как функция аргумента $j$) меняет знак не более одного раза при монотонном изменении $j\in X$. Известно также (см. [1,2]), что при замене в данной задаче матрицы $G$ на эквивалентную ей матрицу $H$ совокупность оптимальных решений задачи не изменяется.

Возникает вопрос: существует ли для данной матрицы $G$ эквивалентная ей матрица $H$, обладающая свойством связности, и можно ли построить эффективный алгоритм, дающий по матрице $G$ требуемую матрицу $H$. Для некоторого частного вида матрицы $G$ исследование этого вопроса проведено в [3]. Настоящая работа содержит описание алгоритма решения данной задачи в общем случае.

2. Поставим в соответствие исходной матрице $G$ некоторую булеву матрицу $\chi(G)$, которую назовем характеристической матрицей матрицы $G$. Она строится следующим образом. Пусть $\{i_1^j,\ldots,i_m^j\}$, $j\in X$, – такие перестановки множества $\mathcal{U}$, что $g_{i_1^j j}\leqslant\ldots\leqslant g_{i_m^j j}$. Подмножество $I\subset\mathcal{U}$, $|I|=k$, $0<k<m$, назовем характеристическим для матрицы $G$, если множество $\mathcal{J}(I)=\{j\in X \mid I=\{i_1^j,\ldots,i_k^j\},\ g_{i_{k+1}^j j}>g_{i_k^j j}\}$ непусто. При этом величину $a(I)=\sum_{j\in\mathcal{J}(I)}(g_{i_{k+1}^j j}-g_{i_k^j j})$ назовем весом характеристического множества $I$. Пусть $\{I_1,\ldots,I_S\}$ – упорядоченная совокупность характеристических множеств матрицы $G$. Тогда $\chi(G)=(\chi_{is})$ $(i\in\mathcal{U},\ s=1,\ldots,S)$, где $\chi_{is}=0$, если $i\in I_s$, и $\chi_{is}=1$, если $i\notin I_s$. Отметим, что если $s$-й столбец матрицы $\chi(G)$

для всякого $s=1,\dots,S$ умножить на вес характеристического множества $I_s$, то получим матрицу, эквивалентную $G$.

Будем говорить, что матрица $G=(g_{ij})$ $(i\in\mathcal{U}, j\in X)$ приводима к матрице $H$, если существует перестановка $j_1,\dots,j_n$ множества $X$ такая, что $H=(g_{ij_k})$ $(i\in\mathcal{U},\ k=1,\dots,n)$. Перестановку $j_1,\dots,j_n$ назовем перестановкой, приводящей матрицу $G$ к матрице $H$.

Следующее утверждение (доказательство см. в [I]) позволяет выгодно переформулировать задачу о построении матрицы, обладающей свойством связности и эквивалентной исходной.

Т е о р е м а I. Матрица $G$ эквивалентна матрице со свойством связности тогда и только тогда, когда матрица $\chi(G)$ приводима к матрице со свойством связности.

Таким образом, вопрос об эквивалентности исходной матрицы матрице со свойством связности сводится к вопросу о приводимости булевой матрицы к матрице со свойством связности.

3. Пусть задана булева матрица $G=(g_{ij})$ $(i\in\mathcal{U},\ j\in X)$ и требуется выяснить, приводима ли она к матрице со свойством связности.

Поставим в соответствие матрице $G$ множество пар $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}\times\mathcal{U}$, опряделяемое следующим образом: пара $p=(i,k)$ принадлежит множеству $\mathcal{V}$, если разность $h_{pj}=g_{ij}-g_{kj}$ (как функция аргумента $j$) не сохраняет знака и обратная пара $\bar{p}=(k,i)$ не является элементом множества $\mathcal{V}$. Очевидно, множество $\mathcal{V}$, которое назовем множеством пар, соответствующим матрице $G$, определяется по матрице $G$ неоднозначно. Подмножество $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}$ назовем ориентированным, если для любых пар $p$, $q\in\mathcal{V}_0$ не существует номеров $j$, $l\in X$ таких, что $h_{pj}=h_{ql}=1$, $h_{pl}=h_{qj}=-1$. Если матрица $G$ приводима к матрице со свойством связности, то существует соответствующее ей ориентированное множество $\mathcal{V}$. Действительно, пусть $\mathcal{V}$ - некоторое множество пар, соответствующее матрице $G$, и пусть $j_1,\dots,j_n$ - перестановка, приводящая $G$ к матрице со свойством связности. Заменим в множестве $\mathcal{V}$ пары $p$, для которых разность $h_{pj_k}$ меняет знак с минуса на плюс при возрастании $k$, на обратные. В результате получим ориентированное множество пар $\mathcal{V}'$. Далее, в силу сказанного, множество пар $\mathcal{V}$ всегда будем считать ориентированным.

Если множество $\mathcal{V}$ фиксировано и некоторым образом упорядочено, то можно рассмотреть матрицу $H=(h_{pj})$ $(p\in\mathcal{V},\ j\in X)$, которую назовем матрицей разности. Элементы этой матрицы принимают три значения: - I,0,I. Понятно, что матрица $G$ приводима к матрице со свойством связности тогда и только тогда, когда матрица $H$ приводима к матрице, у которой каждая строка меняет знак только один раз.

Пары $p$, $q \in \mathcal{V}$ назовем зависимыми и будем писать $p \sim q$, если существует последовательность пар $p_1, p_2, \dots, p_S$, $p_1 = p$, $p_S = q$ (назовем ее последовательностью, соединяющей $p$ и $q$) такая, что для всякого $s = 1, \dots, S-1$ найдутся номера $j_s$ и $\ell_s$, при которых $h_{p_s j_s} = h_{p_{s+1} j_s} = 1$, $h_{p_s \ell_s} = h_{p_{s+1} \ell_s} = -1$. Подмножество $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ назовем замкнутым, если для любых $p, q \in \mathcal{V}_0$ существует последовательность, соединяющая $p$ и $q$, элементы которой принадлежат $\mathcal{V}_0$. Будем говорить, что подмножество $\mathcal{V}_0$ полное, если для любых $p$, $q \in \mathcal{V}$ таких, что $p \in \mathcal{V}_0$ и $q \sim p$, имеем $q \in \mathcal{V}_0$. Понятно, что полное подмножество является замкнутым.

Пусть $\mathcal{V}_0$ – замкнутое подмножество. Множество $Y \subset X$ назовем связанным относительно $\mathcal{V}_0$, если для любого $j \in Y$ найдется пара $p \in \mathcal{V}_0$ такая, что $h_{pj} \neq 0$.

Л е м м а I. Пусть $Y$ – связанное множество относительно $\mathcal{V}_0$. Тогда если $\{Y_1, Y_2\}$ – разбиение $Y$, то найдутся номера $j_1 \in Y_1$, $j_2 \in Y_2$, для которых существует пара $p \in \mathcal{V}_0$ такая, что $h_{pj_1} \neq 0$, $h_{pj_2} \neq 0$, $h_{pj_1} \neq h_{pj_2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда для всякого $p \in \mathcal{V}_0$ выполняется одно из двух: либо $h_{pj} = 0$ для всякого $j \in Y_1$, либо $h_{pj} = 0$ для всякого $j \in Y_2$. Пусть $\mathcal{V}_1$ – множество пар, для которых выполняется первое условие, а $\mathcal{V}_2$ – второе. Поскольку $Y$ – связанное множество, то $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Но тогда для любых $p \in \mathcal{V}_1$, $q \in \mathcal{V}_2$ отношение $p \sim q$ не выполняется, что противоречит условию. Лемма доказана.

Пусть $p' = (i', k')$ – такая пара $p$ из множества $\mathcal{V}$, для которой число элементов (обозначим его $n'$) в множестве $\{j \in X / h_{p'j} \neq 0\}$ наибольшее.

Пусть $\{X', X_1, X_0\}$ – некоторое разбиение множества $X$. Будем говорить, что $i$-я строка матрицы $G$ является строкой первого, второго или третьего типа относительно данного разбиения, если выполняется соответствующее условие:

1. $g_{ij} = 1$ при $j \in X_1$, $g_{ij} = 0$ при $j \in X_0$;
2. $g_{ij} = 1$ при $j \in X_1$, $g_{ij} = g_{i\ell}$ при $j, \ell \in X'$;
3. $g_{ij} = 0$ при $j \in X_0$, $g_{ij} = g_{i\ell}$ при $j, \ell \in X'$.

Множество строк первого типа обозначим $\mathcal{U}_1$.

Разбиение $\{X', X_1, X_0\}$ множества $X$, где $|X'| \geq n'$, назовем правильным, если каждая строка матрицы $G$ является строкой одного из трех указанных типов.

Пусть $\{X', X_1, X_0\}$ – правильное разбиение и пусть $\mathcal{U}_1$ – множество номеров строк первого типа. Рассмотрим матрицы

$$G' = (g_{ij})\ (i \in \mathcal{U}_1, j \in X'),\quad G_1 = (g_{ij})\ (i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1,\ j \in X_1),$$
$$G_0 = (g_{ij})\ (i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1,\ j \in X_0).$$

Л е м м а 2. Матрица $G$ приводима к матрице со свойством связности тогда и только тогда, когда каждая из матриц $G', G_1, G_0$ приводима к матрице со свойством связности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одну сторону утверждение очевидно. Предположим, что $G', G_1, G_0$ приводимы к матрицам со свойством связности. Пусть $j_1, \ldots, j_n$ - такая перестановка множества $X$, что $\{j_1, \ldots, j_s\} = X'$, $\{j_{s+1}, \ldots, j_t\} = X_1$, $\{j_{t+1}, \ldots, j_n\} = X_0$, и матрицы $(g_{ij_k})$ $(i \in \mathcal{U}_1, k = 1, \ldots, s)$, $(g_{ij_k})$ $(i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1, k = s+1, \ldots, t)$, $(g_{ij_k})$ $(i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1, k = t+1, \ldots, n)$ обладают свойством связности. Тогда этим свойством обладает и матрица $(g_{ij_k})$ $(i \in \mathcal{U}, k = 1, \ldots, n)$. В этом несложно убедиться, непосредственно рассматривая разность $g_{ij_k} - g_{\ell j_k}$ и перебирая всевозможные случаи принадлежности $i$-й и $\ell$-й строк к множествам строк I-го, 2-го и 3-го типов. При этом необходимо учесть, что если $i$-я и $\ell$-я строки являются строками соответственно второго и третьего типов и $g_{ij_k} \neq g_{\ell j_k}$ при $k \leq s$, то в силу условия $|X'| \geq n'$ имеем $g_{ij_k} - g_{\ell j_k} = 0$ при $k > s$. Лемма доказана.

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения. Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_R\}$ - последовательность элементов (не обязательно различных) множества $\mathcal{U}$ и $\{j_1, j_2, \ldots, j_S\}$ - последовательность элементов (также не обязательно различных) множества $X$. Через $G(\{i_1, \ldots, i_R\}, \{j_1, \ldots, j_S\})$ обозначим матрицу размера $R \times S$, в которой на пересечении $r$-й строки и $s$-го столбца находится элемент $g_{i_r j_s}$. Аналогично, если $p_1, p_2, \ldots, p_R$ - последовательность элементов множества $\mathcal{V}$, то через $H(\{p_1, \ldots, p_R\}, \{j_1, \ldots, j_S\})$ обозначим матрицу размера $R \times S$, в $r$-й строке и $s$-м столбце которой находится элемент $h_{p_r j_s}$.

Л е м м а 3. Если $\mathcal{V} \neq \emptyset$, то существует правильное разбиение $\{X', X_1, X_0\}$ множества $X$ такое, что $X'$ - связанное множество относительно некоторого замкнутого подмножества $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опишем алгоритм построения требуемого разбиения $\{X', X_1, X_0\}$.

На первом шаге полагаем

$$X' = \{ j \in X \mid g_{i'j} \neq g_{k'j} \},$$
$$X_1 = \{ j \in X \mid g_{i'j} = g_{k'j} = 1 \},$$
$$X_0 = \{ j \in X \mid g_{i'j} = g_{k'j} = 0 \},$$
$$\mathcal{U}_1 = \{ i \in \mathcal{U} \mid g_{i'j} = g_{ij},\ j \notin X' \}.$$

Напомним, что через $(i', k')$ обозначена пара $p$, для которой число элементов в множестве $\{ j \in X \mid h_{pj} \neq 0 \}$ максимальное. Очевидно, $X'$ - связанное множество относительно пары $(i', k') \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_1$.

Пусть к началу некоторого шага имеем $\{X', X_1, X_0\}$ - разбиение множества $X$, $\mathcal{U}_1$ - множество номеров строк первого типа и пусть $X'$ - связанное множество относительно некоторого замкну-

того подмножества $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_1$. Предположим, что данное разбиение не является правильным, и пусть $i$-я строка для некоторого $i \in \mathcal{U}_1$ не принадлежит ни ко второму, ни к третьему типу. Возможен один из трех случаев: либо существуют номера $j_1 \in X_1$, $j_2 \in X_0$ такие, что $g_{ij_1} = 0$, $g_{ij_2} = 1$; либо $g_{ij} = 1$ для всякого $j \in X_1$, но существуют номера $j_1, j_2 \in X'$, для которых $g_{ij_1} \neq g_{ij_2}$, либо $g_{ij} = 0$ при любом $j \in X_0$, но найдутся номера $j_1, j_2 \in X'$ такие, что $g_{ij_1} \neq g_{ij_2}$.

Пусть имеет место первый случай. Рассмотрим множества

$$\mathcal{V}_0' = \{(\kappa, i) / \kappa \in \mathcal{U}_1\}, \quad X_1' = \{j \in X_1 / g_{ij} = 0\}, \quad X_0' = \{j \in X_0 / g_{ij} = 1\}.$$

Очевидно, $\mathcal{V}_0'$ - замкнутое множество. Покажем, что $X' \cup X_1' \cup X_0'$ - связанное множество относительно $\mathcal{V}_0'$. То, что $X_1'$ и $X_0'$ - связанные множества, видно непосредственно. Убедимся, что $X'$ - также связанное множество. Поскольку $X'$ является связанным относительно $\mathcal{V}_0$, то для всякого $j \in X'$ найдутся номера $i_1, i_2 \in \mathcal{U}_1$ такие, что $g_{i_1 j} \neq g_{i_2 j}$. Но тогда либо $g_{i_1 j} \neq g_{ij}$, либо $g_{i_2 j} \neq g_{ij}$. Так что $X'$ - связанное относительно $\mathcal{V}_0'$ множество.

Пусть имеет место 2-й случай. Поскольку $i \notin \mathcal{U}_1$, то $X_0' = \{j \in X_0 / g_{ij} = 1\} \neq \emptyset$. Рассмотрим множества $Y_1 = \{j \in X' / g_{ij} = 1\}$, $Y_2 = \{j \in X' / g_{ij} = 0\}$. По лемме I найдется пара $(i_1, \kappa_1) \in \mathcal{V}_0$ такая, что $g_{i_1 j_1} = g_{\kappa_1 j_2} = 1$, $g_{i_1 j_2} = g_{\kappa_1 j_1} = 0$ для некоторых $j_1 \in Y_1$, $j_2 \in Y_2$. Пусть $j \in X_0'$, тогда матрица $H(\{(i_1, \kappa_1), (i, \kappa_1)\}, \{j_1, j_2, j\})$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

Отсюда вытекает, что $X' \cup X_0'$ - связанное множество относительно замкнутого множества $\mathcal{V}_0' = \mathcal{V}_0 \cup \{(i, \kappa_1)\}$.

Если выполняется третий случай, то аналогичным образом получаем, что $X' \cup X_1'$, где $X_1' = \{j \in X_1 / g_{ij} = 0\}$ - связанное множество относительно замкнутого множества $\mathcal{V}_0' = \mathcal{V}_0 \cup \{(i, \kappa_1)\}$.

Таким образом, в результате работы шага алгоритма в любом из трех рассмотренных случаев получаем разбиение, первый элемент которого равен соответственно $X' \cup X_1' \cup X_0'$, $X' \cup X_0'$, $X' \cup X_1'$. Множество строк первого типа $\mathcal{U}_1'$ относительно каждого из трех разбиений содержит множество $\mathcal{U}_1 \cup \{i\}$, а первый элемент разбиения является связанным множеством относительно некоторого замкнутого подмножества $\mathcal{V}_0' \subset \mathcal{U}_1' \times \mathcal{U}_1'$. Отсюда следует, что описанный алгоритм за конечное число шагов, не превышающее $m$, закончит работу и будет построено требуемое разбиение. Лемма доказана.

4. Обратимся теперь к рассмотрению булевой матрицы $G = (g_{ij})(i \in \mathcal{U}, j \in X)$, где $X$ - связанное множество относительно некоторого замкнутого подмножества $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$. Обозначим через $\bar{X}$ множество $\{j \in X / h_{pj} \geqslant 0$ для всякого $p \in \mathcal{V}_0\}$, которое назовем мно-

жеством наименьших элементов множества $X$ относительно множества $\mathcal{V}_0$. Заметим, что если $G$ приводима к матрице со свойством связности, то $\overline{X} \neq \phi$.

Л е м м а 4. Пусть $\mathcal{V}_0$ - полное множество, а $\overline{X}$ - совокупность наименьших элементов множества $X$ относительно $\mathcal{V}_0$. Тогда если пара $p_0=(i_0,k_0)$ такая, что $h_{p_0 j}=1$ для некоторого $j\in\overline{X}$, $h_{p_0 \ell}=-1$ для некоторого $\ell\notin\overline{X}$, то $p_0\in\mathcal{V}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $j\in\overline{X}$, $\ell\notin\overline{X}$, то найдутся пары $p$, $q\in\mathcal{V}_0$, для которых $h_{pj}=1$, $\ell_{q\ell}=-1$. Пусть $p_1,p_2,\dots,p_s$, где $p_s=(i_s,k_s)$ - последовательность, соединяющая пары $p$ и $q$. Предположим, что эта последовательность имеет наименьшую длину из всех последовательностей, соединяющих $p$ и $q$. Кроме того, будем считать для единообразия обозначений, что $j=j_0$ и $\ell=\ell_s$.

Рассмотрим (см. рис. I) матрицы

$H(\{p_0,\dots,p_s\}, \{j_0,\dots,j_{s-1}, \ell_1,\dots,\ell_s\})$,

$G(\{i_0,k_0,\dots,i_s,k_s\}, \{j_0,\dots,j_{s-1},\ell_1,\dots,\ell_s\})$.

Покажем, что при любом $s=2,\dots,S-1$ имеют место равенства:

$$g_{i_s j_0}=g_{k_s j_0},\quad g_{i_s j_0}=g_{i_{s+1} j_0}.$$

Для доказательства первого равенства заметим, что $h_{p_s j_0}=0$. Действительно, $h_{p_s j_0}\neq 1$, поскольку $p_1,\dots,p_s$ - последовательность наименьшей длины, и $h_{p_s j_0}\neq -1$, поскольку $j_0\in\overline{X}$. Справедливость второго равенства вытекает из условия $j_0\in\overline{X}$ и вида матрицы

$$H(\{(i_s,k_s),(i_s,k_{s+1}),(i_{s+1},k_s)\}, \{j_0,j_s,\ell_s\}):$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ g_{i_s j_0}-g_{i_{s+1} j_0} & 1 & -1 \\ g_{i_{s+1} j_0}-g_{i_s j_0} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Возможны два случая: $g_{i_s j_0}=0$ для всякого $s=2,\dots,S$ и $g_{i_s j_0}=1$ при любом $s=2,\dots,S$. Рассмотрим первый случай. Пусть $r$ - наибольший из номеров $s$, для которых $g_{i_0 \ell_s}=1$. Если номеров $s$ с таким свойством не существует, то положим $r=0$. Покажем, что $g_{i_0 j_r}=1$ при $r>0$. Действительно, предположим, что $g_{i_0 j_r}=0$. Тогда из вида матрицы $H(\{(i_r,i_0),(i_r,k_r)\}, \{j_0,j_r,\ell_r\})$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

следует, что $j_0\notin\overline{X}$.

Учитывая доказанное и вид матрицы $H(\{(i_0,k_{r+1}),(i_r,k_r)\}, \{j_r,\ell_{r+1}\})$, получаем $(i_0,k_{r+1})\sim(i_{r+1},k_{r+1})$.

| | $j_0$ | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $\cdots$ | $j_{S-1}$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $\cdots$ | $l_{S-1}$ | $l_S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | I | | | | | | | | | | | -I |
| $p_1$ | I | I | | | | | -I | | | | | |
| $p_2$ | 0 | I | I | | | | -I | -I | | | | |
| $p_3$ | 0 | | I | I | | | | -I | -I | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | | |
| $p_{S-1}$ | 0 | | | | | I | | | | | - I | |
| $p_S$ | 0 | | | | | I | | | | | - I | - I |
| $i_0$ | I | | | | | | | | | | | 0 |
| $K_0$ | 0 | | | | | | | | | | | I |
| $i_1$ | I | I | | | | | 0 | | | | | |
| $K_1$ | 0 | 0 | | | | | I | | | | | |
| $i_2$ | | I | I | | | | 0 | 0 | | | | |
| $K_2$ | | 0 | 0 | | | | I | I | | | | |
| $i_3$ | | | I | I | | | | 0 | 0 | | | |
| $K_3$ | | | 0 | 0 | | | | I | I | | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | | |
| $i_{S-1}$ | | | | | | I | | | | | 0 | |
| $K_{S-1}$ | | | | | | 0 | | | | | I | |
| $i_S$ | | | | | | I | | | | | 0 | 0 |
| $K_S$ | | | | | | 0 | | | | | I | I |

Рис. I

Несложно увидеть также (см. рис.I) , что

$$(i_0, K_0) \sim (i_0, K_S) \qquad \text{и} \qquad (i_0, K_{s+1}) \sim (i_0, K_s)$$

при любом $s = r+1, \dots, S-1$. Так что $p_0 \sim p_{r+1}$ и, следовательно, $p_0 \in V_0$ .

Итак, в первом случае лемма доказана. По аналогичной схеме можно убедиться в ее справедливости, когда $g_{i_S j_0} = 1$ при любом $s = 2, \dots, S$ . Пусть $r$, $0 \le r < S$ , - наибольший из номеров $s$ ,для которых $g_{K_0 l_s} = 0$ . Тогда $g_{K_0 j_r} = 0$ и, следовательно,

$$(i_{r+1}, K_0) \sim (i_{r+1}, K_{r+1}).$$

Кроме этого, $(i_{\bullet} , K_0) \sim (i_S, K_0)$ и $(i_{s+1}, K_0) \sim (i_s, K_0)$ при любом $s = r+1, \dots, S-1$. Таким образом, и во втором случае

$P_0 \sim P_{\tau+1}$ . Лемма доказана.

Основу алгоритма построения искомой перестановки множества $X$ составляет следующая

Т е о р е м а 2. Пусть $\mathcal{V}_0$ - полное множество, а $\bar{X}$ - совокупность наименьших элементов множества $X$ относительно $\mathcal{V}_0$ . Тогда если матрица $G$ приводима к матрице со свойством связности, то существует перестановка $j_1, \dots, j_n$ множества $X$ , приводящая матрицу $G$ к матрице со свойством связности и такая, что $\bar{X} = \{j_1, \dots, j_{\bar{n}}\}$, $\bar{n} < n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку матрица $G$ приводима к матрице со свойством связности, то существуют перестановки $j_1, \dots, j_{\bar{n}}$ , $\ell_1, \dots, \ell_{n-\bar{n}}$ соответственно множеств $\bar{X}$ и $X \setminus \bar{X}$ такие, что величины $h_{pj_k}$, $k=1,\dots,\bar{n}$, $h_{p\ell_k}$ , $k=1,\dots,n-\bar{n}$, меняют знак не более одного раза при возрастании номера $k$ для любой пары $p \in \mathcal{V}$ , причем величина $h_{p\ell_k}$ меняет знак с плюса на минус, если $p \in \mathcal{V}_0$ . Рассмотрим перестановку $j_1, \dots, j_n$ множества $X$, где $j_{\bar{n}+k} = \ell_k$, $k=1,\dots,n-\bar{n}$ . Для всякого $p \in \mathcal{V}$ величина $h_{pj_k}$ , $k=1,\dots,n$ , меняет знак не более одного раза. Действительно, справедливость сказанного следует при $p \in \mathcal{V}_0$ из того, что $h_{pj_k} \geqslant 0$, если $k \leqslant \bar{n}$, а при $p \notin \mathcal{V}_0$ из леммы 4, в силу которой выполняется одно из двух: либо $h_{pj_k} = 0$ для любого $k=1,\dots,\bar{n}$, либо $h_{pj_k} = 0$ для всякого $k = \bar{n}+1,\dots,n$ . Теорема доказана.

5. Приведем описание основанного на теореме 2 алгоритма построения перестановки множества $X$ , приводящей исходную булеву матрицу $G=(g_{ij})$ $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ к матрице со свойством связности.

Общая схема алгоритма выглядит следующим образом. На каждом шаге алгоритма имеется некоторое разбиение множества $X$ ,соответствующее тому, что в искомой перестановке на первом месте стоят в некотором порядке номера из первого элемента разбиения, на втором месте - из второго элемента и т.д. В результате выполнения действий шага возможны два случая: либо алгоритм заканчивает работу с отрицательным исходом, либо приходим к новому разбиению, которое исследуется на следующем шаге. Данное разбиение получается в результате замены первого неодноточечного элемента исходного разбиения по крайней мере на два непустых подмножества. Указанный процесс продолжается до тех пор, пока все элементы разбиения не станут одноточечными. Такое разбиение и будет задавать искомую перестановку.

На первом шаге имеем разбиение, состоящее из единственного элемента $X$ . Шаг начинается с применения к матрице $G$ алгоритма, составляющего доказательство леммы 3. В результате получаем правильное разбиение $\{X', X_1, X_0\}$ множества $X$ и некоторую замк-

нутую совокупность пар $\vartheta_0$, относительно которой $X'$ - связанное множество. Отметим, что множество $\vartheta_0$ - ориентированное, а множества $X_1$ и $X_0$ могут быть пустыми. Далее строим ориентированное множество пар $\vartheta$, соответствующее матрице $G'=(g_{ij})$ $(i\in\mathcal{U},\ j\in X')$ и содержащее множество $\vartheta_0$. После этого находим совокупность $\overline{X}$ наименьших элементов множества $X'$ относительно полного множества $\vartheta_0'$, $\vartheta_0'\supset\vartheta_0$. Если множество $\overline{X}$ пусто, то алгоритм заканчивает работу с отрицательным исходом, в противном случае строим разбиение $\{\overline{X},\ X'\setminus\overline{X},\ X_1,\ X_0\}$ (здесь предполагается, что $X_1\neq\varnothing,\ X_0\neq\varnothing$) и переходим к следующему шагу.

Опишем подробней рассмотренные этапы первого шага. Начнем с алгоритма построения ориентированного множества пар. Алгоритм состоит из предварительного шага и не более $\frac{n(n-1)}{2}$ основных шагов по числу всевозможных пар $(j,\ell)$, $j<\ell$, элементов множества $X'$.

На предварительном шаге выпишем все пары $\rho=(i,k)$, $i<k$, для которых величина $h_{\rho j}$ (как функция аргумента $j\in X$) не сохраняет знака, заменив при этом некоторые пары на обратные так, чтобы $\vartheta_0$ было подмножеством полученного множества пар. Далее рассмотрим следующее разбиение этого множества. Первым его элементом является множество $\vartheta_0$, а все остальные элементы - одноточечные множества. Пусть к некоторому основному шагу получено разбиение множества пар, каждый элемент которого - ориентированное подмножество зависимых пар. И пусть на данном шаге рассматриваются $j$-й и $\ell$-й элементы множества $X'$. Выделим элементы разбиения, содержащие пары $\rho$ такие, что либо $h_{\rho j}=1$, $h_{\rho\ell}=-1$, либо $h_{\rho j}=-1$, $h_{\rho\ell}=1$. При этом заметим, что если для некоторых элементов разбиения выполняются оба эти свойства, то матрица $G$ не приводима к матрице со свойством связности. Если для некоторых элементов разбиения выполняется второе условие, то заменим их на подмножества обратных пар. Построим теперь новое разбиение, объединив те элементы последнего разбиения, для которых выполняется первое условие, и оставив без изменения остальные. Каждый элемент полученного разбиения - ориентированное подмножество зависимых пар.

По выполнении всех шагов данного алгоритма получим разбиение, объединение элементов которого дает множество пар $\vartheta$, соответствующее матрице $G$. Оно будет ориентированным, поскольку ни для каких $j$ и $\ell$ не существует пар $\rho$ и $q$ таких, что

$$h_{\rho j}=h_{q\ell}=1,\quad h_{\rho\ell}=h_{qj}=-1.$$

Рассмотрим алгоритм построения совокупности минимальных элементов $\overline{X}$ относительно полного множества $\vartheta_0'$, содержащего $\vartheta_0$. Искомое множество строится последовательно. На первом шаге полагаем $P_1=\vartheta_0$ и $\overline{X}_1=\{j\in X' \mid h_{\rho j}\geqslant 0$ для всякого $\rho\in P_1\}$. Отметим, что $X'\setminus\overline{X}_1\neq\varnothing$. Далее отыскиваем множество $P_2=\{\rho\in\vartheta\setminus P_1 \mid h_{\rho j}\neq 0,$

$j\in X'\setminus\overline{X}_1\}$ и переходим ко второму шагу. Пусть уже проделано $k-1$ шагов и найдены множества $P_1, P_2, \ldots, P_k$; $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_{k-1}$, $\overline{X}_1\supset\overline{X}_2\supset\ldots\supset\overline{X}_{k-1}$. Следующий шаг начинается с построения множества $\overline{X}_k=\{j\in\overline{X}_{k-1}\setminus h_{pj}\geqslant 0$ для всякого $p\in P_k\}$. Если $\overline{X}_k=\overline{X}_{k-1}$, то $\overline{X}_k$ - искомое множество и рассматриваемый алгоритм заканчивает работу. В противном случае находим множество $P_{k+1}$ = $=\{p\in\mathcal{V}\setminus P_1\cup\ldots\cup P_k / h_{pj}\neq 0,\ j\in\overline{X}_{k-1}\setminus\overline{X}_k\}$.

Понятно, что за число шагов, не превосходящее $n$, алгоритм закончит работу. Покажем, что в результате мы действительно получаем множество минимальных элементов.

Л е м м а 5. Если работа алгоритма заканчивается на $k$-м шаге, то $\overline{X}=\overline{X}_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что $\mathcal{V}_0\subset P_1\cup\ldots\cup P_k$. Действительно, если $p\in P_1\cup\ldots\cup P_k$, $q\notin P_1\cup\ldots\cup P_k$, то соотношение $p\sim q$ не имеет места, поскольку $h_{pj}\geqslant 0$ при $j\in\overline{X}$ и $h_{qj}=0$ при $j\notin\overline{X}_k$. Отсюда, в частности, следует, что $\overline{X}\supset\overline{X}_k$. Предположим, что $\overline{X}\not\subset\overline{X}_k$, и пусть $r$ - наименьший номер, для которого $\overline{X}\not\subset\overline{X}_r$. Заметим, что $r>1$, поскольку $\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}_0'$. Пусть $j\in\overline{X}\cap(\overline{X}_{r-1}\setminus\overline{X}_r)$ и $p\in P_r$ такие, что $h_{pj}=-1$. Для данного $p$ найдется номер $l\notin\overline{X}_{r-1}$, при котором $h_{pl}\neq 0$. Отсюда по лемме 4 получаем $p\in\mathcal{V}_0'$. Но $h_{pj}=-1$, и, следовательно, $j\notin\overline{X}$, что противоречит предположению. Поэтому $\overline{X}=\overline{X}_k$. Лемма доказана.

Последовательность действий, выполняемых на остальных шагах алгоритма, та же, что и на первом шаге. Незначительное отличие состоит в следующем. Если $Y$ - рассматриваемый на шаге неодноточечный элемент разбиения, то множество пар $\mathcal{V}$, соответствующее матрице $(g_{ij})$ $(i\in\mathcal{U}, j\in Y)$, может быть пустым. В этом случае в исходном разбиении данное множество $Y$ заменяется произвольным его разбиением на одноточечные множества. После этого начинается следующий шаг. Описанную процедуру построения ориентированной совокупности пар помимо первого шага необходимо производить еще, быть может, на двух других особых шагах, где в качестве первого неодноточечного элемента разбиения рассматриваются множества $X_1$ и $X_0$. Для построения ориентированной совокупности пар на всех остальных шагах достаточно исключить некоторые пары из ориентированной совокупности пар, построенной на одном из трех указанных особых шагов.

Отметим, наконец, что поскольку рассматриваемое на каждом шаге алгоритма неодноточечное множество разбивается по крайней мере на два непустых подмножества, то описанный алгоритм приведения булевой матрицы к матрице со свойством связности закончит работу не более чем через $n$ шагов.

Вычислим теперь оценки качества этого алгоритма: трудоемкость и объем памяти. Начнем с трудоемкости шага алгоритма. Из доказательства леммы 3 нетрудно видеть, что для построения пра-

вильного разбиения и замкнутого подмножества $\vartheta_0$ требуется $\sim m^2 n$ элементарных операций. Для построения ориентированного множества пар на особых шагах необходимо $\sim m^2 n^2$ элементарных операций, а на всех других шагах $- \sim m^2 n$ элементарных операций. Легко подсчитать и количество элементарных операций, необходимых для реализации алгоритма отыскания совокупности минимальных элементов. На $K$-м шаге этого алгоритма для построения множеств $\bar{X}_K$ и $P_{K+1}$ требуется соответственно $\sim |\bar{X}_{K-1}| \dot{\cup} P_K|$ и $\sim |\bar{X}_{K-1} \setminus \bar{X}_K| \cdot |\vartheta \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_K)|$ элементарных операций. Откуда следует, что для построения совокупности минимальных элементов требуется $\sim m^2 n$ элементарных операций. Таким образом, получаем следующую трудоемкость алгоритма приведения булевой матрицы: $T = m^2 n^2$. Что касается объема памяти алгоритма, то эту оценку также несложно получить. В процессе работы алгоритма требуется держать в памяти совокупность пар номеров строк исходной матрицы $G$ и перестановку множества номеров столбцов этой матрицы. Поэтому объем памяти $П = m^2 + n$ и, следовательно, рассмотренный алгоритм является эффективным.

Поступила в ред.-изд.отдел
4 мая 1979 г.

Литература

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации.-Новосибирск.: Наука, 1978.- 333 с.

2. Береснев В.Л. Об одной задаче математической теории стандартизации. I. - В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, 1973, вып. II, с. 43-54.

3. Береснев В.Л. Об одной задаче математической теории стандартизации. II. - В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, 1974, вып. 13. с. 3-9.