Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 19.
УДК 517.977.5

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ НА ПРАВОМ КОНЦЕ

В.А.Срочко (Иркутск)

Задачи оптимального управления с ограничениями на правый конец фазовой траектории в качественном плане исследованы достаточно полно. Основные трудности численного решения указанных задач связаны с учетом фазовых ограничений (неявные ограничения на управление) при наличии собственных ограничений на управляющие воздействия. В настоящее время в этой области имеется определенный набор численных методов различного характера и степени общности [1 - 6]. Как правило, в этих методах игнорируются либо считаются тривиальными ограничения на управляющие воздействия. В этом отношении необходимо выделить методы типа возможных направлений [6], строго сохраняющие на каждом шаге итерационного процесса общие ограничения как на управление, так и на фазовые переменные. В настоящей работе предлагаются некоторые дополнительные варианты методов подобного типа, которые строятся на основе конструктивных форм представления необходимых условий оптимальности в рассматриваемых задачах.

В случае линейной управляемой системы исследование задачи проводится в фазовом пространстве конечных состояний и метод решения строится применительно к соответствующей задаче математического программирования. Каждая вспомогательная задача метода связана с отысканием седловой точки для билинейной функции на прямом произведении множества достижимости и некоторого многогранника. Исследован вопрос о сходимости метода.

В случае нелинейной системы с помощью конструктивных вариантов принципа максимума и его следствий решается задача улучшения допустимых управлений.

§ 1. Задача управления в линейной системе

1. Рассмотрим задачу оптимизации

$$J(u) = \varphi_0(x(t_1)) \to \min \qquad /1/$$

на траекториях линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + c(t), \quad x(t_0) = x^0, \qquad /2/$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad u = (u_1, \ldots, u_r)$$

при наличии ограничений на управление

$$u(t)\in U, \quad t_0\leqslant t\leqslant t_1, \qquad /3/$$

и правый конец фазовой траектории

$$x(t_1)\in X=\left\{x: \varphi_i(x)\leqslant 0, \quad i=1,\dots,m\right\}. \qquad /4/$$

Будем считать, что функции φ_i, $i=0,\dots,m$, в /I/,/4/ дифференцируемы на E_n, матричные функции $A(t), B(t), c(t)$ кусочно-непрерывны на $[t_0, t_1]$, область управления $U\subset E_r$ -выпуклое, компактное множество. Дополнительно к последнему предполагается, что задача минимизации произвольной линейной функции на множестве U допускает эффективное (аналитическое или численное) решение. Отметим, что это экстремальное свойство множества U типично для приложений и фактически означает, что в ограничениях /2/,/3/ легко решается (например, с помощью принципа максимума) линейная вспомогательная задача $d'x(t_1)\longrightarrow min$ со свободным правым концом.

Класс допустимых управлений определим как множество r -мерных вектор-функций $u(t)$ пространства $L_2^{(r)}[t_0, t_1]$, удовлетворяющих условию /3/ почти всюду на $[t_0, t_1]$. Пара $\left\{u(t), x(t)\right\}$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, образует допустимый процесс в задаче /I/-/4/, если $u(t)$- допустимое управление, $x(t)$ - соответствующая ему в силу системы /2/ фазовая траектория, выполняющая ограничение /4/.

Примем также предположение о невырожденности ограничений в поставленной задаче: $int X\neq\varnothing$ и существует допустимый процесс $\left\{u(t), x(t)\right\}$ с условием $x(t_1)\in int X$.

Для исследования задачи /I/-/4/ перейдем к ее конечномерному аналогу, используя понятие множества достижимости.

2. Пусть $R\subset E_n$ - множество достижимости системы /2/ к моменту времени t_1 в принятом классе допустимых управлений. В наших условиях R - выпуклое компактное множество, обладающее указанным выше экстремальным свойством. Специально выделим, как неособый, случай: R - строго выпуклое множество, когда в системе /2/ при ограничениях /3/ выполнено известное условие "общности положения", гарантирующее отсутствие особых управлений в поставленной задаче [7].

Рассмотрим соответствующую /I/-/4/ задачу математического программирования:

$$\min_{x\in Q}\varphi_0(x), \quad Q=\left\{x\in R: \varphi_i(x)\leqslant 0, \quad i=1,\dots,m\right\}. \qquad /5/$$

Отметим, что по предположению здесь выполнено условие Слейтера $R\cap int X\neq\varnothing$.

Сформулируем условия оптимальности в задаче /5/.

Для всякой допустимой точки $x\in Q$ образуем множества

$$I(x) = \left\{0,\ i \in (1, \ldots, m) : \varphi_i(x) = 0\right\},$$
$$P(x) = conv\left\{\nabla\varphi_i(x),\ i \in I(x)\right\}.$$

Т е о р е м а I. Если x^* – точка локального минимума в задаче /5/, то

$$\eta(x^*) = \min_{x \in R} \max_{y \in P(x^*)} y'(x - x^*) = 0. \qquad /6/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко проводится от противного. Пусть $\eta(x^*) < 0$ и минимум достигается в точке $\bar{x} \in R$. Тогда $\nabla\varphi_i(x^*)'(\bar{x} - x^*) < 0$, $i \in I(x^*)$, т.е. направление $\bar{x} - x^*$ является подходящим в точке x^*, что противоречит условию теоремы.

Используя теорему о минимаксе, условие /6/ можно представить в двойственной форме:

$$\eta(x^*) = \max_{y \in P(x^*)} \min_{x \in R} y'(x - x^*) = 0. \qquad /7/$$

Проведем обсуждение критериев /6/,/7/. Как принято, всякую точку $x^* \in Q$, удовлетворяющую необходимым условиям локального минимума, назовем стационарной точкой задачи /5/. В отношении условий /6/,/7/ имеет место обычное утверждение о достаточности: если функции $\varphi_i(x)$, $i = 0, \ldots, m$, выпуклы на R, то любая стационарная точка есть решение задачи /5/.

В совокупности соотношения /6/,/7/ можно сформулировать одним утверждением: если x^* – точка локального минимума в задаче /5/, то седловое значение функции $y'(x - x^*)$ на множестве $P(x^*) \times R$ равно нулю.

Условие /7/ представляет собой, по существу, экстремальную форму обобщенного правила множителей Лагранжа для задачи /5/. В самом деле, пусть максимум в /7/ достигается в точке $y^* \in P(x^*)$. Это значит, что

$$y^{*\prime}(x - x^*) \geqslant 0, \quad x \in R. \qquad /8/$$

Поскольку

$$y^* = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla\varphi_i(x^*), \quad \lambda_i^* \geqslant 0, \quad \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* = 1,$$

то неравенство /8/ и означает выполнение правила множителей в задаче /5/. Обратный переход от условия /8/ к /7/ проводится также элементарно.

Таким образом, формально необходимые условия /6/,/7/ эквивалентны правилу множителей в задаче /5/.

Конструктивные возможности условий /6/,/7/ заключаются в следующем. Пусть в некоторой точке $x^* \in Q$ условие /6/ не выполняется: $\eta(x^*) < 0$, причем минимум достигается на элементе $\bar{x} \in R$. Тогда вектор $\bar{x} - x^*$ является подходящим направлением в точке x^*. Если R – строго выпуклое множество, то для

отыскания подходящих направлений может быть использовано условие /7/. В этом случае, если $\eta(x^*) < 0$ и пара $(\bar{y}, \bar{x})$ реализует максимин в /7/, то $\bar{x} - x^*$ - подходящее направление в точке x^*. Этот факт является прямым следствием необходимых условий максимина.

Приведенные утверждения и положим в основу численного метода, который будем строить в соответствии со стандартными схемами методов возможных направлений в математическом программировании.

3. Пусть $x^K \in Q$, $\varepsilon_K > 0$, $K = 0, 1, \ldots$. Образуем множества

$$I_K = I(x^K, \varepsilon_K) = \left\{0,\ i \in (1, \ldots, m) : \varphi_i(x^K) \geq -\varepsilon_K\right\},$$
$$P_K = P(x^K, \varepsilon_K) = conv\left\{\nabla\varphi_i(x^K),\ i \in I_K\right\}.$$

Решаем одну из вспомогательных задач (вторая действует в неособом случае) :

$$\eta_K = \eta(x^K, \varepsilon_K) = \min_{x \in R} \max_{y \in P_K} y'(x - x^K), \qquad /9/$$

$$\eta_K = \eta(x^K, \varepsilon_K) = \max_{y \in P_K} \min_{x \in R} y'(x - x^K). \qquad /10/$$

Пусть точка $\bar{x}^K$ реализует $\min$ в /9/ или в /10/.

Следующая пара $(x^{K+1}, \varepsilon_{K+1})$ находится по правилам:

I) если $\eta_K \geq -\varepsilon_K$, то

$$\varepsilon_{K+1} = \beta\varepsilon_K,\quad \beta \in (0, 1),\quad x^{K+1} = x^K, \qquad /11/$$

2) если $\eta_K < -\varepsilon_K$, то

$$\varepsilon_{K+1} = \varepsilon_K,\quad x^{K+1} = x^K + \alpha_K(\bar{x}^K - x^K),\quad \alpha_K \in (0, 1]. \qquad /12/$$

Обсудим эту процедуру. Прежде всего отметим, что по смыслу задач /9/, /10/ в случае 2) вектор $p^K = \bar{x}^K - x^K$ является подходящим направлением в точке x^K, причем

$$\nabla\varphi_i(x^K)'p^K \leq \eta_K,\quad i \in I_K. \qquad /13/$$

Для выбора шага α_K в /12/ можно в принципе использовать любые способы, гарантирующие требования $x^{K+1} \in Q$, $\varphi_0(x^{K+1}) < \varphi_0(x^K)$. Для определенности возьмем за основу, например, способ условного наискорейшего спуска

$$\alpha_K : \min_{\alpha} \varphi_0(x^K + \alpha p^K) / 0 < \alpha \leq 1,\ \varphi_i(x^K + \alpha p^K) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m. \qquad /14/$$

Перейдем к вопросу о сходимости данного метода, опираясь на соответствующие результаты для аналогичных схем [8 - 10] .

Доказательству основной теоремы о сходимости предшествует ряд вспомогательных утверждений. При этом оговариваются лишь условия, дополняющие сделанные в п.I ограничения на параметры задачи.

Л е м м а I. Пусть

$$C = \max_{0 \leq i \leq m} \max_{x \in R} \|\nabla\varphi_i(x)\|,\quad D = \max_{x, y \in R} \|x - y\|$$

и на множестве R имеет место условие Липшица

$$\|\nabla\varphi_i(x)-\nabla\varphi_i(y)\|\leq \mathcal{L}\|x-y\|,\quad i=0,\dots,m. \qquad /15/$$

Если на K-м шаге метода $\varrho_K<0$, то для всех

$$\alpha\in[0,\beta_K],\quad \beta_K=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon_K}{C\mathcal{D}},\ \frac{|\varrho_K|}{\mathcal{L}\mathcal{D}^2}\right\}$$

выполняются соотношения

$$x^K+\alpha p^K\in Q,\quad \varphi_0(x^K+\alpha p^K)-\varphi_0(x^K)\leq\frac{1}{2}\alpha\varrho_K. \qquad /16/$$

Доказательство. Так как $\alpha\in[0,1]$, то $x^K+\alpha p^K\in R$. Для $i\bar{\in} I_K$ в условиях леммы имеем

$$\varphi_i(x^K+\alpha p^K)=\varphi_i(x^K)+\alpha\nabla\varphi_i(x^K+\theta_i\alpha p^K)'p^K\leq-\varepsilon_K+\alpha C\mathcal{D}\leq 0,$$
$$0<\theta_i<1.$$

Если $i\in I_K$, то, используя известную оценку [8, с.165] и неравенства /13/, получаем

$$\varphi_i(x^K+\alpha p^K)-\varphi_i(x^K)\leq\alpha\nabla\varphi_i(x^K)'p^K+\frac{\alpha^2}{2}\mathcal{L}\mathcal{D}^2\leq\alpha\varrho_K+\frac{\alpha^2}{2}\mathcal{L}\mathcal{D}^2\leq\frac{1}{2}\alpha\varrho_K.$$

В совокупности приходим к соотношениям /16/.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для всякой точки $\bar{x}\in Q$ найдутся такие числа $\gamma>0,\ \delta>0$, что для всех $\varepsilon\in[0,\gamma),\ x\in Q_\delta=\{x\in Q:\|x-\bar{x}\|<\delta\}$ имеет место включение $P(x,\varepsilon)\subset P(\bar{x},0)$.

Доказательство. Выберем γ и δ таким образом, чтобы

$$\varphi_i(\bar{x})\leq-2\gamma,\quad i\bar{\in} I(\bar{x},0),$$
$$|\varphi_i(\bar{x})-\varphi_i(x)|<\gamma,\quad x\in Q_\delta,\quad i=1,\dots,m.$$

Пусть теперь $\varepsilon\in[0,\gamma),\ x\in Q_\delta,\ i\in I(x,\varepsilon)$. Допустим, что $i\bar{\in} I(\bar{x},0)$. Тогда

$$\varphi_i(\bar{x})=\varphi_i(x)+[\varphi_i(\bar{x})-\varphi_i(x)]>-\varepsilon-\gamma>-2\gamma,$$

что противоречит выбору γ. Таким образом, $I(x,\varepsilon)\subset I(\bar{x},0)$, что равносильно утверждению леммы.

Лемма 3. Пусть $\bar{x}\in Q$ и $\varrho(\bar{x},0)<0$. Тогда найдутся такие числа $\gamma>0,\ \delta>0$, что для всех $\varepsilon\in[0,\gamma)$ и $x\in Q_\delta$ выполняется неравенство $\varrho(x,\varepsilon)\leq\frac{1}{2}\varrho(\bar{x},0)$.

Доказательство. Согласно определению,

$$\varrho(x,\varepsilon)=\min_{z\in R}\ \max_{y\in P(x,\varepsilon)} y'(z-x).$$

Пусть для $x=\bar{x},\ \varepsilon=0$ минимум здесь достигается в точке $\bar{z}$. Введем функцию

$$q(\bar{x})=\max_{y\in P(\bar{x},0)} y'(\bar{z}-x).$$

По определению, $q(\bar{x})=\varrho(\bar{x},0)$. В силу непрерывности функции $q(x)$ в точке $\bar{x}$ можно указать такое число $\delta_1>0$, что для

всех $x \in Q_{\delta_1}$ справедливо

$$|q(\bar{x}) - q(x)| \leqslant -\frac{1}{2}\eta(\bar{x},0).$$

С учетом этого неравенства и утверждения леммы 2, можно указать такие числа $\gamma > 0$ и $\delta \in (0,\delta_1)$, что для всех $\varepsilon \in [0,\gamma)$ и $x \in Q_\delta$

$$\eta(\bar{x},0) \geqslant \frac{1}{2}\eta(\bar{x},0) + q(x) \geqslant \frac{1}{2}\eta(\bar{x},0) + \max_{y \in P(x,\varepsilon)} y'(\bar{x}-x) \geqslant \frac{1}{2}\eta(\bar{x},0) + \eta(x,\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основной теоремы о сходимости.

Т е о р е м а 2. Пусть в задаче /5/ R - выпуклое, компактное множество, функции $\varphi_i(x)$, $i=0,\dots,m$, дифференцируемы на R и выполнено условие Липшица /15/. Тогда в методе /9/-/12/, /14/ $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$ и всякая предельная точка последовательности $\{x^k\}$ есть стационарная точка задачи /5/.

Докажем первое утверждение теоремы. Допустим противное, т.е. $\varepsilon_k \to \bar{\varepsilon} > 0$, $k \to \infty$. Это значит, что в процессе итераций случай 1) реализуется конечное число раз. Следовательно, найдется такой номер N, что для всех $k > N$ выполняется случай 2), т.е. $\eta_k < -\bar{\varepsilon}$. Положим

$$\alpha = \min\left\{1, \frac{\bar{\varepsilon}}{CD}, \frac{\bar{\varepsilon}}{LD^2}\right\}.$$

Тогда $0 < \alpha \leqslant \beta_k$ и на основании леммы 1 для всех $k > N$

$$\varphi_0(x^{k+1}) - \varphi_0(x^k) \leqslant \varphi_0(x^k + \alpha p^k) - \varphi_0(x^k) \leqslant \frac{1}{2}\alpha\eta_k < -\frac{1}{2}\alpha\bar{\varepsilon}.$$

Это противоречит сходимости невозрастающей последовательности $\{\varphi_0(x^k)\}$. Таким образом, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть теперь $\bar{x}$ - некоторая предельная точка последовательности $\{x^k\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $x^k \to \bar{x}$, $k \to \infty$. Допустим, что вопреки утверждению теоремы точка $\bar{x}$ не является стационарной, т.е. $\eta(\bar{x},0) < 0$. Пусть случай 1) метода выполняется на итерациях k_s, $s=1,2,\dots$, т.е. $\eta_{k_s} \geqslant -\varepsilon_{k_s}$. Так как при $s \to \infty$ имеем $\varepsilon_{k_s} \to 0$, $x^{k_s} \to \bar{x}$, то в соответствии с леммой 3 найдется такой номер M, что для $s \geqslant M$ будет $\eta(x^{k_s}, \varepsilon_{k_s}) < \frac{1}{2}\eta(\bar{x},0)$. Таким образом, $-\varepsilon_{k_s} \leqslant \frac{1}{2}\eta(\bar{x},0) < 0$, $s > M$, что противоречит сходимости $\varepsilon_{k_s} \to 0$, $s \to \infty$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если функции $\varphi_i(x)$, $i=0,\dots,m$, выпуклы на R, то последовательность $\{x^k\}$ является минимизирующей в задаче /5/.

4. Сформулируем полученные результаты в терминах исходной задачи оптимального управления.

Прежде всего отметим, что условия оптимальности /6/-/7/ в задаче /5/ эквивалентны принципу максимума для задачи /1/-/4/,

т.е. всякое допустимое управление $u^*(t),\ t_0\le t\le t_1$, переводящее систему /2/ к моменту t_1 в стационарную точку x^* задачи /5/, удовлетворяет принципу максимума, и наоборот. Это соответствие сразу выявляется, если применить формулу Коши для представления точек $x(t_1)$ множества R.

Опишем теперь итерационную процедуру в терминах управлений. Пусть $\{u^k(t),\ x^k(t)\},\quad t_0\le t\le t_1,$ - допустимый процесс задачи /1/-/4/, $\varepsilon_k>0$. Полагая $x^k(t_1)=x^k$, решаем вспомогательную задачу /9/ или /10/ нахождения величины η_k. В результате получим допустимое управление $\bar u^k(t),\ t_0\le t\le t_1$, переводящее систему /2/ в точку $\bar x^k$. Далее действуем по правилу:

1) если $\eta_k\ge-\varepsilon_k$, то

$$\varepsilon_{k+1}=\beta\varepsilon_k,\ \beta\in(0,1),\ u^{k+1}(t)=u^k(t),\quad t_0\le t\le t_1,$$

2) если $\eta_k<-\varepsilon_k$, то

$$\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k,\ u^{k+1}(t)=u^k(t)+\alpha_k(\bar u^k(t)-u^k(t)),\ t_0\le t\le t_1.$$

Сходимость метода в пространстве управлений устанавливатеся с помощью теоремы 2. Согласно формуле Коши,

$$x^k=x^k(t_1)=F(t_1)x^0=\int_{t_0}^{t_1}F(t_1)F^{-1}(t)[B(t)u^k(t)+c(t)]dt,$$

$$\dot F=A(t)F,\quad F(t_0)=E.$$

Отсюда,на основании теоремы 2, следует утверждение о сходимости метода в пространстве $L_2^{(r)}[t_0,t_1]$: всякое предельное (в слабом смысле) управление последовательности $\{u^k(t)\}$ удовлетворяет принципу максимума в задаче /1/-/4/.

5. Обсудим возможности решения вспомогательных задач метода.

Задачу /9/ можно интерпретировать, например, как задачу выпуклого программирования:

$$\min_{x\in R}\mu_k(x),\quad \mu_k(x)=\max_{i\in I_k}\nabla\varphi_i(x^k)'(x-x^k).\qquad /17/$$

Целевая функция является, как известно, дифференцируемой по направлениям, причем направление ее наискорейшего спуска в каждой точке $x\in R$ может быть эффективно найдено в результате решения специальной задачи квадратичного программирования (минимизация нормы на многограннике) [10] . Относительно допустимого множества легко решается задача минимизации линейной функции и может эффективно решаться задача проектирования (минимизация нормы конечного состояния для системы /2/) .

Приведенные соображения открывают возможности для решения задачи /17/, например, с помощью методов типа условного градиента, проекции градиента в случае недифференцируемых функций.

Вторая вспомогательная задача /10/ более предпочтительна для решения, ибо она представляет собой гладкую задачу вогнутого

программирования

$$\max_{y\in P_K} g_K(y), \quad g_K(y)=\min_{x\in R} y'(x-x^K). \qquad /18/$$

Так как в данном случае R - строго выпуклое множество, то $g_K(y)$ - дифференцируемая функция, причем для каждого $y\in P_K$ значения $g_K(y)$, $\nabla g_K(y)$ подсчитываются достаточно просто. Действительно, определим управление $u(t,y)$ из условия

$$\min_{u\in U} \psi(t,y)'B(t)u, \quad t_0\leq t\leq t_1,$$

где $\psi(t,y)$ - решение сопряженной системы

$$\dot\psi=-A'(t)\psi, \quad \psi(t_1)=y.$$

Пусть $x(t,y)$ - решение системы /2/, соответствующее управлению $u(t,y)$. Тогда

$$g_K(y)=y'(x(t_1,y)-x^K), \quad \nabla g_K(y)=x(t_1,y)-x^K.$$

Таким образом, с учетом простой конструкции множества P_K для решения вспомогательной задачи /18/ можно успешно применить известные методы градиентного типа. Если y^K - решение задачи/18/, то полагаем $\bar x^K=x(t_1,y^K)$.

Отметим также, что для понижения размерности задачи /18/ целесообразно использовать представление

$$y=\sum_{i\in I_K}\lambda_i\nabla\varphi_i(x^K), \quad \lambda_i\geq 0, \quad \sum_{i\in I_K}\lambda_i=1$$

и решать задачу в пространстве двойственных переменных λ_i, $i\in I_K$.

6. Отыскание начального приближения можно проводить с помощью того же метода, примененного к некоторой искусственной задаче. Построим такую задачу следующим образом. Пусть $\{\bar u(t),\bar x(t)\}$, $t_0\leq t\leq t_1$, - произвольный процесс с допустимым управлением $\bar u(t)$. Положим

$$\Delta=\max_{1\leq i\leq m}\varphi_i(\bar x(t_1))$$

и рассмотрим задачу

$$\dot x=A(t)x+B(t)u+c(t), \quad \dot x_{n+1}=\frac{\Delta}{t_1-t_0}u_{r+1}, \quad x(t_0)=x^0, \quad x_{n+1}(t_0)=0,$$

$$u(t)\in U, \quad |u_{r+1}(t)|\leq 1, \quad t_0\leq t\leq t_1,$$

$$\varphi_i(x(t_1))-x_{n+1}(t_1)\leq 0, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_{n+1}(t_1)\longrightarrow \min.$$

В этой задаче управление $\bar u(t)$, $\bar u_{r+1}(t)=1$, $t_0\leq t\leq t_1$, порождает допустимый процесс, что позволяет начать реализацию метода. Выполнение неравенства $x_{n+1}(t_1)\leq 0$ означает нахождение допустимого процесса для исходной задачи.

З а м е ч а н и е. Если в задаче /1/-/4/ фазовые ограничения в момент t_1 отсутствуют (свободный правый конец), то дан-

ный метод превращается в стандартный метод условного градиента для задачи /I/-/3/.

§ 2. Задача управления в нелинейной системе

Рассмотрим задачу /I/,/3/,/4/ применительно к нелинейной управляемой системе

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0)=x^0.$$

Сохраняя свойство дифференцируемости функций $\varphi_i(x)$, $i=0,\dots,m$, предположим, что:

а) вектор-функция $f(x,u,t)$ непрерывна по своим аргументам вместе с производной $f_x(x,u,t)$ на прямом произведении $E_n \times U \times [t_0, t_1]$, множество U в /3/ компактно;

в) дополнительно к условиям а) существует непрерывная производная $f_u(x,u,t)$, множество U выпукло.

Допустимыми управлениями будем считать кусочно-непрерывные на $[t_0, t_1]$ вектор-функции $u(t)$ с ограничением /3/. Как известно, в условиях а) действует принцип максимума для рассматриваемой задачи. Предположим, что операция максимума для функции $H(\psi,x,u,t)=\psi' f(x,u,t)$ по u на множестве U эффективно разрешима.

Условия в) соответствуют дифференциальному принципу максимума. В этом случае считаем выполненным сформулированное в § I экстремальное свойство множества U.

В рамках данной существенно нелинейной задачи укажем реализуемые способы улучшения допустимых управлений на основе необходимых условий оптимальности. В задачах со свободным правым концом соответствующие процедуры построены в [II]. Как известно, задача улучшения некоторого допустимого процесса $\{u(t), x(t)\}$, $t_0 < t < t_1$, состоит в нахождении допустимого процесса $\{\bar{u}(t), \bar{x}(t)\}$, $t_0 < t < t_1$, со свойством $J(\bar{u}) < J(u)$. При этом говорят, что управление $\bar{u}(t)$ лучше управления $u(t)$. Будем решать эту задачу с помощью принципа максимума и его следствий.

Отметим, что традиционная форма принципа максимума в рассматриваемой задаче носит неконструктивный характер, и ее применение к задаче улучшения допустимых процессов, вообще говоря, проблематично. В этом отношении более предпочтителен многоточечный вариант принципа максимума, приведенный в [I2], однако и в этом случае сохраняются трудности, связанные с реализацией условия. Поэтому укажем другие формулировки необходимых условий оптимальности, более приемлемые для наших целей.

Пусть $\{u(t), x(t)\}$, $t_0 < t < t_1$, - допустимый процесс, $\psi^{(i)}(t)$, $i=0,\dots,m$, - соответствующее ему решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -f_x'(x(t),u(t),t)\psi, \quad \psi(t_1) = -\nabla\varphi_i(x(t_1)).$$

Образуем функции $H^{(i)} = \psi^{(i)\prime} f$, $i=0,\dots,m$, множества

$$I=\{0,\ i\in(1,\dots,m):\ \varphi_i(x(t_1))=0\},$$
$$\Lambda=\{\lambda=\{\lambda_i\},\ i\in I:\ \lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i\in I}\lambda_i=1\}$$

и введем обозначение

$$\Delta_v H^{(i)}/_{(t)}=\psi^{(i)}(t)'(f(x(t),v,t)-f(x(t),u(t),t)).$$

Теорема 3. В условиях а) для оптимальности процесса $\{u(t),x(t)\}$ необходимо, чтобы

$$\min_{\lambda\in\Lambda}\int_{t_0}^{t_1}\max_{v\in V}\sum_{i\in I}\lambda_i\Delta_v H^{(i)}/_{(t)}dt=0. \qquad /19/$$

Доказательство. Убедимся, что условие /19/ эквивалентно принципу максимума. Пусть минимум достигается в точке $\lambda^0\in\Lambda$. Так как подынтегральное выражение неотрицательно, то

$$\max_{v\in V}\sum_{i\in I}\lambda_i^0\Delta_v H^{(i)}/_{(t)}=0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1. \qquad /20/$$

Полагая

$$H=\sum_{i\in I}\lambda_i^0 H^{(i)},\quad \psi=\sum_{i\in I}\lambda_i^0\psi^{(i)},$$

получаем стандартную формулировку принципа максимума относительно функции H и сопряженной переменной ψ.

Обратно, пусть имеется такой вектор $\lambda^0\in\Lambda$, что выполнен принцип максимума, т.е. соотношение /20/. Поскольку для любого $\lambda\in\Lambda$

$$\int_{t_0}^{t_1}\max_{v\in V}\sum_{i\in I}\lambda_i\Delta_v H^{(i)}/_{(t)}dt\geqslant 0,$$

то получаем условие /19/.

Теорема доказана.

Из полученного результата вытекает соответствующее дифференциальному принципу максимума

Следствие. В условиях в) для оптимальности процесса $\{u(t),x(t)\}$ необходимо, чтобы

$$\mu=\min_{\lambda\in\Lambda}\int_{t_0}^{t_1}\max_{v\in V}\sum_{i\in I}\lambda_i H_u^{(i)}/'_{(t)}(v-u(t))dt=0. \qquad /21/$$

Условия оптимальности вида /19/,/21/ носят вполне определенный характер и их реализация связана с решением специальных задач выпуклого программирования с достаточно простым допустимым множеством Λ. При этом операция максимума под знаком интегралов в /19/,/21/ вследствие принятых предположений эффективно разрешима для любого $\lambda\in\Lambda$. Условие /19/ носит в основном проверочный характер, однако его следствие /21/ применимо для решения задачи улучшения с помощью классических вариаций управления.

Пусть условие /21/ не выполнено, т.е. $\mu > 0$, причем минимум достигается в точке λ^0. Допустим, что внутренняя задача на максимум при $\lambda = \lambda^0$ допускает единственное кусочно-непрерывное решение $v^0(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$. Тогда, в силу необходимых условий минимакса [10], получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u^{(i)\prime}/_{(t)} (v^0(t) - u(t))dt \geqslant \mu > 0, \quad i \in I.$$

Отсюда следует, что управление $\bar{u}(t) = u(t) + \alpha(v^0(t) - u(t)), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, при малых $\alpha \in (0, 1]$ обеспечивает улучшение исходного процесса. Ослабим условия /19/,/21/ с целью решения задачи улучшения в классе вариаций игольчатого типа.

Теорема 4. В условиях а), в) для оптимальности процесса $\{u(t), x(t)\}$ необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1]$

$$\delta_1(\theta) = \min_{\lambda \in \Lambda} \max_{v \in V} \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta_v H^{(i)}/_{(\theta)} = \max_{v \in V} \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta_v H^{(i)}/_{(\theta)} = 0, \quad /22/$$

$$\delta_2(\theta) = \min_{\lambda \in \Lambda} \max_{v \in V} \sum_{i \in I} \lambda_i H_u^{(i)\prime}/_{(\theta)} (v - u(\theta)) = \max_{v \in V} \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i H_u^{(i)\prime}/_{(\theta)} (v - u(\theta)) = 0. \quad /23/$$

Доказательство проводится вполне аналогично предыдущему (см. теорему 3).

Отметим, что поточечные условия /22/,/23/ являются лишь следствием интегральных критериев /19/,/21/, ибо они порождают вектор множителей λ^0, зависящий, вообще говоря, от θ.

Продолжим решение задачи улучшения на основе условий /22/, /23/. Пусть в некоторый момент $\theta \in [t_0, t_1]$, $\delta_1(\theta) > 0$ и максимин в /22/ достигается в точке $v(\theta)$. Тогда

$$\Delta_{v(\theta)} H^{(i)}/_{(\theta)} \geqslant \delta_1(\theta) > 0, \quad i \in I.$$

Построим на $[t_0, t_1]$ управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} v(\theta), & t \in [\theta - p\varepsilon, \theta + q\varepsilon], \\ u(t), & \bar{t} \in [\theta - p\varepsilon, \theta + q\varepsilon], \end{cases}$$

где $p, q \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\bar{x}(t)$ - соответствующая фазовая траектория. На основании известных формул приращения [15] получаем

$$\varphi_i(\bar{x}(t_1)) - \varphi_i(x(t_1)) = -\Delta_{v(\theta)} H^{(i)}/_{(\theta)} (p+q)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad i \in I.$$

Следовательно, при малых $\varepsilon > 0$ процесс $\{\bar{u}(t), \bar{x}(t)\}$ является допустимым и обеспечивает убывание целевого функционала.

Аналогично, если $\delta_2(\theta) > 0$ и максимин в /23/ достигается в точке $v(\theta)$, то на $[\theta - p\varepsilon, \theta + q\varepsilon]$ полагаем $\bar{u}(t) = u(t) + \alpha(v(\theta) - u(t))$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. В этом случае из формул приращения получаем

$$\varphi_i(\bar{x}(t_1)) - \varphi_i(x(t_1)) = -H_u^{(i)}\big|'_{(\theta)}(v(\theta)-u(\theta))(p+q)\alpha\varepsilon + \\ + \varepsilon o(\alpha)+\alpha o(\varepsilon)+o(\varepsilon\alpha), \quad i\in I.$$

Отсюда следует, что при малых α,ε процесс $\{\bar{u}(t),\bar{x}(t)\}$ решает задачу улучшения.

В неособых точках θ, когда операции

$$\max_{v\in V}\sum_{i\in I}\lambda_i\Delta_v H^{(i)}\big|_{(\theta)}, \quad \max_{v\in V}\sum_{i\in I}\lambda_i H_u^{(i)}\big|'_{(\theta)}(v-u(\theta))$$

разрешаются однозначно, параметр $v(\theta)$ для процедур улучшения можно находить с помощью минимаксных задач в /22/, /23/, которые более предпочтительны для решения.

Таким образом, все изложенные способы улучшения являются прямым следствием реализации необходимых условий оптимальности и их обоснованием служат соответствующие формулы приращения функционалов. Последовательное решение задачи улучшения приводит к некоторому итерационному процессу, позволяющему, вообще говоря, отыскивать стационарные управления в данной задаче.

В заключение выскажем некоторые соображения по поводу реализации описанных процедур. Понятно, что в практических вычислениях в качестве точки θ должны фигурировать узлы численного интегрирования основной и сопряженной систем. В простейшем случае можно последовательно полагать $\theta=t_0+kh,\ k=0,1,\ldots$, где h - шаг интегрирования. Параметры p,q,ε нужно также согласовывать при численной реализации с шагом h. Варьирование можно осуществлять, например, по правилу $[\theta-ph,\ \theta+qh],\ p,q=0,1,\ldots$.Параметр α играет роль шага в "направлении" соответствующей вариации управления.

Поступила в ред-изд.отдел
10 мая 1978 г.

Литература

1. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем.-М.: Наука, 1971.-350 с.

2. Брайсон А.,Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления.-М.:Мир, 1972.-544 с.

3. Полак Э. Численные методы оптимизации.-М.:Мир,,1974.-270с

4. Черноусько Ф.Л.,Колмановский В.Б.Вычислительные и приближенные методы оптимального управления (обзор) .-В сб.:Мат.анализ. М.,ВИНИТИ АН СССР.1977. т.14, с.101-166.

5. Pironneau O., Polak E. A dual method for optimal control problems with initial and final boundary constraints. - SIAM. J.Control, 1973, v. 11, №-3, p. 534-549.

6. Polak E., Mayne D.Q. First order strong variation algorithms for optimal control problems with terminal inequality constraints. - J.Optimis. Theory and Appl., 1975, 16, N° 3-4, p. 303-325.

7. Математическая теория оптимальных процессов/Понтрягин Л.С.,Болтянский В.Г.,Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф.-М.:Наука,1969. -390 с.

8. Карманов В.Г. Математическое программирование.-М.:Наука, 1975.-272 с.

9. Пшеничный Б.Н.,Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах.-М.:Наука, 1975.-319 с.

10. Демьянов В.Ф.,Малоземов В.Н.Введение в минимакс.-М.:Наука, 1972.-368 с.

11. Габасов Р.,Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления.-Минск: Наука и техника, 1974.

12. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории.-Дифференц.уравнения, 1975, т.XI, № 10, с.1765-1773.