Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 19.
УДК 517.91

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ, КУСОЧНО-АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ

Е.П.Волокитин (Новосибирск)

Одним из принципов, используемых в теории и практике математического моделирования, является принцип лимитирующего фактора([1, 2] и др.). Формальное изложение этого принципа на языке теории обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к построению систем дифференциальных уравнений специального вида(Л-систем):

$$\dot{x}_i = F_i(x), \quad i \in \overline{1,n},$$

где

$$F_i(x) = \sum_{k=1}^{K} a_{ik} \min(\ell_1^k(x), \ldots, \ell_{m_k}^k(x)) + \ell_i(x) \qquad /1/$$

Здесь $\ell_m^k(x)$, $\ell_i(x)$ - аффинные функции, т.е.

$$\ell_m^k(x) = \ell_m^k x + \ell_m^{k,0}, \quad \ell_i(x) = \ell_i x + \ell_i^0,$$

$$\ell_m^k,\ \ell_i \in R^n,\ \ell_m^{k,0},\ \ell_i^0 \in R,\ k \in \overline{1,K},\ m \in \overline{1,m_k}.$$

Отметим, что с системами такого сорта приходится сталкиваться и при изучении некоторых оптимизационных задач [3].

С другой стороны, в теории дифференциальных уравнений и ее приложениях достаточно часто встречаются и сравнительно полно изучены непрерывные, кусочно-аффинные системы (см., например, [4 - 6]). Динамическая система

$$\dot{x}_i = F_i(x), \quad i \in \overline{1,n},$$

называется непрерывной, кусочно-аффинной, если $F_i(x)$ непрерывны в R^n и R^n можно разбить на конечное число областей V_q, $q \in \overline{1,Q}$, так, что

$$F_i(x) = a_q^i x + b_q^i, \quad x \in V_q, \qquad /2/$$

где $a_q^i \in R^n$, $b_q^i \in R$.

Очевидно, любая Л-система есть непрерывная, кусочно-аффинная система. В настоящей работе исследуется возможность представления непрерывной, кусочно-аффинной системы в виде Л-системы.

Нетрудно видеть, что вопрос сводится к возможности представления произвольной скалярной непрерывной, кусочно-аффинной функции (н.к.а.ф.) /2/ в виде /1/.

Т е о р е м а I. Произвольная н.к.а.ф. $F(x_1,\dots,x_n)$ может быть представлена в виде

$$F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \min(\ell_1^k(x),\dots,\ell_{m_k}^k(x)) + \ell(x),$$

где $\ell_{m_k}^k(x)$, $\ell(x)$ - аффинные функции, $k\in\overline{1,K}$, $m\in\overline{1,m_k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы разобьем на несколько этапов.

Пусть $A=\{a_1,\dots,a_N\}$ - конечное множество вещественных чисел. Символом αA $(\alpha\in R)$ будем обозначать множество

$$\alpha A = \{\alpha a_1,\dots,\alpha a_N\},$$

через $A^1+A^2+\dots+A^S=\sum_{s=1}^{S} A^s$ будем обозначать "геометрическую" сумму множеств $A^1, A^2,\dots, A^S$:

$$\sum_{s=1}^{S} A^s = \{a\in R : a=a^1+a^2+\dots+a^S,\ a^s\in A^s,\ s\in\overline{1,S}\}.$$

Введем также обозначения

$$\min A = \min\{a_1,\dots,a_N\},$$
$$\max A = \max\{a_1,\dots,a_N\},$$
$$\min(A^1,A^2) = \min(A^1\cup A^2),$$
$$\max(A^1,A^2) = \max(A^1\cup A^2).$$

Отметим некоторые очевидные свойства функций $\min$, $\max$, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\alpha\min A = \begin{cases} \min(\alpha A), & \alpha>0,\\ \max(\alpha A), & \alpha<0, \end{cases} \qquad /3/$$

$$\sum_{s=1}^{S} \min A^s = \min\left(\sum_{s=1}^{S} A^s\right), \qquad /4/$$

$$\max(\min A^1, \min A^2) = \min A^1 + \min A^2 - \min(A^1,A^2). \qquad /5/$$

Через A_k обозначим произвольное подмножество множества A, содержащее k элементов, $A_0=\emptyset$.

Л е м м а I. Пусть вещественные числа $a_1,\dots,a_N$ упорядочены по возрастанию: $a_{i_1}\le a_{i_2}\le\dots\le a_{i_N}$. Тогда

$$a_{i_k} = \min_{\{A_{k-1}\}} \max(A_{k-1}, \min(A\setminus A_{k-1})),\quad k\in\overline{1,N}. \qquad /6/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторого $\tilde A_{k-1}\subset A$ выполнено неравенство

$$\max(\tilde A_{k-1}, \min(A\setminus\tilde A_{k-1})) < a_{i_k}.$$

Тогда $\max\tilde A_{k-1} < a_{i_k}$, и хотя бы одно из чисел, входящих в

множество $A \setminus \tilde{A}_{k-1}$, строго меньше a_{i_k}. Следовательно, среди чисел $a_1, \dots, a_N$ имеется по крайней мере k чисел, строго меньших a_{i_k}, что невозможно. Значит, для любого A_{k-1}

$$\max(A_{k-1}, \min(A \setminus A_{k-1})) \geq a_{i_k},$$

и тем самым

$$\min_{\{A_{k-1}\}} \max(A_{k-1}, \min(A \setminus A_{k-1})) \geq a_{i_k}. \qquad /7/$$

Но

$$\max(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}, \min(a_{i_k}, \dots, a_{i_N})) = a_{i_k},$$

откуда

$$\min_{\{A_{k-1}\}} \max(A_{k-1}, \min(A \setminus A_{k-1})) \leq a_{i_k}. \qquad /8/$$

Из /7/,/8/ вытекает /6/.

Лемма доказана.

Л е м м а 2. Справедливы равенства

$$\max(\min A^1, \dots, \min A^S) = \sum_{s=1}^{S} \min A^s - \min\Big(\bigcup_{t=1}^{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S} A^s\Big), \qquad /9/$$

$$\min(\max A^1, \dots, \max A^S) = \sum_{s=1}^{S} \max A^s - \max\Big(\bigcup_{t=1}^{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S} A^s\Big). \qquad /10/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство /9/ методом математической индукции по числу множеств S.

При $S = 2$ /9/ очевидно (см. /5/).

Предполагая, что /9/ верно, если число множеств A^s не превосходит $(S-1)$, с учетом /4/,/5/ имеем

$$\max(\min A^1, \dots, \min A^S) = \max(\max(\min A^1, \dots, \min A^{S-1}), \min A^S) =$$

$$= \max\Big(\sum_{s=1}^{S-1} \min A^s - \min\Big(\bigcup_{t=1}^{S-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S-1} A^s\Big), \min A^S\Big) =$$

$$= \max\Big(\min \sum_{s=1}^{S-1} A^s, \min\Big(A^S + \bigcup_{t=1}^{S-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S-1} A^s\Big)\Big) -$$

$$- \min\Big(\bigcup_{t=1}^{S-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S-1} A^s\Big) = \min \sum_{s=1}^{S-1} A^s + \min A^S +$$

$$+ \min\Big(\bigcup_{t=1}^{S-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S-1} A^s\Big) - \min\Big(\Big(\sum_{s=1}^{S-1} A^s\Big) \cup \Big(A^S + \bigcup_{t=1}^{S-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S-1} A^s\Big)\Big) -$$

$$- \min\Big(\bigcup_{t=1}^{S-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S-1} A^s\Big) = \sum_{s=1}^{S} \min A^s - \min\Big(\bigcup_{t=1}^{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{S} A^s\Big),$$

что и требовалось.

Равенство /10/ вытекает из /3/, /9/.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть числовая прямая R разбита на $N+1$ промежутков I_j точками $x_n^1 < x_n^2 < \ldots \leqslant x_n^N$:

$$I_1 = (-\infty, x_n^1], \; I_2 = [x_n^1, x_n^2], \ldots, I_{N+1} = [x_n^N, +\infty),$$

и пусть функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n), \quad x_n \in I_j, \; j \in \overline{1, N+1},$$

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n^j) = \varphi_{j+1}(x_1, \ldots, x_n^j), \quad j \in \overline{1, N}. \qquad /11/$$

Тогда

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, \min(x_n, x_n^1)) + \varphi_{N+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \max(x_n, x_n^N)) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N} \varphi_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, \min(\max(x_n, x_n^{j-1}), x_n^j)) -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^j). \qquad /12/$$

Доказательство. Справедливость равенства /12/ может быть проверена непосредственно, если учесть условие /11/, а также соотношение

$$\min(\max(x, a), b) = \begin{cases} a, & x \leqslant a, \\ x, & a \leqslant x \leqslant b, \\ b, & x > b, \end{cases}$$

при $a \leqslant b$.

Лемма доказана.

Рассмотрим н.к.а.ф. $F(x_1, \ldots, x_n)$. В [4] показано, что границами областей аффинности такой функции могут быть лишь гиперплоскости, т.е. области аффинности н.к.а.ф. $F(x_1, \ldots, x_n)$ суть многогранники (не обязательно выпуклые) . Грани этих многогранников будем называть гранями разбиения н.к.а.ф. $F(x_1, \ldots, x_n)$. В частности, нульмерные и одномерные грани будем называть соответственно вершинами и ребрами разбиения.

Лемма 4. Пусть $x^1, \ldots, x^N$ - вершины разбиения н.к.а.ф. $F(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда н.к.а.ф. $F(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде суммы, в которой каждое из слагаемых получено с помощью достаточного числа суперпозиций аффинных функций и функций $\min$, $\max$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и констант $x_1^1, \ldots, x_n^1, \ldots, x_1^N, \ldots, x_n^N$.

Доказательство проведем методом математической индукции по числу переменных.

Для н.к.а.ф. одной переменной $F(x)$ областями аффинности будут отрезки вещественной прямой, концы которых $x^1, \dots, x^N$ и служат вершинами разбиения. Пусть $X = \{x^1, \dots, x^N\}$. Упорядочим X согласно /6/:

$$\begin{aligned} x^{i_1} &= \min X, \\ x^{i_2} &= \min_{\{X_1\}} \max(X_1, \min(X \setminus X_1)), \\ &\dots \\ x^{i_N} &= \max X. \end{aligned}$$

Пусть

$$I_1 = (-\infty, x^{i_1}], \ I_2 = [x^{i_1}, x^{i_2}], \dots, I_{N+1} = [x^{i_N}, +\infty)$$

и

$$F(x) = a_j x + b_j, \quad x \in I_j, \quad j \in \overline{1, N+1},$$

причем

$$a_j x^{i_j} + b_j = a_{j+1} x^{i_j} + b_{j+1}, \quad j \in \overline{1, N}.$$

В таком случае из /12/

$$\begin{aligned} F(x) = {} & a_1 \min(x, x^{i_1}) + b_1 + a_{N+1} \max(x, x_{i_N}) + b_{N+1} + \\ & + \sum_{j=2}^{N} (a_j \min(\max(x, x^{i_{j-1}}), x^{i_j}) + b_j) - \\ & - \sum_{j=1}^{N} (a_j x^{i_j} + b_j) = \\ & = a_1 \min(x, x^{i_1}) + a_{N+1} \max(x, x_{i_N}) + b_{N+1} + \\ & + \sum_{j=2}^{N} a_j (\min(\max(x, x^{i_{j-1}}), x^{i_j}) - x^{i_j}), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Предположим, что утверждение леммы верно для любой н.к.а.ф. от $(n-1)$ переменной, и рассмотрим произвольную н.к.а.ф. $F(x_1, \dots, x_n)$.

Ребра разбиений н.к.а.ф. $F(x_1, \dots, x_n)$, не ортогональные оси Ox_n, представляют собой либо отрезки, соединяющие вершины разбиения, либо лучи, выходящие из этих вершин, и могут быть описаны следующим образом:

$$x = x^i + v^{ip} x_n, \quad v^{ip} \in R^n, \quad i \in \overline{1, N}, \quad p \in \overline{1, P_i}, \qquad /13/$$

или же эти ребра являются прямыми

$$x = \tilde{x}^r + v^r x_n, \quad \tilde{v}^r \in R^n, \quad r \in \overline{1, P}, \qquad /14/$$

причем в данном случае $x_n\in(-\infty,+\infty)$ и в качестве точки $\tilde{x}^r$ берется произвольная точка прямой; мы будем считать, что $\tilde{x}^r=(\tilde{x}_1^r,\dots,\tilde{x}_n^r)$ таковы, что $\tilde{x}_n^r=x_n^1$, т.е. все точки $\tilde{x}^r$ лежат на одной "высоте" с вершиной разбиения x^1.

Упорядочим вершины разбиения н.к.а.ф. $F(x_1,\dots,x_n)$ по последней координате:

$$x_n^{i_1}=\min(x_n^1,\dots,x_n^N),$$
$$---$$
$$x_n^{i_N}=\max(x_n^1,\dots,x_n^N)$$

и зафиксируем $x_n\in(x_n^{i_{j-1}},x_n^{i_j})$. В случае отсутствия вершин разбиения фиксируем $x_n\in(-\infty,+\infty)$ произвольно. Получим н.к.а.ф. $F_{i_j}^{(x_n)}(x_1,\dots,x_{n-1})$ от $(n-1)$ переменной. По индуктивному предположению такая функция может быть представлена достаточным числом суперпозиций аффинных функций и функций $\min,\max$ от переменных $x_1,\dots,x_{n-1}$ и координат своих вершин. Однако любая вершина функции $F_{i_j}^{(x_n)}(x_1,\dots,x_{n-1})$ есть результат пересечения ребра разбиения н.к.а.ф. $F(x_1,\dots,x_n)$, лежащего в полосе $x_n^{i_{j-1}}<x_n<x_n^{i_j}$ и не ортогонального оси Ox_n, с гиперплоскостью $x_n=const$, и в силу /I8/,/I4/ координаты вершин разбиения н.к.а.ф. $F_{i_j}^{(x_n)}(x_1,\dots,x_{n-1})$ линейно выражаются через x_n. Подставляя эти выражения в представление н.к.а.ф. $F_{i_j}^{(x_n)}(x_1,\dots$ $\dots,x_{n-1})$ и учитывая, что $x_n\in(x_n^{i_{j-1}},x_n^{i_j})$ выбрано произвольно, получаем, что $F(x_1,\dots,x_n)$ при $x_n\in[x_n^{i_{j-1}},x_n^{i_j}]$ представима в требуемом виде. Из /I2/ в таком случае вытекает возможность требуемого представления н.к.а.ф. $F(x_1,\dots,x_n)$ при произвольном x_n.

Лемма доказана.

Введем следующие определения.

Переменные $x_1,\dots,x_n$, а также постоянные $\alpha,\dots,\beta$ назовем функциями нулевого порядка.

Если $f_1(x_1,\dots,x_n,\alpha_1,\dots,\beta_1),\dots,f_T(x_1,\dots,x_n,\alpha_T,\dots,\beta_T)$ - функции порядка не более чем μ и хотя бы одна из них имеет порядок μ, то любая их линейная комбинация есть функция порядка μ, а

$$\min(f_1(x_1,\dots,x_n,\alpha_1,\dots,\beta_1),\dots,f_T(x_1,\dots,x_n,\alpha_T,\dots,\beta_T)),$$
$$\max(f_1(x_1,\dots,x_n,\alpha_1,\dots,\beta_1),\dots,f_T(x_1,\dots,x_n,\alpha_T,\dots,\beta_T))$$

суть функции порядка $\mu+1$.

Равенства /9/,/I0/ леммы 2 позволяют понизить порядок любой функции $(\mu>2)$ по крайней мере на единицу. На основе этих равенств методом математической индукции (по порядку функции) может быть доказана

Л е м м а 4. Функция любого порядка представима в виде функции порядка I.

Доказательство очевидно.

Из лемм 3,4 немедленно вытекает справедливость теоремы I.

В качестве примера рассмотрим плоскую систему с прямым управлением, описанную в [6]:

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 - b_1\varphi(\sigma),$$
$$\dot{x}_2 = -k_2 x_2 - b_2\varphi(\sigma), \qquad /15/$$

где $\sigma = cx = c_1 x_1 + c_2 x_2$,

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} -1, & \sigma \leqslant -1, \\ \sigma, & -1 \leqslant \sigma \leqslant 1, \\ +1, & \sigma \geqslant 1. \end{cases}$$

Областями аффинности функции $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$ - правой части системы /15/ - будут выпуклые множества

$$G_1 = \{x \in R^2 : cx \leqslant -1\},\quad G_2 = \{x \in R^2 : -1 \leqslant cx \leqslant 1\},\quad G_3 = \{x \in R^2 : cx \geqslant 1\},$$

при этом

$$\begin{aligned} &F_1(x) = -k_1 x_1 + b_1, \\ &F_2(x) = -k_2 x_2 + b_2, && x \in G_1, \\ &F_1(x) = (-k_1 - b_1 c_1)x_1 - b_1 c_2 x_2, \\ &F_2(x) = -b_2 c_1 x_1 + (-k_2 - b_2 c_2)x_2, && x \in G_2, \\ &F_1(x) = -k_1 x_1 - b_1, \\ &F_2(x) = -k_2 x_2 - b_2, && x \in G_3. \end{aligned}$$

Предположим для определенности, что $c_1 > 0$. Рассмотрим функцию $F_1(x)$.

При фиксированном $x_2 \in (-\infty, +\infty)$ мы получаем кусочно-аффинную функцию скалярного аргумента x_1, $F_1^{(x_2)}(x_1)$, областями аффинности которой служат отрезки

$$I_1 = (-\infty, x_1^1(x_2)],\ I_2 = [x_1^1(x_2), x_1^2(x_2)],\ I_3 = [x_1^2(x_2), +\infty),$$

$$x_1^1(x_2) = \min\left(\frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}x_2, -\frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}x_2\right) = -\frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}x_2, \qquad /16/$$

$$x_1^2(x_2) = \max\left(\frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_2}x_2, -\frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}x_2\right) = \frac{1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}x_2,$$

при этом

$$\begin{aligned} &F_1^{(x_2)}(x_1) = -k_1 x_1 + b_1, && x \in I_1, \\ &F_1^{(x_2)}(x_1) = (-k_1 - b_1 c_1)x_1 - b_1 c_2 x_2, && x_1 \in I_2, \\ &F_1^{(x_2)}(x_1) = -k_1 x_1 - b_1, && x \in I_3. \end{aligned}$$

В соответствии с /12/ имеем

$$\begin{aligned} F_1^{(x_2)}(x_1) = &-k_1 \min(x_1, x_1^1(x_2)) - k_1 \max(x_1, x_1^2(x_2)) + \\ &+ (-k_1 - b_1 c_1)\min(\max(x_1, x_1^1(x_2)), x_1^2(x_2)) - b_1 c_2 x_2 - \\ &- (-k_1 x_1^1(x_2) + b_1) - (-k_1 x_1^2(x_2) - b_1). \end{aligned}$$

Из /10/,/16/ вытекает

$$\min(\max(x_1, x_1^1(x_2)), x_1^2(x_2)) =$$
$$= x_1^2(x_2) + \max(x_1, x_1^1(x_2)) - \max(x_1, x_1^2(x_2)).$$

Учитывая также /3/,/16/, получаем требуемый вид функции $f_1(x)$.

Аналогично может быть представлена функция $f_2(x)$.

Автор выражает признательность Ю.И.Гильдерману за постановку задачи.

Поступила в ред.-изд.отдел
I октября 1978 г.

Литература

I. Гильдерман Ю.И.,Кудрина К.Н., Полетаев И.А. Модели Л-систем(системы с лимитирующими факторами).-В кн.: Исследования по кибернетике. М.,1970, с.165-211.

2. Полетаев И.А. Модели Вольтерра "хищник-жертва" и некоторые их обобщения с использованием принципа Либиха.-Журнал общей биологии, 1973, т.34, № I, с.41-46.

3. Ляпунов А.Н. О дифференциально-экстремальных уравнениях.-Кибернетика, 1969, № I, с.83-89.

4. Гильдерман Ю.И. О предельных циклах кусочно-аффинных систем.-Докл.АН СССР, 1976, т.230, № 3, с. 512-515.

5. Наумов Б.Н. Теория нелинейных автоматических систем(частотные методы).-М.:Наука, 1972. - 450 с.

6. Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. -М.: Мир, 1967.-183 с.