Управляемые системы, ИМ, ИК, СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.519.1.

ОБ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПУТЕЙ В КОНЕЧНОМ ДЕРЕВЕ

Н.П.Мазурова

Известно, что для определения элементарного пути между двумя различными вершинами графа в общем случае требуется просмотр всех вершин графа./Путь называется элементарным, если в нем никакая вершина не встречается более одного раза/. В настоящей заметке предлагается такой метод отыскания элементарного пути, который позволяет просматривать значительно меньшее количество вершин. С этой целью на множестве $V(G)$ вершин графа G определяется функция φ и оператор выбора вершин искомого пути, использующий значения φ на вершинах из G, такой, что путь $\mu[x,y]$, соединяющий x и y из G, строится последовательно путем выбора вершины x_i, лежащей в первой окрестности вершины x_{i-1} и являющейся вершиной элементарного пути. Очевидно, что данный метод имеет ценность лишь при условии многократного выбора различных элементарных путей в графе G. Все неопределяемые здесь понятия могут быть найдены в [1]. Мы ограничиваемся случаем, когда граф G является деревом.

В первом параграфе вводятся необходимые определения и доказываются некоторые вспомогательные леммы.

Во втором параграфе на $V(G)$ определяется функция и изучаются ее основные свойства.

В третьем параграфе вводится оператор нахождения вершин элементарного пути, использующий значения функций φ на вершинах графа, и доказывается основная теорема.

§ 1. Предварительные построения и леммы

Пусть G-конечное дерево, $V(G)$ - множество его вершин. Первой окрестностью $U(x)$ вершины $x\in V(G)$ будем называть множество всех вершин графа G, инцидентных x.

$$U(x)=\{y, (x,y)\in G\}.$$

Разобьем $V(G)$ на подмножества $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n$ следующим образом. Положим $G_1=G$ и

$$\Gamma_1=\{x\in V(G_1)\mid \rho(x)=1\}, \qquad /1/$$

где $\rho(x)$ - степень графа G_1 в вершине x. Далее

$$\Gamma_i=\{x\in V(G_i)\mid \rho(x)=1\}, \qquad /2/$$

где G_i - подграф графа G, для которого

$$V(G_i)=V(G)\setminus \bigcup_{k=1}^{i-1}\Gamma_k, \qquad /3/$$

или, что то же самое

$$V(G_i)=V(G_{i-1})\setminus \Gamma_{i-1}. \qquad /3'/$$

Имеет место следующая

Л е м м а I. а/ Существует такое натуральное $N>0$, что $\Gamma_N = V(G_N)$;

б/ если имеет место а/, то G_N состоит либо из одной точки, либо из двух точек и связывающего их ребра. Если $\Gamma_N = V(G_N)$ и $|\Gamma_N| = 1$, то G_N назовем I-деревом, если $|\Gamma_N| = 2$ - 2-деревом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть леммы, очевидно, следует из [I] /теорема 4.I.2/ и конечности G. Если предположить, что $|V(G_N)| > 2$, то легко получается противоречие с тем фактом, что G_N -связный граф без циклов.

С л е д с т в и е. I-дерево и 2-дерево суть единственные деревья, все вершины которых концевые.

Л е м м а 2. а/ если $x \in \Gamma_i \ (i=2,\dots,N)$, то существует, по крайней мере, одна вершина $y \in \Gamma_{i-1}$ такая, что $(x,y) \in G$;

б/ для любого $x \in \Gamma_i \ (i=1,\dots,N-1)$ существует единственная вершина $y \in G_{i+1}$, что $(x,y) \in G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а/ Пусть $x \in \Gamma_i \ (i=2,\dots,N)$. Если вершина x не смежна ни с одной вершиной из Γ_{i-1}, то и в графе G_{i-1} $\rho(x) = 1$, следовательно, $x \in \Gamma_{i-1}$. С другой стороны, из /3'/ следует, что

$$\Gamma_{i-1} \cap V(G_{i-1}) = \varnothing, \quad \text{т.е.}$$

$$\Gamma_{i-1} \cap \Gamma_i = \varnothing. \tag{4}$$

Полученное противоречие доказывает утверждение а/ леммы 2. Справедливость б/ непосредственно следует из определения концевой вершины. Лемма 2 доказана.

Определим множество L_i для всех $i \in (-\infty, \infty)$:

$$L_i = \begin{cases} \varnothing & \text{для} \quad i > N \text{ и } i < 1, \\ \bigcup\limits_{k=1}^{i} \Gamma_k & \text{для} \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \tag{5}$$

Из равенств /I/, /2/ и /5/ непосредственно следует

Л е м м а 3. а/ $L_i \cap \Gamma_{i+1} = \varnothing$,

б/ $L_N = V(G)$.

Для удобства определения функции φ введем еще для каждого $x \in V(G)$ множество $M(x)$ вершин графа G.

Пусть $x \in \Gamma_i$. Тогда

$$M(x) = U(x) \cap L_{i-1}.$$

Докажем, что $M(x) \neq \varnothing$. Действительно, имеет место

$$U(x) \cap L_{i-1} \supseteq U(x) \cap \Gamma_{i-1},$$

а, по пункту а/ леммы 2

$$U(x) \cap \Gamma_{i-1} \neq \varnothing.$$

Положим далее $M_0(x) = \{x\}$, $M_1(x) = M(x)$ и для $i > 1$

$$M_i(x) = \bigcup_{t \in M_{i-1}(x)} M(t).$$

Наконец, через $M_\infty(x)$ обозначим

$$M_\infty(x) = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i(x).$$

Очевидно, для любой вершины $x \in G$ $M_\infty(x)$ имеет с Γ_1 хотя бы один об-

щий элемент.

§ 2 Построение функции φ

Пусть $\Gamma_i=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ и пусть $\{r_1,r_2,\dots,r_k\}$ - система натуральных, попарно взаимно простых отличных от единицы чисел. Тогда на множествах $L_1,L_2,\dots,L_N$ определим функции $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N$ следующим образом. Положим

$$\varphi_1(x_j)=r_j \quad (j=1,2,\dots,k). \qquad /6/$$

Если функция φ_{i-1} уже определена, то

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\varphi_{i-1}(x), & \text{если} \quad x\in L_{i-1},\\ \prod\limits_{y\in M(x)}\varphi_{i-1}(y), & \text{если} \quad x\in\Gamma_i \text{ и } |M(x)|\geq 2,\\ \varphi_{i-1}\cdot d, & \text{если} \quad x\in\Gamma_i \text{ и } |M(x)|=\{y\}.\end{cases} \qquad /6'/$$

Здесь d - наименьший простой делитель $\varphi_{i-1}(y)$, отличный от единицы.

Л е м м а 4. Функции φ_i определены однозначно на множествах L_i, $i=1,2,\dots,N$.

Доказательство леммы следует из определенности и однозначности φ_1 и того факта, что $M(x)\neq\varnothing$ для всех $x\in G$. Определим теперь функцию $\varphi(x)$ на всем множестве $V(G)$ следующим образом. Если $|V(G_N)|=1$, то

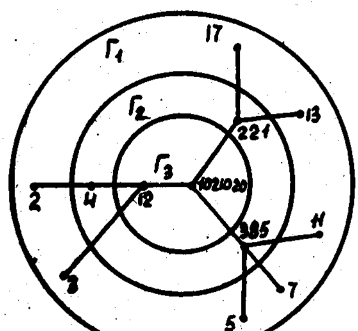
$$\varphi(x)=\varphi_N(x) \quad \text{для всех} \quad x\in G. \qquad /7/$$

Если же $|V(G_N)|=2$ и $\varphi_N(y_1)\leq\varphi_N(y_2)$, где $y_1\in V(G_N)$ и $y_2\in V(G_N)$, то

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_{N-1}(x), & \text{если} \quad x\in L_{N-1},\\ \varphi_N(y_1), & \text{если} \quad x=y_1,\\ \varphi_N(y_1)\cdot\varphi_N(y_2), & \text{если} \quad x=y_2.\end{cases} \qquad /7'/$$

Очевидно, что $\varphi(x)$ - однозначно определенная на $V(G)$ целочисленная функция. Легко видеть, что она достигает своего максимума на $x\in\Gamma_N$ в первом случае, то есть, когда $|\Gamma_N|=1$, и на $y_2\in\Gamma_N$, когда $|\Gamma_N|=2$ и $\varphi_N(y_1)\leq\varphi_N(y_2)$, то есть на центре и, соответственно, бицентре графа G. Точку, в которой $\varphi(x)$ максимальна, назовем корнем G относительно функции φ.

Иллюстрацией приведенных построений служит рисунок.



Докажем основные свойства функции φ .

Свойство I. Пусть $x \in G$ и $\mu[x,\bar{x}]=[x=x_1,x_2,\dots,x_k=\bar{x}]$ элементарный путь, соединяющий x с $\bar{x}$, где $\bar{x}$ -корень G относительно φ . Тогда $\varphi(x_i)$ делит $\varphi(x_{i+s})$ для всех $i=1,\dots,k$ и для всех $S \geqslant 1$.

Доказательство. Действительно, если $x \in \Gamma_i$, то в G_i $U(x)=\{\bar{x}\}$. Но поскольку x соединена с $\bar{x}$ и в G_i элементарным путем, то $\bar{x}=x_2$ и по /6'/ $\varphi(x_1)$ делит $\varphi(x_2)$. Рассмотрим граф G_{i+s} . Пусть x_s -его концевая вершина. Из утверждения б/ леммы I следует, что в G_{i+s+1} имеется единственная вершина y , что $(x_s,y)\in G$. Но тогда $x_{s+1}=y$ и $\varphi(x_s)$ делит $\varphi(y)$. Свойство I доказано.

Следствие. В дереве G существует единственная вершина x такая, что $\varphi(x)$ делится на $\varphi(y)$ для всех $y \in G$. Действительно, такой вершиной является корень G относительно φ . Это следует из свойства I и определения φ .

Свойство 2. Для любых различных x и y из G либо $(\varphi(x),\varphi(y))=1$, либо одно из значений φ делится на другое.

Доказательство. Пусть для вершины z $\pi(z)$ означает множество всех простых чисел, делящих $\varphi(z)$. Тогда для $z \in \Gamma_i$ $(i<N)$ имеем, по определению функции φ ,

$$\pi(z)=\bigcup_{t\in M(z)}\pi(t), \qquad /8/$$

и поэтому

$$\pi(z)=\bigcup_{t\in M_\infty(z)\cap\Gamma_1}\pi(t). \qquad /9/$$

Пусть $x,y\in\Gamma_i$, $i<N$ и $(\varphi(x),\varphi(y))\neq 1$. Тогда $\pi(x)\cap\pi(y)\neq\phi$ и $(M_\infty(x)\cap\Gamma_1)\cap$ $\cap(M_\infty(y)\cap\Gamma_1)\neq\phi$ т.е. $M_\infty(x)\cap M_\infty(y)\neq\phi$. Следовательно, для некоторых r и s $M_r(x)\cap M_s(y)$. Пусть r и s таковы, что $r+s$ минимальна. Если при этом одно из чисел, например s , равно 0 , то $x\in M_s(y)\subseteq L_{i-s}$ и, значит, $x\in L_{i-s}\cap\Gamma_i\neq\phi$. Итак, $M_{r-1}(x)$ и $M_{s-1}(y)$ существуют. Пусть $t\in M_r(x)\cap M_s(y)$. Тогда существуют $x_0\in M_{r-1}(x)$ и $y_0\in M_{s-1}(y)$, что $(t,x_0)\in G$ и $(t,y_0)\in G$. Поскольку $s+r$ минимальна, $M_{r-1}(x)\cap$ $\cap M_{s-1}(y)=\phi$; и $x_0\neq y_0$. При этом, если $t\in\Gamma_k$, и $x_0,y_0\in G_k$, то $\rho(t)\geq 2$ в G_k , что противоречит тому, что $t\in\Gamma_k$. Случай $(x,y)\in\Gamma_i$ доказан.

Пусть теперь $x\in\Gamma_i, y\in\Gamma_j$ и $i<j$. Предположим $i<N$. Аналогично предыдущему показывается, что для $z\in M_s(y)\cap M_r(x)$ существуют вершины $t_1\in M_{r-1}(x)$ и $t_2\in M_{s-1}(y)$, где $s>0$, $r>0$ и r и s таковы, что $r+s$ минимальная сумма, удовлетворяющая условию $z\in M_r(x)\cap M_s(y)$. Пусть $z\in\Gamma_e$, тогда t_1 и t_2 - вершины графа G_{e+1} , что противоречит пункту б/ леммы 2. Следовательно, либо $s=0$, либо $r=0$. Если $s=0$, то $y\in M_r(x)\subseteq L_i$ и, значит, $y\in L_i\cap\Gamma_j$.

Но по предположению $i<j$, значит, мы получим противоречие с равенством /4/.

Пусть $r=0$, т. е. $x\in M_s(y)$. Очевидно, что тогда $s>0$. Из определения $M_s(y)$ и функции φ. следует, что существует последовательность вершин $x_r\in M_{s-r+1}(y)$, $r=1,2,\dots,s+1$ таких, что $x_1=x$, x_r и x_{r+1} смежны и $\varphi(x_{r+1})$ делится на $\varphi(x_r)$. Следовательно, $\varphi(x)$

делит $\varphi(y)$.

Пусть $j = N$. Если $|\Gamma_N| = 1$, то доказательство в этом случае полностью совпадает с предыдущим. Пусть $|\Gamma_N| = 2$: Тогда либо $\varphi(y) = \varphi_N(y)$, либо $\varphi(y) = \varphi_N(y)\cdot\varphi_N(t)$, где $t \neq y$ и $t \in \Gamma_N$. В первом случае доказательство совпадает дословно с предыдущим. Рассмотрим второй случай. Если $(\varphi(x), \varphi(y)) \neq 1$, то, заменив в рассуждениях предыдущего абзаца функцию φ на φ_N , найдем, что и в этом случае свойство верно. Если $(\varphi(x), \varphi(y)) = 1$, то, согласно предыдущим рассуждениям, $\varphi_N(t)$ делится на $\varphi_N(x)$, и существует путь $\mu[x,t] = [x = x_1, \dots, x_{n_1} = t]$ такой, что $\varphi_N(x_s)$ делит $\varphi_N(x_{s+1})$ и x_s и x_{s+1} смежны. Отсюда легко доказывается справедливость свойства 2 для последнего случая. Точно так же доказывается

Свойство 3. Если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $x = y$.

§ 3. Алгоритм нахождения элементарного пути

Пусть $x \in G$, $y \in G$ и $x \neq y$. Построим элементарный путь $\mu[x, y]$ следующим способом. Введем оператор Γ_y , который любой вершине $x \neq y$ ставит в соответствие третью вершину $\Gamma_y(x)$ графа G .

$\Gamma_y(x) = t$, если $t \in U(x)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют равенству:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \max\limits_{u \in U(x)} \varphi(u) & \text{, если } \varphi(x) \text{ не делится на } \varphi(y), \\ \min\limits_{u \in U(x),\, \varphi(u)/\varphi(y)} \varphi(u) & \text{, если } \varphi(x) \text{ делится на } \varphi(y) . \end{cases}$$

Теорема. Пусть x и y - две различные вершины графа G . Тогда последовательность

$$x = x_1, \quad x_2 = \Gamma_y(x_1), \dots, x_i = \Gamma_y(x_{i-1}), \dots \qquad /10/$$

является элементарным путем, соединяющим вершины x и y .

Доказательство. Очевидно, если $x_{i-1} \neq y$, вершина определена однозначно. Это следует из определения функции φ и оператора Γ и свойств φ .

Покажем, что в последовательности /10/ все вершины различны, то есть что /10/ - элементарный путь. Пусть это не так. Тогда существует i такое, что либо $x_i = x_{i-1}$, либо $x_{i-1} = x_{i+1}$. Первый случай невозможен, так как $x_i \in U(x_{i-1})$. Пусть для некоторого i $x_{i-1} = x_{i+1}$. Пусть $\varphi(x_{i-1}) < \varphi(x_i)$. Если $\varphi(x_i)$ не делится на $\varphi(y)$, то $\varphi(x_{i-1})$ тоже не делится на $\varphi(y)$. Тогда $\varphi(x_{i-1}) < \varphi(x_i) < \varphi(x_{i+1})$ по определению x_i . Это противоречит равенству $x_{i-1} = x_{i+1}$. Если $\varphi(x_i)$ делится на $\varphi(y)$, то $\varphi(x_{i+1})$ тоже делится на $\varphi(y)$. Но $x_{i+1} = x_{i-1}$, значит, $\varphi(x_{i-1})$ тоже делится на $\varphi(y)$. Но тогда $\varphi(x_i)$ делится на $\varphi(x_{i-1})$ и делит $\varphi(y)$ т.е. $\varphi(x_{i-1}) < \varphi(x_i)$, что противоречит неравенству $\varphi(x_{i-1}) < \varphi(x_i)$.

Случай $\varphi(x_{i-1}) > \varphi(x_i)$ рассматривается аналогично. Итак, если $x_{i-1} \neq y$, то оператор $\Gamma_y(x_{i-1}) = x_i$, причем $x_i \neq x_j$ для всех $j < i$, поскольку в случае, когда $x_i \neq y$ $\Gamma_y(x_i)$ существует. Из конечности

следует, что найдется такое натуральное k, что $x_k = y$. Теорема доказана.

Поступила в редакцию 10.I.1969 г.

Литература

1. Оре О. Теория графов, Изд "Наука", М., 1968.