Управляемые системы, ИМ СО АН СССР,1979 г.,выпуск I9.
УДК 519.176

О ЗАДАЧЕ ОТЫСКАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА (КОНТУРА) ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПРЕТОВ

А.И.Сердюков (Новосибирск)

Пусть задан n -вершинный неориентированный(ориентированный) граф $G=(X,\mathcal{U})$. Пусть также задана система подмножеств $X^i\subseteq X$, $1\leqslant i\leqslant n$, $|X^i|\leqslant k$, для некоторого натурального k , $k\leqslant n$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество взаимно-однозначных отображений из $X_n=\{1,2,3,\dots,n\}$ в X таких, что

$$f(i)\in X^i,\qquad 1\leqslant i\leqslant n, \qquad /1/$$

$$(f(i),f(j))\in \mathcal{U},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad j\equiv i+1(\mathrm{mod}\,n) \qquad /2/$$

для любого $f\in\mathcal{F}$. Задача I состоит в отыскании хотя бы одного такого отображения. Заметим, что при $|X^i|=n$, $1\leqslant i\leqslant n$, задача I совпадает с задачей отыскания гамильтонова цикла (контура) в неориентированном (ориентированном) графе G .

В работе [I] рассматривалась аналогичная задача(задача 2)во взвешенном графе, где выбиралось отображение $f_0\in\mathcal{F}$:

$$d(f_0)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ j\equiv i+1(\mathrm{mod}\,n)} d(f_0(i),f_0(j))=\min_{f\in\mathcal{F}} d(f), \qquad /3/$$

$d(f(i),f(j))$ - вес ребра (дуги) $(f(i),f(j))\in\mathcal{U}$. Там же было установлено, что задача 2 относится к числу полиномиально полных проблем при $k\geqslant 2$.

В настоящей работе исследованы два случая задачи I: $k=2$; $k\geqslant 3$. При $k=2$ построен алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ операций (арифметических операций либо операций сравнения) . При $k\geqslant 3$ установлено, что задача I относится к числу полиномиально полных проблем.

§ I. Алгоритм решения задачи I при $k=2$

Алгоритм будет описан для класса ориентированных графов, поскольку задача I на классе неориентированных графов легко сводится к задаче I на классе ориентированных графов (достаточно каждое ребро заменить парой противоположно ориентированных дуг).

Итак, заданы n -вершинный ориентированный граф $G=(X,\mathcal{U})$ и система подмножеств $X^i\subseteq X$, $|X^i|\leqslant 2$, $1\leqslant i\leqslant n$. Построим двудольный неориентированный граф $\bar G=(X_n,X,\bar{\mathcal{U}})$,где $\bar{\mathcal{U}}=\{(i,x)/x\in X^i, 1\leqslant i\leqslant n\}$.
В графе $\bar G$ выделим особые ребра $\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_p$ и блоки $q_1,q_2,\dots,q_s$.

Напомним [I] , что под особым ребром понимается ребро графа $\bar{G}$, которое принадлежит любому максимальному паросочетанию в графе $\bar{G}$, а под блоком понимается блок, определенный в [2] , который содержит не менее двух ребер. Заметим: для того чтобы задача I была разрешимой, необходимо, чтобы в графе $\bar{G}$ существовало совершенное паросочетание. Предположим, что это условие выполнено. Тогда ребра любого блока q_i , $1\leq i\leq s$, можно разбить на два паросочетания: $\overline{w}_{1,i}$ и $\overline{w}_{2,i}$,и любое совершенное паросочетание в графе $\bar{G}$ взаимно-однозначно определяется набором максимальных паросочетаний (по одному из каждого блока) и совокупностью особых ребер [I] .

О п р е д е л е н и е. Назовем допустимым любое паросочетание $\overline{w}\subseteq \bar{U}$, для которого выполнено следующее условие:
если $(i,x_1),(j,x_2)\subseteq\overline{w}$, $1\leq i\leq n$, $j\equiv i+1 (\mathrm{mod}\, n)$, то $(x_1,x_2)\in \mathcal{U}$. /4/

Построим m -вершинный $(m=2s)$ неориентированный граф $\tilde{G}=(X_m,\tilde{U})$ с множеством вершин $X_m=\{1,2,3,\ldots,m\}$ и множеством ребер $\tilde{U}$: $\tilde{u}_{ij}\in\tilde{U}$ тогда и только тогда, когда $i\not\equiv j (\mathrm{mod}\, s)$ и паросочетание

$$\overline{w}=\begin{cases}\overline{w}_0\cup\overline{w}_{i,1}\cup\overline{w}_{j,1}, & \text{если } 1\leq i,\ j\leq s,\\ \overline{w}_0\cup\overline{w}_{i,1}\cup\overline{w}_{j,2}, & \text{если } 1\leq i\leq s<j\leq m,\\ \overline{w}_0\cup\overline{w}_{i,2}\cup\overline{w}_{j,1}, & \text{если } 1<j\leq s<i\leq m,\\ \overline{w}_0\cup\overline{w}_{i,2}\cup\overline{w}_{j,2}, & \text{если } s<i,\ j\leq m,\end{cases} \qquad /5/$$

допустимо в графе $\bar{G}$, где $\overline{w}_0=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_p)$. Справедлива

Л е м м а I. Для разрешимости задачи I необходимо и достаточно существование клики мощности s в графе $\tilde{G}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Достаточность</u>. Пусть $K=(i_1,i_2,\ldots,i_s)$ - некоторая клика мощности s в графе $\tilde{G}$. Построим паросочетание $\overline{w}$ в графе $\bar{G}$ следующим образом:

$$\overline{w}=\overline{w}_0\cup\left\{\bigcup_{j=1}^{s}\overline{w}_j\right\}, \quad \text{где } \overline{w}_j=\begin{cases}\overline{w}_{1,j}, & \text{если } i_j=j,\\ \overline{w}_{2,j}, & \text{если } i_j=j+s.\end{cases} \qquad /6/$$

Учитывая /4/,/5/, легко показать, что паросочетание $\overline{w}$ допустимо в графе $\bar{G}$, или, что то же самое, отображение

$$f(i)=x,\quad (i,x)\in\overline{w},\quad 1\leq i\leq n, \qquad /7/$$

удовлетворяет /I/,/2/. Достаточность доказана.

<u>Необходимость</u>. Пусть $f\in\mathcal{F}$. Тогда, полагая $(i,x)\in\overline{w}$,если $f(i)=x$, $1\leq i\leq n$, и учитывая /2/, получим допустимое совершенное паросочетание $\overline{w}$ в графе $\bar{G}$. В этом случае набор вершин

$$\left\{i_j/i_j=\begin{cases}j, & \text{если } \overline{w}_{1,j}\subseteq\overline{w},\ 1\leq j\leq s,\\ j+s, & \text{если } \overline{w}_{2,j}\subseteq\overline{w},\ 1\leq j\leq s.\end{cases}\right\}$$

образует клику в графе $\tilde{G}$ (иначе нарушается /5/) .Лемма I доказана.

Опишем алгоритм сведения задачи I к задаче отыскания клики мощности s в графе $\tilde{G}$. Алгоритм состоит из четырех этапов.

I-й э т а п. Строится двудольный граф $\bar{G}$ по правилам,описанным выше.

2-й э т а п. Проверяется наличие совершенного паросочетания в графе G (параллельно определяется набор особых ребер и блоков). Если такого паросочетания нет, то исходная задача неразрешима.

3-й э т а п. Используя /5/, строим m -вершинный граф $\tilde{G}$.

4-й э т а п. Если в графе $\tilde{G}$ не существует клики мощности s , то исходная задача неразрешима (лемма I) в противном случае по найденной клике (алгоритм отыскания клики мощности s в графе $\tilde{G}$ будет описан ниже) , используя /6/,/7/, строим допустимое решение задачи I. Алгоритм описан полностью.

Заметим, что трудоемкость описанного алгоритма сведения задачи I к задаче отыскания клики мощности s в графе $\tilde{G}$ не превышает Cn^2 операций, где C - некоторая константа.

Алгоритм отыскания клики K_0 мощности s в графе $\tilde{G}$ состоит из $\ell \leqslant s$ однотипных шагов. На каждом шаге отыскивается (как минимум) одна вершина, принадлежащая K_0 . Каждый шаг представляет из себя $t \leqslant s$ элементарных шагов.

I-й шаг $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$. После работы $i-1$-го шага определен некоторый набор вершин K'_{i-1} . Если набор вершин $\left\{\bigcup_{v=1}^{i-1} K'_v\right\}$ не образует полного подграфа, то в графе $\tilde{G}$ не существует клики мощности s . В этом случае алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае полагаем $K'_{i-1} \subseteq K_0$ и удаляем вершины $K'_{i-1} \bigcup \left\{y / x \in K'_{i-1},\ y \equiv x + s (mod\, m)\right\}$ из текущего подграфа $\tilde{G}_{i-1}$. В результате этого получим некоторый m_i -вершинный подграф $\tilde{G}_i$ (на первом шаге полагаем $\tilde{G}_1 = \tilde{G}$, $m_1 = m$) . Опишем работу i -го шага по элементарным шагам.

j -й элементарный шаг $(1 \leqslant j \leqslant t)$. После работы $j-1$ -го элементарного шага определен некоторый набор вершин $I_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$. Если вершина x_j не смежна с некоторой вершиной из множества $I_{j-1} \bigcup \left\{\bigcup_{v=1}^{i-1} K'_v\right\}$, то полагаем $K'_i = \{y_1\}$, $y_1 \equiv x_1 + s (mod\, m)$ и переходим к $i+1$ -му шагу. Если каждая вершина из $I_j \bigcup \left\{\bigcup_{v=1}^{i-1} K'_v\right\}$ смежна со всеми вершинами текущего подграфа $\tilde{G}_i^j$ (на первом элементарном шаге полагаем $I_1 = \{x_1\}$, где x_1 - произвольная вершина текущего подграфа $\tilde{G}_i$, $\tilde{G}_i^1 = \tilde{G}_i \setminus \{x_1, y_1\}$, $y_1 \equiv x_1 + s (mod\, m)$, то полагаем $K'_i = I_j$ и переходим к $i+1$ -му шагу. Иначе полагаем $I_{j+1} = I_j \bigcup \{x_{j+1}\}$, где $y_{j+1} = x_{j+1} + s (mod\, m)$ - вершина графа $\tilde{G}_i^j$, не смежная с некоторой вершиной из $I_j \bigcup \left\{\bigcup_{v=1}^{i-1} K'_v\right\}$. Далее строим текущий подграф $\tilde{G}_i^{j+1} = \tilde{G}_i^j \setminus \{x_{j+1}, y_{j+1}\}$

и переходим к $j+1$ -му элементарному шагу. Шаг заканчивается на j_0 -м элементарному шаге, $\tilde{G}_i^{j_0+1} \neq \emptyset$. Алгоритм заканчивает свою работу на i_0 -м шаге, $\tilde{G}_{i_0} = \emptyset$.Алгоритм описан полностью.

Справедлива следующая

Т е о р е м а I. Если на некотором шаге i , $2 \leq i \leq i_0$, работы описанного алгоритма набор вершин $\left\{ \bigcup_{v=1}^{i-1} K'_v \right\}$ не образует полного подграфа, то в графе $\tilde{G}$ не существует клики мощности s .

Д о к а з а т е л ь с т в о будем проводить с помощью математической индукции по i , $2 < i < i_0$. При $i=2$ теорема справедлива, поскольку текущий набор вершин K'_1 образует полный подграф. В этом случае текущий набор вершин K'_1 состоит либо из одной вершины x_1 (вершина $y_1 \equiv x_1 + s(mod\, m)$ не может входить ни в одну клику мощности s в графе $\tilde{G}$), либо из множества I_j такого, что любая вершина подграфа $\tilde{G} \setminus \{ I_j \cup \{ y / x \in I_j ,$ $y \equiv x + s(mod\, m) \} \}$ смежна со всеми вершинами множества I_j .Без ограничения общности можно считать, что клике K_0 мощности s (если таковая существует) принадлежат вершины множества K'_1 . Предположим, что теорема справедлива при $i = w$ и клике K_0 мощности s (если таковая существует) принадлежат вершины множества $\left\{ \bigcup_{v=1}^{w-1} K'_v \right\}$.

Рассмотрим случай $i = w+1$. Возможны два исхода.

I) На шаге $i-1$ полученный набор вершин K'_i состоит из одной вершины x_1 (вершина $y_1 \equiv x_1 + s(mod\, m)$ не может входить ни в одну клику мощности s в графе $\tilde{G}$) . Тогда, если $\left\{ \bigcup_{v=1}^{w-1} K'_v \right\} \cup \{ x_1 \}$ не образует полного подграфа, не существует клики мощности s в графе $\tilde{G}$. В противном случае без ограничений общности можно положить, что клике K_0 мощности s (если таковая существует) принадлежит вершина x_1 . В этом случае на шаге i предположения индукции выполнены.

2) Набор вершин $\left\{ \bigcup_{v=1}^{w} K'_v \right\}$, $|K'_w| > 1$, образует полный подграф, и все вершины подграфа $\tilde{G} \setminus \left\{ \left\{ \bigcup_{v=1}^{w} K'_v \right\} \cup \left\{ x / y \in \left\{ \bigcup_{v=1}^{w} K'_v \right\} \right. \right.$, $\left. y \equiv x + s(mod\, m) \right\}$ смежны с любой вершиной множества $\left\{ \bigcup_{v=1}^{w} K'_v \right\}$.

Тогда без ограничения общности можно считать, что клике K_0 мощности s (если таковая существует) принадлежат вершины множества $\left\{ \bigcup_{v=1}^{w} K'_v \right\}$ и предположения индукции на i - м шаге выполнены.

Теорема I доказана.

При оценке трудоемкости работы описанного алгоритма достаточно заметить, что на каждом шаге его работы число затрачиваемых операций сравнимо с числом ребер в графе $\tilde{G}$ и ограничено числом $C_1 s^2$. Следовательно, общая трудоемкость работы алгоритма не превышает $c_1 s^3 < c_2 n^3$ операций, c_1 и c_2 - некоторые константы. Таким образом, мы обосновали алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ операций для нахождения решения задачи I при $k=2$.

§ 2. Сложность решения задачи I при $k\geqslant 3$

Известно [3], что задача отыскания клики мощности m в $3m$-вершинном графе $\hat G=(\hat X,\hat U)$, где $\hat U\subseteq\{\hat u_{ij}/\, i\not\equiv j(\mathrm{mod}\, m),\ 1\leqslant i,j\leqslant 3m\}$, относится к числу полиномиально полных проблем. Покажем, что последняя задача полиномиально сводится к задаче I при $k=3$ на ориентированном графе. Точнее, верна

Т е о р е м а 2. Задача I при $k=3$ на ориентированном графе - полиномиально полная проблема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим n-вершинный $(n=2m(m-1))$ ориентированный граф $G=(X,U)$ с множеством вершин $X=\{(i,j)/1\leqslant i\leqslant 2(m-1),\ 1\leqslant j\leqslant m\}$. Перенумеруем множество вершин X натуральными числами от 1 до n при помощи отображения $g: X\to N$:

$$g(2i-1,j)=g(2i,j)-1,\quad 1\leqslant i\leqslant m-1,\ 1\leqslant j\leqslant m, \qquad /8/$$

$$g(2i,j)=g(2j-1,i+1)-1,\quad 1\leqslant j\leqslant i\leqslant m-1, \qquad /9/$$

$$g(2i,j)=2(2m-i)(i-1)+4(j-i),\quad 1\leqslant i<j\leqslant m. \qquad /10/$$

Заметим, что отображение $g: X\longrightarrow N$ взаимно-однозначное. Легко показать, что

$$\text{если } (i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),\ (i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),\ \text{то } j_1<j_2 \qquad /11/$$

для любого l, $1\leqslant l\leqslant C_m^2$.

Система подмножеств X^i, $|X^i|=3$, $1\leqslant i\leqslant n$, задается следующим образом:

$$X^i=\{(r,j),(s,j),(t,j)\in X/(r,j)=g^{-1}(i),\ s\equiv r+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ t\equiv s+1(\mathrm{mod}\,2m-2)\}. \qquad /12/$$

Рассмотрим множества:

$$U_0=\{((i_1,j),(i_2,j))/i_1+1\not\equiv i_2(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1\leqslant i_1\leqslant 2m-2,\ 1\leqslant i_2\leqslant 2m-2,\ 1\leqslant j\leqslant m\}; \qquad /13/$$

$$U_{11}=\{((i_1,j_1),(i_2,j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),\ 1\leqslant l\leqslant C_m^2,\ \hat u_{j_1j_2}\notin\hat U\}; \qquad /14/$$

$$U_{21}=\{((i_1',j_1),(i_2,j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),\ i_1'\equiv i_1+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1\leqslant l\leqslant C_m^2,\ \hat u_{j_1+m,j_2}\notin\hat U\}; \qquad /15/$$

$$U_{31}=\{((i_1'',j_1),(i_2,j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),\ i_1''\equiv i_1+2(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1\leqslant l\leqslant C_m^2,\ \hat u_{j_1+2m,j_2}\notin\hat U\}; \qquad /16/$$

$$U_{12}=\{((i_1,j_1),(i_2',j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),\ i_2'\equiv i_2+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1\leqslant l\leqslant C_m^2,\ \hat u_{j_1,j_2+m}\notin\hat U\}; \qquad /17/$$

$$\mathcal{U}_{22}=\{((i_1',j_1),(i_2',j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),$$
$$i_1' \equiv i_1+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ i_2' \equiv i_2+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1<l<c_m^2,\ \hat{u}_{j_1+m,j_2+m} \notin \hat{\mathcal{U}}\}; \quad /18/$$
$$\mathcal{U}_{32}=\{((i_1'',j_1),(i_2',j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),$$
$$i_1'' \equiv i_1+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ i_2' \equiv i_2+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1<l<c_m^2,\ \hat{u}_{j_1+2m,j_2} \notin \hat{\mathcal{U}}\}; \quad /19/$$
$$\mathcal{U}_{13}=\{((i_1,j_1),(i_2'',j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),$$
$$i_2'' = i_2+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1<l<c_m^2,\ \hat{u}_{j_1,j_2+2m} \notin \hat{\mathcal{U}}\}; \quad /20/$$
$$\mathcal{U}_{23}=\{((i_1',j_1),(i_2'',j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),$$
$$i_1' \equiv i_1+1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ i_2'' \equiv i_2+2(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1<l<c_m^2,\ \hat{u}_{j_1+m,j_2+2m} \notin \hat{\mathcal{U}}\}; \quad /21/$$
$$\mathcal{U}_{33}=\{((i_1'',j_1),(i_2'',j_2))/(i_1,j_1)=g^{-1}(4l-2),(i_2,j_2)=g^{-1}(4l-1),$$
$$i_1'' \equiv i_1+2(\mathrm{mod}\,2m-2),\ i_2'' \equiv i_2+2(\mathrm{mod}\,2m-2),\ 1<l<c_m^2,\ \hat{u}_{j_1+2m,j_2+2m} \notin \hat{\mathcal{U}}\}. \quad /22/$$

Тогда множество дуг $\mathcal{U}$ в графе G задается следующим образом:

$$\mathcal{U}=\{(x_1,x_2)/x_1,x_2 \in X\} \setminus (\mathcal{U}_0 \cup (\bigcup_{1<i,j<3} \mathcal{U}_{ij})). \quad /23/$$

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество клик мощности m в графе $\hat{G}$. Справедлива

Л е м м а 2. Между множествами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$ существует взаимно-однозначное соответствие.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $K=(i_1,i_2,\ldots,i_m) \in \mathcal{K}$ и соответствующее отображение $f: X_n \longrightarrow N$:

$$(f \circ g)(k,t)=\begin{cases}(k,t),\ i_t=t, & 1<k<2(m-1),\ 1<t<m,\\ (k_1,t),\ i_t=t+m,\ k_1 \equiv k+1(\mathrm{mod}\,2m-2), & 1<k<2(m-1),\ 1<t<m, \quad /24/\\ (k_2,t),\ i_t=t+2m,\ k_2 \equiv k+2(\mathrm{mod}\,2m-2), & 1<k<2(m-1),\ 1<t<m.\end{cases}$$

Докажем, что $f \in \mathcal{F}$. Для этого достаточно показать, что $(f(i),f(j)) \in \mathcal{U}$ для любого $i<n$, $j \equiv i+1(\mathrm{mod}\,n)$, поскольку отображение f удовлетворяет (I). Предположим противное: существует $k_0<n$ такое, что

$$(f(k_0),f(k_1)) \notin \mathcal{U},\quad k_1 \equiv k_0+1(\mathrm{mod}\,n).$$

Тогда возможны два случая: а) $(f(k_0),f(k_1)) \in \mathcal{U}_0$; б) $(f(k_0),f(k_1)) \in \bigcup_{1<i,j<3} \mathcal{U}_{ij}$.

Рассмотрим а):

$$f(k_0)=(s_0,j_0),\ f(k_1)=(s_1,j_0),\ s_0+1 \not\equiv s_1(\mathrm{mod}\,2m-2). \quad /25/$$

Положим $i_{j_0}=j_0+\varepsilon_0 m \in K$, $\varepsilon_0 \in \{0,1,2\}$. Тогда, используя /24/, получим

$$g^{-1}(k_0)=(s_0',j_0),\quad s_0' \equiv s_0+\varepsilon_0(\mathrm{mod}\,2m-2),$$
$$g^{-1}(k_1)=(s_1',j_0),\quad s_1' \equiv s_1+\varepsilon_0(\mathrm{mod}\,2m-2)$$

или, учитывая /8/-/10/,

$$s_0'+1 \equiv s_1'(\mathrm{mod}\,2m-2).$$

Последнее равенство противоречит /25/.

Рассмотрим б):

$$f(K_0)=(s_0,j_0),\quad f(K_1)=(s_1,j_1),\quad j_0<j_1.$$

Положим

$$i_{j_0}=j_0+\varepsilon_0 m\in\mathcal{K},\quad i_{j_1}=j_1+\varepsilon_1 m\in\mathcal{K},\quad \varepsilon_0\in\{0,1,2\},\ \varepsilon_1\in\{0,1,2\}. \qquad /26/$$

Учитывая /24/, получим

$$g^{-1}(K_0)=(t_0,j_0),\qquad t_0\equiv s_0-\varepsilon_0(\mathrm{mod}\,2m-2),$$
$$g^{-1}(K_1)=(t_1,j_1),\qquad t_1\equiv s_1-\varepsilon_1(\mathrm{mod}\,2m-2),$$

откуда с учетом /14/-/22/

$$K_0=4\ell_0-2,\quad K_1=4\ell_0-1,\quad 1\leq\ell_0\leq C_m^2,\quad \hat{u}_{j_0 j_1}\notin\hat{\mathcal{U}}.$$

Получили противоречие с /26/. Таким образом, если $K\in\mathcal{K}$,то f , построенное при помощи /24/, принадлежит $\mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь $f\in\mathcal{F}$. Используя /24/, построим набор вершин $K=(i_1,i_2,\dots,i_m)$. Покажем, что $K\in\mathcal{K}$. Предположим противное: существуют $1\leq j_0<j_1\leq m$ такие, что $(i_{j_0},i_{j_1})\subset K$ и $\hat{u}_{j_1 j_2}\notin\hat{\mathcal{U}}$. Пусть $i_{j_0}=j_0+\varepsilon_1\cdot m$, $i_{j_1}=j_1+\varepsilon_2\cdot m$, $\varepsilon_1\in\{0,1,2\}$, $\varepsilon_2\in\{0,1,2\}$. Тогда, учитывая /13/-/22/, найдем ℓ_0 , $1\leq\ell_0\leq C_m^2$, такое, что

$$((t,j_0),(s,j_1))\notin\mathcal{U},\quad t\equiv t_0+\varepsilon_1(\mathrm{mod}\,2m-2),\ s\equiv s_0+\varepsilon_2(\mathrm{mod}\,2m-2),$$
$$(t_0,j_0)=g^{-1}(4\ell_0-2),\ (s_0,j_1)=g^{-1}(4\ell_0-1),$$

или, что то же самое,

$$(f(4\ell_0-2),f(4\ell_0-1))=((f\circ g)(t_0,j_0),(f\circ g)(s_0,j_1))=((t,j_0),(s,j_1))\notin\mathcal{U}.$$

Последнее условие противоречит $f\in\mathcal{F}$. Лемма доказана.

Таким образом, при нахождении клики мощности m в графе $\hat{G}$ достаточно найти отображение $f\in\mathcal{F}$ и воспользоваться /24/. Заметим, что при сведении задачи о нахождении клики мощности m в графе $\hat{G}$ к исходной задаче все оценки сведения полиномиальные. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Задача I при $k=3$ на неориентированном графе - полиномиально полная проблема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу I при $k=3$ на ориентированном графе $G=(X,\mathcal{U})$, $|X|=n'$, с заданной системой подмножеств $X^i\subseteq X$, $|X^i|=3$, $1\leq i\leq n$. Построим m-вершинный неориентированный граф $G_1=(X_1,\mathcal{U}_1)$ с множеством вершин $X_1=\{x,(x,1),(x,2)/x\in X\}$ и множеством ребер $\mathcal{U}_1=\{((x,1),x)$, $((x,2),x)/x\in X\}\cup\{((x,1),(y,2))/x\neq y,(x,y)\in\mathcal{U}\}$

Система подмножеств $\bar{X}^j\subset X_1$, $|\bar{X}^j|=3$, $1\leq j\leq m$, задается следующим образом:

$$\bar{X}^j=X^i,\qquad\qquad j=3i-2,\ 1\leq i\leq n,$$
$$\bar{X}^j=((x,1),(y,1),(z,1)),\ \text{если}\ X^i=(x,y,z),\ j=3i-2,\ 1\leq i\leq n, \qquad /27/$$
$$\bar{X}^j=((x,2),(y,2),(z,2)),\ \text{если}\ X^i=(x,y,z),\ j=3i,\quad 1\leq i\leq n.$$

Пусть $\bar{\mathcal{F}}$ -множество взаимно-однозначных отображений из $X_m = \{1,2,3,\dots,m\}$ в $\bar{X}$ таких, что

$$\bar{f}(i)\in \bar{X}_i, \qquad 1\le i\le m, \qquad /28/$$

$$(\bar{f}(i),\bar{f}(j))\in \mathcal{U}_1, \quad j= i+1(\mathrm{mod}\, m),\ 1\le i\le m, \qquad /29/$$

для любого $\bar{f}\in\bar{\mathcal{F}}$. Теорема 3 будет доказана, если установим взаимно-однозначное соответствие между множествами $\mathcal{F}$ и $\bar{\mathcal{F}}$. Учитывая /I/,/2/, /27/-/29/, а также используя результаты работы [3], получим, что таким отображением, в частности, является F : $\mathcal{F}\to\bar{\mathcal{F}}$:

$$\bar{f}(j)=\begin{cases} x, & f(i)=x,\quad j=3i-1,\quad 1\le i\le n,\\ x1, & f(i)=x,\quad j=3i-2,\quad 1\le i\le n,\\ x2, & f(i)=x,\quad j=3i,\quad 1\le i\le n,\end{cases}$$

$F(f)=\bar{f}$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Н.И.Глебову за ценные советы при написании работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
31 января 1979 г.

Литература

1. Сердюков А.И. О задаче коммивояжера при наличии запретов.- В кн.:Управляемые системы (дискретные экстремальные задачи). Новосибирск, 1978, вып.17, с. 80-86.

2. Харари Ф. Теория графов.-М.:Мир, 1963. - 200 с.

3. Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем. - Кибернетический сборник, 1975, вып. 12, с. 16-38.