Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 19.
УДК 519.854.3

ОБ ε -ОПТИМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

С.Е.Гвоздев(Новосибирск)

Статья является продолжением серии работ [1-4] , в которых предлагаются алгоритмы с оценками для решения ряда задач математического программирования. Здесь изучается возможность получения приближенных решений различных модификаций задачи о ранце. При этом без объяснения используются рассмотренные в [3] задачи A и B и алгоритмы их решения (предполагается, что читатель знаком с этой работой). Ссылки на формулы работы [3] будем сопровождать римской цифрой Ш.

1. Рассмотрим задачу о ранце, используемую в качестве вспомогательной для решения задачи выбора оптимальной системы (модулей) при неявном задании множества допустимых комплексов [5].

Найти

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow min \qquad /1/$$

при ограничениях:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant A ; \qquad /2/$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q ; \qquad /3/$$

$$x_j \in \{0,1,2,\dots\}, \ j=\overline{1,n}. \qquad /4/$$

Для получения приближенного решения задачи /1/-/4/ применим подход, описанный в [3]. Схемы решения этой задачи и задачи B совпадают при $N=1$, $\ell_{01}=\ell_{11}=q$. Запишем функцию(20.Ш) для задачи /1/-/4/:

$$\varphi(\lambda)=\min_{(3),(4)} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) = \min_{(3),(4)} \sum_{j=1}^{n} (c_j - \lambda a_j) x_j .$$

Если значения параметра λ удовлетворяют соотношению $\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') < \varepsilon_{1}$, то

$$\varphi(\lambda') = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \lambda' a_j) x'_j = q(c_{j'_\lambda} - \lambda' a_{j'_\lambda}),$$

$$\varphi(\lambda'') = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \lambda'' a_j) = q(c_{j''_\lambda} - \lambda'' a_{j''_\lambda}),$$

где $c_{j_\lambda'} - \lambda' a_{j_\lambda'} = \min_{1\le j\le n}(c_j - \lambda' a_j)$ и $c_{j_\lambda''} - \lambda'' a_{j_\lambda''} = \min_{1\le j\le n}(c_j - \lambda'' a_{j_\lambda''})$.

В силу того, что $N=1$, необходимость в построении последовательности $x^{(\xi)}$ отпадает. Так как $\ell_{01}=\ell_{11}=q$, последовательность $\tilde{x}^{(\xi)}$ строится по формуле

$$\tilde{x}^{(\xi)} = (x_1'', \dots, x_n'') + \sum_{\ell=0}^{\xi} z^{(\ell)}, \quad \xi=\overline{0,q},$$

где

$$z^{(\ell)} = \begin{cases} (0, \dots, 0), & \text{если } \ell=0, \\ (0,\dots,0,\underset{j_\lambda''}{-1},0,\dots,0,\underset{j_\lambda'}{1},0,\dots,0), & \text{если } \ell=\overline{1,q}. \end{cases}$$

Найдя индекс $\mu\,(\mu<q)$ из условия $g(\tilde{x}^{(\mu+1)})<A\le g(\tilde{x}^{(\mu)})$, получим $\tilde{x}^{(\mu)}$, являющийся $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ - оптимальным решением, где $\tilde{\eta}=f(\tilde{x}^{(\mu)})-f(\tilde{x}^{(\mu+1)})=c_{j_\lambda''}-c_{j_\lambda'}\le c_{max}-c_{min}$. Для этого потребуется $\sim n\log t$ операций, где $t=\max\{\varepsilon_1^{-1},(\hat{a})^{-1},n,a_{max}\cdot c_{max}\}$, а $\hat{a}=\min_{1\le i,j\le n}\{|a_i-a_j|\mid a_i\ne a_j\}$. Если в качестве критерия окончания работы алгоритма выбрано неравенство (I6,Ш), то для нахождения $\tilde{\eta}$ -оптимального решения задачи /I/-/4/ достаточно $\sim n\log t$ операций, где $t=\max\{(\Delta\lambda)^{-1},(\hat{a})^{-1},c_{max}\}$, а $\Delta\lambda$ определяется соотношением /28.Ш/.

Пусть c_j и a_j, $j=\overline{1,n}$, взаимосвязаны так, что отношение $\dfrac{c_{j+1}-c_j}{a_{j+1}-a_j}$, $1\le j\le n-1$, не убывает с возрастанием a_j, и a_j образуют арифметическую прогрессию с разностью Δa. Тогда предлагаемый подход гарантирует получение решения $\tilde{x}^{(\mu)}$,являющегося ε_1 - оптимальным для задачи /I/-/4/.

Введенная зависимость между величинами c_j и a_j позволяет рассмотреть функцию $d(j)=(c_j-\lambda a_j)$, $j=\overline{1,n}$. Эта функция унимодальна для любого λ, ее минимум и значение аргумента j_λ,на котором этот минимум достигается, могут быть найдены методом Фибоначчи [6] за $\sim\log n$ операций. Поэтому для нахождения ε_1 -оптимального решения задачи /I/-/4/ потребуется лишь $\sim\log^2 t$ операций, где $t=\max\{\varepsilon_1^{-1},(\Delta a)^{-1},n,c_{max}\cdot a_{max}\}$. Точное решение рассматриваемой задачи может быть получено ценою $\sim\log^2 t$ операций, где $t=\max\{(\Delta\lambda)^{-1},(\Delta a)^{-1},n,c_{max}\}$, а $\Delta\lambda$ определено соотношением /28.Ш/.

Очевидно, что во всех случаях объем дополнительной памяти, необходимый для реализации алгоритма решения задачи /I/-/4/,того же порядка, что и для хранения данных этой задачи.

В заключение рассмотрим условия, при которых изменение исходных данных задачи /I/-/4/ ведет к увеличению точности прибли-

женного решения, получаемого описанным выше алгоритмом.

Пусть $c_{max} = c_{max}(q)$ и $c_{min} = c_{min}(q)$, причем $\frac{c_{max}}{c_{min}} = \psi(q)$, $\psi(q) = O(q)$. Оценим относительную погрешность решения $\tilde{x}^{(\mu)}$:

$$\frac{f(x_{опт}) - f(\tilde{x}^{(\mu)})}{f(x_{опт})} \leq \frac{c_{j''} - c_{j'}}{q(c_{j'} + \mu(c_{j''}, c_{j'}))} \leq (q(\frac{c_{max}(q)}{c_{min}(q)} - 1)^{-1} + \mu)^{-1}.$$

Следовательно, относительная погрешность $\frac{f(x_{опт}) - f(\tilde{x}^{(\mu)})}{f(x_{опт})} \xrightarrow[q \to \infty]{} 0$, т.е. решение $\tilde{x}^{(\mu)}$ является асимптотически точным [7] при $q \to \infty$.

2. Задача о ранце в вариантной постановке является частным случаем задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ при значениях $\ell_{0k} = 0$, $k = \overline{1, N_1}$, $\ell_{0k} = 1$, $k = \overline{N_1 + 1, N}$; $\ell_{1k} = 1$, $k = \overline{1, N}$ в ограничении /18.Ш/. Термин "вариантная" взят из экономической интерпретации рассматриваемой задачи. С помощью вариантной задачи о ранце описываются задачи размещения и развития производства однородной продукции или нескольких различных, но частично или полностью взаимозаменяемых изделий, искусственно сводимых к одному условному продукту. Через N обозначим число различных заводов, производящих этот продукт, а через $|J_k| = m_k$ - число вариантов развития $(\ell_{0k} = 0)$ или реконструкции $(\ell_{0k} = 1)$ k -го завода, a_j $(\rho_{k-1} + 1 \leq j \leq \rho_k)$ - величину затрат, а c_j $(\rho_{k-1} + 1 \leq j \leq \rho_k)$ - объем выпуска продукции при развитии (реконструкции) $(j - \rho_{k-1})$ -го варианта на k -м заводе. Требуется на каждом предприятии выбрать такой вариант развития (реконструкции), чтобы максимизировать суммарный объем выпуска продукции, не выходя за пределы лимита A по ограниченному ресурсу.

Применяя вышеописанный подход к задаче о ранце в вариантной постановке, мы получаем $(\tilde{\eta} + \varepsilon_1)$ оптимальное решение этой задачи. Трудоемкость его нахождения составит $\sim n \log t$ операций, где $t = \max\{\varepsilon_1^{-1}, (\hat{a})^{-1}, n, c_{max}, q_{max}\}$, так как функцию $\varphi(\lambda)$ можно вычислить за $\sim \sum_{k=1}^{N} m_k = n$ операций. Очевидно, что $\tilde{\eta} \leq c_{max}$ при $N_1 > 1$ и $\tilde{\eta} \leq c_{max} - c_{min}$ при $N_1 = 0$. Число операций для нахождения $\tilde{\eta}$ -оптимального решения оценивается величиной $\sim n \log t$, где $t = \max\{(\Delta\lambda)^{-1}, (\hat{a})^{-1}, c_{max}\}$.

Экономическая специфика задачи о ранце в вариантной постановке часто выражается в том, что с увеличением объема выпуска изделий удельные затраты не возрастают, т.е. если $a_{j_1} < a_{j_2}$, то

$$c_{j_1} < c_{j_2} \text{ и } c_{j_1} : a_{j_1} > c_{j_2} : a_{j_2}, \; j_1, j_2 \in J_k, \; k = \overline{1, N}. \qquad /5/$$

Допустим, что a_j $(j \in J_k$, $k = \overline{1, N})$ образуют арифметическую прогрессию с разностью Δa , тогда без ограничения общности можно считать, что A кратно Δa . Схема решения задачи $\mathcal{B}$ гарантирует

получение приближенного решения рассматриваемой задачи о ранце с любой наперед заданной точностью ε_1. Для нахождения функции /32.Ш/ достаточно вычислить экстремумы унимодальных функций

$\omega_k(j) - \lambda a_j \quad (k=\overline{1,N})$, обозначив $\omega_k(j) = c_j \quad (j \in J_k)$.

Отыскание экстремума этой функции при фиксированном k можно осуществить за $\sim \log m_k$ операций методом Фибоначчи. Следовательно, для получения ε_1 - оптимального решения достаточно

$\sim (\sum_{k=1}^{N} \log m_k) \cdot \log t$ операций, где $t = \max\{\varepsilon_1^{-1}, (\Delta a)^{-1}, n, c_{max} a_{max}\}$.

Пусть t определено как максимум из величин $(\Delta\lambda)^{-1}$, $(\Delta a)^{-1}$, c_{max}, а $\Delta\lambda$ определяется соотношением /28.Ш/. Так как A кратно Δa, можно утверждать, что алгоритм гарантирует получение точного решения задачи о ранце в вариантной постановке.

Наконец, так как относительная погрешность решения $\tilde{x}^{(\mu)}$ оценивается неравенством

$$\frac{f(x_{опт}) - f(\tilde{x}^{(\mu)})}{f(x_{опт})} \leq \frac{f(\tilde{x}^{(\mu+1)}) - f(\tilde{x}^{(\mu)})}{f(x_{опт})} \leq \frac{c_{max}}{(N-N_1)c_{min}},$$

оно является асимптотически точным, если c_{max} и c_{min} функционально зависят от $(N-N_1)$ и $\frac{c_{max}(N-N_1)}{c_{min}(N-N_1)} = \varphi(N-N_1) = O(N-N_1)$.

З а м е ч а н и е. Если выполнено условие /5/ и a_j образуют арифметическую прогрессию с разностью Δa, задачу о ранце в вариантной постановке можно свести к задаче выпуклого целочисленного программирования:

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_k(j_k) \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{k=1}^{N} j_k \leq \frac{A}{\Delta a},$$

$$0 \leq j_k \leq m_k, \quad k = \overline{1,N_1},$$

$$1 \leq j_k \leq m_k, \quad k = \overline{N_1+1,N},$$

$$j_k - \quad , \quad k = \overline{1,N}.$$

Очевидно, имеет место и обратное сведение. Поэтому, если функция $\omega_k(j_k)$ задана аналитически, целесообразнее применить метод решения задачи выпуклого целочисленного программирования [2].

3. Рассмотрим задачу минимизации числа транспортных средств.

Предположим, что имеется n различных транспортных средств, каждое из которых может перевозить груз, характеризующийся двумя параметрами: объемом и весом. Обозначим через $c_j \geqslant 0$ объемом груза, перевозимого j -м $(j=\overline{1,n})$ транспортным средством, через $a_j \geq 0$ - его вес. Требуется выбрать минимальное число транспортных средств при ограничении снизу на суммарный вес A и объем C перевезенного груза. Введя переменную

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если выбирается } j\text{-е транспортное средство,} \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

запишем задачу так: минимизировать

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad /6/$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant C, \qquad /7/$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant A, \qquad /8/$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=\overline{1,n}. \qquad /9/$$

Для отыскания точного решения этой задачи, по-видимому, не существует алгоритма полиномиальной трудоемкости от длины записи исходной информации (в смысле Карпа)[8]. Ниже будет описан алгоритм полиномиальной трудоемкости для нахождения приближенного решения $x_{пр}$, отличающегося от точного $x_{опт}$ не более чем на одну компоненту.

Ясно, что минимум функции /6/ можно найти, вычисляя значения функции $\mathcal{F}(q)$, где

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q \qquad /10/$$

и

$$\mathcal{F}(q) = \max_{(8)-(10)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \qquad /11/$$

Действительно, q^*, при котором $\mathcal{F}(q^*-1) < C \leqslant \mathcal{F}(q^*)$, есть оптимальное значение функции $\varphi(x)$, т.е. $\varphi(x_{опт}) = q^*$.

Для получения q^*, а следовательно, и оптимального решения $x_{опт}$ исходной задачи /6/-/9/ используется метод дихотомии по q, который можно применить в силу неубывания функции $\mathcal{F}(q)$.

Существование эффективного алгоритма точного вычисления $\mathcal{F}(q)$, $q=1,2,\ldots,n$, означало бы существование такового и

для решения задачи /6/-/9/, мы же исходим из обратной гипотезы. Если приближенно вычислять функцию $\mathcal{F}(q)$, пользуясь схемой решения задачи $\mathcal{A}$, то справедливо следующее

Утверждение: имеет место неравенство

$$|\Phi(x_{опт})-\Phi(x_{пр})|\leqslant 1,$$

где $\Phi(x_{опт})=q^*$, а $\Phi(x_{пр})$ - значение целевой функции задачи /6/-/9/, полученное в результате приближенного вычисления $\mathcal{F}(q)$.

3.I. Для доказательства сформулированного утверждения построим вектор $x_{пр}$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_q(\lambda)=\max_{(9),(10)}\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j+\lambda\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big)=f_q(x_\lambda)+\lambda g_q(x_\lambda). \qquad /12/$$

Лемма. Если выполняется неравенство $\mathcal{F}(q)\geqslant c$, то $\varphi_q(\lambda)\geqslant c+\lambda A$ для $\lambda\geqslant 0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такое значение λ^0, что $\varphi_q(\lambda^0)<c+\lambda^0 A$. Тогда, по условию, $\mathcal{F}(q)=\sum_{i=1}^{q} c_{j_i}\geqslant c$ и, по соотношению /8/, $\sum_{i=1}^{q} a_{j_i}\geqslant A$. Следовательно, $c+\lambda^0 A\leqslant \sum_{i=1}^{q} c_{j_i}+\lambda^0\sum_{i=1}^{q} a_{j_i}\leqslant \max\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda^0\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big)=\varphi_q(\lambda^0)$. Противоречие.

Лемма доказана.

Следуя схеме нахождения $\tilde{q}$ - оптимального решения задачи $\mathcal{A}$, для получения приближенного значения $\mathcal{F}(q)$ вычислим $\varphi_q(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_k$, где

$$\lambda_1=\frac{\lambda_{max}}{2},\quad \lambda_k=\frac{\lambda''_{k-1}+\lambda'_{k-1}}{2},\quad k\geqslant 2 \qquad /17.Ш/,$$

а $\lambda''_{k-1}=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}\{\lambda_j \mid g_q(x_{\lambda_j})-A>0\}$, $\lambda'_{k-1}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}\{\lambda_j \mid A-g_q(x_{\lambda_j})>0\}$, причем полагаем $\lambda''_{k-1}=\lambda_{max}$, если $g_q(x_{\lambda_j})-A<0$ для всех j, удовлетворяющих условию $1\leqslant j\leqslant k-1$, и $\lambda'_{k-1}=0$, если $A-g_q(x_{\lambda_j})<0$. Отметим, что если для какого-то индекса $\tilde{j}$ выполняется $g_q(x_{\lambda_{\tilde{j}}})=A$, то получаем точное значение $\mathcal{F}(q)$, равное $f_q(x_{\lambda_{\tilde{j}}})$.

Будем вычислять $\varphi_q(\lambda_k)$ до выполнения неравенства $\lambda''_k-\lambda'_k\leqslant\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ определено соотношением /28.Ш/. Первое k, при котором выполнится это неравенство, обозначим через k_q. Рассмотрим функции:

$$\varphi_q\Big(\lambda''_{k_q}-\frac{\Delta\lambda}{3}\Big)=f_q(x''_{k_q})+\Big(\lambda''_{k_q}-\frac{\Delta\lambda}{3}\Big)g_q(x''_{k_q})=\sum_{j=1}^{n} c_j x''_j+\Big(\lambda''_{k_q}-\frac{\Delta\lambda}{3}\Big)\sum_{j=1}^{n} a_j x''_j,$$

$$\varphi_q\Big(\lambda'_{k_q}+\frac{\Delta\lambda}{3}\Big)=f_q(x'_{k_q})+\Big(\lambda'_{k_q}+\frac{\Delta\lambda}{3}\Big)g_q(x'_{k_q})=\sum_{j=1}^{n} c_j x'_j+\Big(\lambda'_{k_q}+\frac{\Delta\lambda}{3}\Big)\sum_{j=1}^{n} a_j x'_j.$$

Основываясь на /25.Ш/, построим последовательность $\tilde{x}^{(\xi)}$ для задачи /6/-/9/:

$$\tilde{x}^{(\xi)} = (x_1'', \ldots, x_n') + \sum_{l=0}^{\xi} z^{(l)},$$

где

$$z^{(l)} = \begin{cases} (0,\ldots,0), & \text{если } l=0, \\ (0,\ldots,0,\underset{j_l'}{1},0,\ldots,0,\underset{j_l''}{-1},0,\ldots,0), & \text{если } l=\overline{1,t_3}. \end{cases}$$

Вектор $\tilde{x}^{(\mu)}$, определяемый из соотношения $g_q(\tilde{x}^{(\mu+1)}) < A \leq g_q(\tilde{x}^{(\mu)})$, является $\tilde{\eta}$ - приближенным решением задачи /II/, где $\tilde{\eta} = c_{max} - c_{min}$. Осуществив дихотомию по q, найдем значение параметра q^{**} такое, что $f_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu+1)}) \geq c$ и $f_{q^{**}-1}(\tilde{x}^{(\mu+1)}) < c$. Заметим,,что $(q^{**}-1)$, в силу леммы, не может быть значением целевой функции задачи /6/-/9/, так как

$$\varphi_q\left(\frac{\lambda_{k_q}'' + \lambda_{k_q}'}{2}\right) = f_q(\tilde{x}^{(\mu+1)}) + \left(\frac{\lambda_{k_q}'' - \lambda_{k_q}'}{2}\right) g_q(\tilde{x}^{(\mu+1)}) < c + \left(\frac{\lambda_{k_q}'' + \lambda_{k_q}'}{2}\right) \cdot A.$$

Покажем, что в качестве приближенного значения целевой функции исходной задачи может быть взято $(q^{**}+1)$. Рассмотрим векторы $\tilde{x}^{(\mu)}$ и $\tilde{x}^{(\mu+1)}$, удовлетворяющие неравенствам $g_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu)}) \geq A$ и $f_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu+1)}) \geq c$. Пусть $I_3 = \left\{ j \in \{1,\ldots,n\} / \tilde{x}_j^{(\mu+1)} \neq \tilde{x}_j^{(\mu)} \right\}$, тогда $|I_3| = 2$ по построению последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$. Введя обозначение $j_1 = \left\{ j \in I_3 / \tilde{x}_j^{(\mu+1)} = 1 \right\}$, $j_2 = \left\{ j \in I_3 / \tilde{x}_j^{(\mu)} = 1 \right\}$, получим $\tilde{x}^{(\mu)} = (0,\ldots,0,\underset{j_1}{1},0,\ldots,0) = \tilde{x}^{(\mu+1)} + (0,\ldots,0,\underset{j_2}{1},0,\ldots,0)$. Положим $x_{np} = \tilde{x}^{(\mu)} + (0,\ldots,0,\underset{j_1}{1},0,\ldots,0)$, следовательно $g_{q^{**}+1}(x_{np}) \geq g_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu)}) \geq A$ и $f_{q^{**}+1}(x_{np}) \geq f_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu+1)}) \geq c$, а значит, $\Phi(x_{np}) = q^{**}+1$. Так как $(q^{**}-1)$ не может быть значением целевой функции /6/,то $\Phi(x_{опт}) \geq q^{**}$, тем самым утверждение доказано.

Рассмотрим вкратце случай, когда все c_j (либо a_j) >0. При значениях λ, определяемых соотношениями /I7''.Ш/, будем вычислять $\varphi_q(\lambda)$ до выполнения неравенства

$$\varphi_q(\lambda_k'') - \varphi_q(\lambda_k') \leq c_{min}.$$

Первое k, при котором выполнится это неравенство, обозначим через k_q. Далее, осуществив дихотомию по q, найдем значение параметра q^{**} такое, что $\varphi_{q^{**}}(\lambda_j) \geq c + \lambda_j A$ для $1 \leq j \leq k_{q^{**}}$ и хотя бы для одного j, $1 \leq j \leq k_{q^{**}-1}$, справедливо неравенство $\varphi_{q^{**}-1}(\lambda_j) < c + \lambda_j A$ Ясно (в силу леммы), что величина $(q^{**}-1)$ не может быть значением целевой функции задачи /6/-/9/.

Рассмотрим функции

$$\varphi_{q^{**}}(\lambda''_{K_{q^{**}}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x''_j + \lambda''_{K_{q^{**}}} \sum_{j=1}^{n} a_j x''_j \quad \text{и}$$

$$\varphi_{q^{**}}(\lambda'_{K_{q^{**}}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x'_j + \lambda'_{K_{q^{**}}} \sum_{j=1}^{n} a_j x'_j .$$

Пользуясь схемой нахождения $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ - оптимального решения задачи A, рассмотрим множества I, I_1, I_2, применительно к задаче /6/-/9/ построим последовательность $\tilde{x}^{(s)}$ и найдем μ-й и $(\mu+1)$ -й члены этой последовательности из соотношения $g_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu+1)}) < A \leqslant g_{q^{**}}(\tilde{x}^{(\mu)})$. Используя идею доказательства неравенств /22/-/24/ работы [1], можно показать, что

$$\varphi_{q^{**}}(\lambda''_{K_{q^{**}}}) - \lambda''_{K_{q^{**}}} A - c_{min} < \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j^{(\mu+1)} .$$

Так как $\varphi_{q^{**}}(\lambda''_{K_{q^{**}}}) \geqslant C + \lambda''_{K_{q^{**}}} A$, получим

$$C \leqslant \varphi_{q^{**}}(\lambda''_{K_{q^{**}}}) - \lambda''_{K_{q^{**}}} A - c_{min} + c_{j'_{\mu+1}} < \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j^{(\mu+1)} + c_{j'_{\mu+1}} .$$

Также нетрудно видеть, что

$$A < \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{x}_j^{(\mu)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{x}_j^{(\mu)} + a_{j'_{\mu+1}}$$

и

$$\tilde{x}^{(\mu+1)} + (0,\dots,0,\underset{j'_{\mu+1}}{1},0,\dots,0) = \tilde{x}^{(\mu)} + (0,\dots,0,\underset{j_{\mu+1}}{1},0,\dots,0).$$

Следовательно, положив $x'_{np} = \tilde{x}^{(\mu+1)} + (0,\dots,0,\underset{j'_{\mu+1}}{1},0,\dots,0)$, получим $\Phi(x'_{np}) = q^{**}+1$. А значит, утверждение справедливо и для вектора x'_{np}.

3.2. Приведем оценку трудоемкости нахождения вектора $x_{np}\,(x'_{np})$. На основании /31.III/ оценим число операций для нахождения приближенного значения функции $\mathcal{F}(q)$ при фиксированном q:

$$\mathcal{K}_{\mathcal{F}(q)} \sim n \log^2 t, \quad t = max\{(\Delta\lambda)^{-1}, (\hat{a})^{-1}, n, c_{max}\} .$$

(В случае, когда число шагов определяется выполнением неравенства $\varphi_q(\lambda''_K) - \varphi_q(\lambda'_K) < c_{min}$, величина t в силу оценки /30.III/, запишется в виде $t = max\{c_{min}^{-1}, (\hat{a})^{-1}, n, c_{max}\cdot a_{max}\}$).

Чтобы найти q^{**}, достаточно не более $]\log n[$ раз вычислить функцию $\mathcal{F}(q)$. В целом вектор $x_{np}\,(x'_{np})$ можно получить, затратив $\sim n\log^3 t$ операций, где $t = max\{(\Delta\lambda)^{-1}, (\hat{a})^{-1}, n, c_{max}\}$ $(t = max\{c_{min}^{-1}, (\hat{a})^{-1}, n, c_{max}\cdot a_{max}\})$. В обоих случаях при целых a_j и c_j $t = max\{n, a_{max}\cdot c_{max}\}$.

Если последовательность $d(j),\ j=\overline{1,n},\ (d(j)=c_j-\lambda a_j)$, унимодальна и $\varphi_q(\lambda)$ может быть вычислена за $\sim n\log n$ операций, то на основе пункта 3.I.3 [3] алгоритм можно осуществить ценою $\sim \log^3 t$ операций, где $t=\max\{(\Delta\lambda)^{-1},(\hat{a})^{-1},\ c_{max}\cdot n\}$.

Память, необходимая для реализации описанных выше алгоритмов, того же порядка, что и память, используемая для хранения исходных данных задачи /6/-/9/.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 мая I978 г.

Литература

I. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения некоторых задач математического программирования. I.-В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, I977, вып. I6, с.47-62.

2. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения некоторых задач математического программирования. П.-В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, I978, вып. I7, с.I3-27.

3. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения некоторых задач математического программирования. Ш.-В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, I978, вып. I7, с.28-45.

4. Гвоздев С.Е. Один подход к решению задач математического программирования. -Тез.докл. IУ Всесоюз.конф. по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, I977, с.93-94.

5. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации.-Новосибирск.: Наука, I978.-с.333.

6. Уайлд Д.Дж. Методы поиска экстремума.-М.: Наука, I967.--268 с.

7. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации.- Проблемы кибернетики, I976, вып. 3I, с. 35-42.

8. Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем. - Кибернетический сборник, новая серия, I975, вып. I2, с. I6-38.