Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.518.90.

КОНФЛИКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

И.А.Красс

В данной статье ставится и исследуется одна игровая задача для двух линейных экономических моделей общего вида [1]. Определяются условия, при выполнении которых игра может быть продолжена до фиксированного момента t, а также находятся некоторые критерии, определяющие непроигрышные стратегии моделей.

§ 1. Постановка задачи

1°. Модели, используемые в данной статье, будут задаваться выпуклым замкнутым конусом $Z\subset R^+_{2n}$ - конусом технологии [1]. Элемент $z\in Z$, который называется процессом, представим в виде пары $z=(x,y)$, где $x,y\in R^+_n$ /R^+_n здесь обозначает неотрицательный ортант n - мерного евклидова пространства/. Векторы $x,y\in R^+_n$, составляющие процесс z, называются состояниями модели, причем сам процесс $z=(x,y)\in Z$ означает, что из состояния x с помощью процесса z можно достигнуть состояния y за один такт.

Соответственно, как и в [2], вводится технологическое отображение-оператор $a(\xi)$, действующий из Ξ_n в Ξ_n, где $\Xi_n=\{\xi\}$ есть совокупность замкнутых выпуклых множеств. Сам оператор определяется формулой

$$a(\xi)=\bigcup_{x\in\xi}a(x), \qquad /1/$$

где $a(x)=\{y/(x,y)\in Z\}\subset R^+_n,\ \xi\in\Xi_n$

Здесь и ниже принято обозначение: если Φ оператор из Ξ_n в Ξ_n, то $\Phi(x)=\Phi(\{x\})$.

Множество $a(\xi)\in\Xi_n$ дает все возможные состояния $y\in a(\xi)$, достижимые из состояний $x\in a(\xi)$. С помощью отображения a определяется [2] понятие $(x(0),T)$ -траектории как последовательности векторов $\{x(t)\}_{t=0}^{t=T}$ таких, что

$$x(t+1)\in a[x(t)], \qquad /2/$$

где $t=0,1,\dots,T-1$.

В игре $\mathcal{J}$, которая исследуется в данной работе, участвуют две модели вышеописанного типа, причем все параметры первой модели будут снабжаться индексом 1, а второй - индексом 2. Для задания игры $\mathcal{J}$, помимо задания технологических конусов Z_i, надо задать две неотрицательные квадратные матрицы S_i /матрицы взаимодействия/ и два вектора $\varepsilon_i\in R^+_n\ (i=1,2)$ /векторы минимального благосостояния/.

Мы будем исследовать игру, в которой одна из моделей /первая/

начинает игру раньше второй. Математически этот факт будет соответствовать тому, что индекс t при построении траекторий для первой модели будет пробегать целые значения $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, а для второй полуцелые значения $(t = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots)$. Соответственно начальное состояние первой модели задается в момент $t = 0$ $(x_1(0))$, а второй – в момент $t = -\frac{1}{2}$ $(x_2(-\frac{1}{2}))$.

Игра $\mathcal{J}$ состоит в последовательном построении траектории двух моделей, которое мы опишем на каждый полутакт.

1. Задаются начальные состояния $x_1(0)$, $x_2(-\frac{1}{2})$ обеих моделей, удовлетворяющие соотношениям:

$$x_1(0) \geq \varepsilon_1,\ x_2(-\tfrac{1}{2}) \geq \varepsilon_2,\ a_1[x_1(0)] \cap R_n^+(\varepsilon_1) \neq \phi, \qquad /3/$$

где $R_n^+(\varepsilon_1) \subset R_n^+$ есть множество векторов $x \in R_n^+$, удовлетворяющих неравенству $x \geq \varepsilon_1$. Другими словами, начальные запасы обеих моделей не меньше минимальных, а из начального состояния первой модели можно начать траекторию. Такую пару векторов $(x_1(0), x_2(-\frac{1}{2})) \in R_{2n}^+$ мы будем называть начальным состоянием игры $\mathcal{J}$.

2. Определяются промежуточные состояния моделей по формулам:

$$x_1(\tfrac{1}{2}) + f_2(0) \in a_1[x_1(0)],\ x_1(\tfrac{1}{2}) \geq \varepsilon_1;\ f_1(0) \in R_n^+; \qquad /4/$$

$$x_2(0) = x_2(-\tfrac{1}{2}) - S_1 f_1(0).$$

Здесь $f_1(0)$ есть нагрузка, снимаемая первой моделью /ее стратегический ход/ для взаимодействия со второй. Если хотя бы одно из соотношений

$$x_2(0) \geq \varepsilon_2,\ a_2[x_2(0)] \cap R_n^+(\varepsilon_2) \neq \phi \qquad /5/$$

нарушается, то мы будем говорить, что первая модель выигрывает игру на первом шаге, и в этом случае игра оканчивается.

3. Определяются окончательные состояния обеих моделей по формулам:

$$x_2(\tfrac{1}{2}) + f_2(0) \in a_2[x_2(0)];\ x_2(\tfrac{1}{2}) \geq \varepsilon_2;\ f_2(0) \in R_n^+;$$

$$x_1(1) = x_1(\tfrac{1}{2}) - S_2 f_2(0).$$

Как и выше, здесь $f_2(0)$ – стратегический ход второй модели. Аналогично предыдущему определяется выигрыш модели 2 на первом шаге.

По индукции игра продолжается до шага $T = 1, 2, \ldots$, и в этом случае, согласно вышеизложенным правилам, определяются две последовательности векторов $\{f_1(t)\}_{t=0}^{t=T-1}$ и $\{f_2(t)\}_{t=0}^{t=T-1}$. Эти последовательности называются стратегиями первой и второй моделей соответственно.

Пусть множество пар $V_t = \{(x_1, x_2)\} \subset R_{2n}^+$ таково, что если игра $\mathcal{J}$ имеет в качестве начального состояния пару $(x_1, x_2) \in V_t$, то для любой стратегии второй модели существует стратегия первой модели, приводящая к выигрышу на шаге $\tau \leq t$. Аналогично $V_{t+\frac{1}{2}}$ есть множество начальных состояний игры $\mathcal{J}$, из которых вторая модель может выиграть у первой на шаге $\tau \leq t$ при любой стратегии первой модели.

Возникает задача определения множеств V_t, $V_{t+\frac{1}{2}}$ и описания стратегий, приводящих к выигрышу одной из моделей. Эта задача и иссле-

дуется в данной статье.

§ 2. Определение множеств P_t , $P_{t+\frac{1}{2}}$

Хотя в работе [3] и были определены множества V_1 и $V_{1+\frac{1}{2}}$ при некоторых ограничениях, накладываемых на модели, но изучение этих множеств для больших индексов весьма затруднительно из-за того, что они не выпуклые и не замкнутые. Гораздо проще изучаются множества, в некотором смысле дополнительные ко множествам $V_{t+\delta}$ $(\delta = 0, \frac{1}{2})$.

Рассмотрим множество $P_t \subset R^+_{2n}$, удовлетворяющие условиям:

$$P_t \cap V_\tau = \Phi;\ P_t \cap V_{\tau-\frac{1}{2}} = \Phi \quad \text{для } \tau = 1,2,\ldots,t. \qquad /6/$$

Если игра начата из состояния $(x_1, x_2) \in P_t$, то ни одна из моделей не может, вообще говоря, обеспечить себе выигрыша на шаге $\tau < t-1$, а первая модель не может этого сделать и не шаге t . /Здесь и ниже $V_{\frac{1}{2}} = \Phi$ /.

Мы будем говорить , что игра начатая из состояния $(x_1, x_2) \in P_t$ заведомо может быть продолжена на $(t - \frac{1}{2})$ шагов $(t = 1,2,\ldots)$.

Аналогично вводится множество $P_{t+\frac{1}{2}} \subset R^+_{2n}$, которое определяется соотношениями:

$$P_{t+\frac{1}{2}} \cap V_\tau = \Phi,\ P_{t+\frac{1}{2}} \cap V_{\tau+\frac{1}{2}} = \Phi\ , \quad \text{для } \tau = 1,2,\ldots,t.$$

$P_{t+\frac{1}{2}}$ является множеством начальных состояний, из которых игра $\mathcal{J}$ может быть заведомо продолжена до шага t $(t = 1,2,\ldots)$.

Для определения множеств $P_{t+\delta}$ $(\delta = 0, \frac{1}{2})$ введем в рассмотрение некоторые операторы.

Пусть $\xi \subset R^+_{2n}$. Рассмотрим множество $\mathcal{O}\!\iota_1(\xi) \subset R^+_{2n}$, определяемое соотношением

$$\mathcal{O}\!\iota_1(\xi) = \{(y_1, y_2) / \exists((x_1, x_2) \in \xi\ , f_1 \geq 0),\ y_1 + f_1 \in a_1(x_1); \qquad /7/$$
$$y_1 \geq \varepsilon_1,\ y_2 = x_2 - S_1 f_1 \geq \varepsilon_2;\ a_2(y_2) \cap R^+_n(\varepsilon_2) \neq \Phi\}.$$

Множество $\mathcal{O}\!\iota_1(\xi)$ содержит все возможные состояния игры $\mathcal{J}$, которые можно получить, начиная из состояний $(x_1, x_2) \in \xi$ ходом первой модели. **Заметим,**что если $(y_1, y_2) \in \mathcal{O}\!\iota_1(\xi)$, то из состояния (y_1, y_2) можно продолжить игру на один полутакт ходом второй модели.

Л е м м а I. Если $\xi \in \Xi_{2n}$, то также и $\mathcal{O}\!\iota_1(\xi) \in \Xi_{2n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $\eta \subset R^+_{5n}$. Элементы множества η мы будем представлять в виде $(y_1, y_2, x_1, x_2, f_1)$, где $y_1, y_2, x_1, x_2, f_1 \in R^+_n$, и определяются соотношениями:

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \in \xi; \\ y_1 + f_1 \in a_1([\xi]_I); \\ y_2 = x_2 - S_1 f_1 \geq \varepsilon_2; \\ y_1 \geq \varepsilon_1\ , f_1 \geq 0; \\ a_2(y_2) \cap R^+_n(\varepsilon_2) \neq \Phi. \end{cases} \qquad /8/$$

Здесь $[\xi]_I$ есть проекции ξ на первые n осей. Так как $[\xi]_I \in \Xi_n$, а из [2] следует, что $a_1([\xi]_I) \in \Xi_n$, то непосредственной проверкой

убеждаемся, что $\eta \in \Xi_{5n}$. Но проекция множества η на первые $(2n)$ координатных осей, которая входит в Ξ_{2n}, и есть $\mathfrak{A}_1(\xi)$.

Действительно, пусть $(y_1, y_2, x_1, x_2, f_1) \in \eta$. Из /7/ и /8/ получаем, что $(y_1, y_2) \in \mathfrak{A}_1(\xi)$. В обратную сторону включение $\mathfrak{A}_1(\xi) \in \eta$ проверяем совершенно аналогично. Этим лемма доказана.

Лемма I и соотношение /7/ позволяет ввести оператор первого полутакта $\mathfrak{A}_1$, действующий из Ξ_{2n} в Ξ_{2n}. Аналогично /7/ вводится оператор $\mathfrak{A}_2$ второго полутакта, в случае которого $\mathfrak{A}_2(\xi)$ является множеством состояний, получаемых из $\xi \in \Xi_n$ за один полутакт ходом второй модели, причем эти состояния таковы, что из них игра может быть продолжена по крайней мере еще на один полутакт.

Так же как и в лемме I с учетом того, что из $\eta \in \Xi_n$ следует $a^{-1}(\eta) \in \Xi_n$, можно показать, что $\mathfrak{A}_1^{-1}(\xi) \in \Xi_{2n}$, если $\xi \in \Xi_{2n}$. Это позволяет ввести операторы $\mathfrak{A}_1^{-1}$ и $\mathfrak{A}_2^{-1}$, действующие из Ξ_{2n} в Ξ_{2n}. Теперь естественно рассмотреть оператор $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2$ /оператор такта/, который дает возможность ввести понятие $((x_1(0), x_2(-\frac{1}{2})), T)$ - траектории в игре $\mathcal{J}$, как последовательности пар $\{(x_1(t), x_2(t-\frac{1}{2}))\}_{t=0}^{t=T}$ таких, что

$$(x_1(t+1), x_2(t+\tfrac{1}{2})) \in \mathfrak{A}((x_1(t), x_2(t-\tfrac{1}{2})), \quad t=0,\ldots,T-1.$$

Мы видим, что введением оператора $\mathfrak{A}$ исследование данной игры, вообще говоря, сводится к исследованию модели в $2n$ - мерном пространстве, технологическое отображение которой есть $\mathfrak{A}$.

Однако, введенные операторы еще не дают возможности решить вопрос об определении множеств P_{t+8}, ибо если последовательность $\{x_1(t), x_2(t-1)\}_{t=0}^{t=T}$ является $((x_1(0), x_2(-\frac{1}{2})), T)$ - траекторией, то это не означает, что $(x_1(0), x_2(-\frac{1}{2})) \in P_{t+\delta}$. Действительно, стратегии при построении такой траектории могут быть достаточно "неразумными" с игровой точки зрения /например, $f_1(t) = f_2(t) = 0, t = 0, 1, \ldots, T$ /. Поэтому мы введем еще операторы, "уничтожающие" такие "неразумные" траектории.

Пусть $\xi \in \Xi_{2n}$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{B}_1(\xi) = \{(x_1, x_2) / \forall (f_1 \in (a_1(x_1) \ominus \varepsilon_1) \cap R_n^+), \qquad /9/$$

$$x_2 - S_1 f_1 \geqslant \varepsilon_2,\ a_2(x_2 - S_1 f_1) \cap R_n^+(\varepsilon_2) \neq \emptyset,\ (x_1, x_2) \in \xi\}.$$

$\mathcal{B}_1(\xi)$ есть множество состояний (x_1, x_2) таких, что, начав из них, первая модель не может выиграть игру за один шаг. /Здесь $a_1(x_1) \ominus \varepsilon = \{y / y = y_1 - \varepsilon_1, y_1 \in a_1(x_1)\}$ /. Из /7/ вытекает, что $\mathcal{B}_1(\xi)$ есть множество состояний (x_1, x_2), начиная из которых, первая модель не может выиграть игру за один шаг.

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{B}_1(\xi) \in \Xi_{2n}$, и это позволяет ввести оператор $\mathcal{B}_1$, действующий из Ξ_{2n} в Ξ_{2n}.

Пусть $D(x_1) = (a_1(x_1) \ominus \varepsilon_1) \cap R_n^+$, то есть $D(x_1)$ есть множество допустимых нагрузок для первой модели. Тогда из /7/ имеем, что $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_1(\xi)$, если выполняются соотношения:

$$\begin{cases} (x_1,x_2)\in\xi\ ; \\ \min\limits_{f_1\in D(x_1)} [x_2-S_1f_1]_i \geq [\varepsilon_2]_i\ ; \\ \min\limits_{f_1\in D(x_1)} \max[a_2(x_2-S_1f_1)]_i \geq [\varepsilon_2]_i\ ; \end{cases} \qquad /10/$$

где $[x]_i$ есть проекция вектора x на i -ю ось, а $\max[a_2(x)]_i = \max\limits_{y\in a_2(x)}[y]_i$.

Как будет показано далее, система /10/ для простейших технологических отображений сводится к системе линейных неравенств.

Аналогично вводится оператор $\mathcal{L}_2$, выделяющий те состояния, из которых вторая модель не может выиграть за один шаг.

В дальнейшем будем предполагать, что технологические отображения моделей удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_i \in a_i(\varepsilon_i) \qquad i=1,2. \qquad /11/$$

Если оператор a_2 монотонный, то есть из $x_2 \geq x_1$ следует $a_2(x_2)\supset a_1(x_1)$ то с учетом /11/ мы видим, что в /10/ последнее неравенство становится следствием первого. Аналогично в системе /8/ последнее соотношение есть следствие неравенства $y_2 \geq \varepsilon_2$ и включения /11/.

Введенные операторы позволяют определить множества $P_{t+\delta}$ и тем самым доказать теорему:

Т е о р е м а I. Множества $P_{t+\delta}\in\Xi_{2n}$, а в случае $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ множества $P_{t+\delta}$ суть конусы $(\delta=0,\frac{1}{2})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения оператора $\mathcal{L}_1$, /9/ следует

$$P_1=\mathcal{L}_1(R_n^+)$$

Пусть $P_1=\xi(0)$, причем $\xi(0)\in\Xi_{2n}$. Рассмотрим множество

$$\xi(\tfrac{1}{2})=\mathcal{L}_2[\mathfrak{A}_1(\xi(0))]. \qquad /12/$$

Если $\xi(\frac{1}{2})\neq\emptyset$, то это значит, что среди состояний $(x_1,x_2)\in\xi(0)$ найдутся состояния, из которых игра заведомо может быть продолжена на один шаг. Эти состояния и образуют множество $P_{1+\frac{1}{2}}$, которое вычисляется по формуле

$$P_{1+\frac{1}{2}}=\mathfrak{A}_1^{-1}(\xi(\tfrac{1}{2})\cap\xi(0)).$$

По индукции определяются множества $\xi(k)=\mathcal{L}_1[\mathfrak{A}_2(\xi(k-\frac{1}{2}))]$ и $\xi(k+\frac{1}{2})=\mathcal{L}_2[\mathfrak{A}_1(\xi(k))]$, а с их помощью искомые множества P_k, $P_{k+\frac{1}{2}}$:

$$P_k=\mathfrak{A}_1^{-1}[\mathfrak{A}_2^{-1}[\ldots[\mathfrak{A}_2^{-1}[\xi(k-1)]\cap\xi(k-\tfrac{3}{2})]\ldots]\cap\xi(\tfrac{1}{2})]\cap\xi(0);$$

$$P_{k+\frac{1}{2}}=\mathfrak{A}_1^{-1}[\mathfrak{A}_2^{-1}[\ldots[\mathfrak{A}_1^{-1}[\xi(k-\tfrac{1}{2})]\cap\xi(k-1)]\ldots]\cap\xi(\tfrac{1}{2})]\cap\xi(0).$$

Причем, поскольку операторы $\mathfrak{A}_i^{-1}$ действуют из Ξ_{2n} в Ξ_{2n}, множества $P_{k+\delta}\in\Xi_{2n}$ $(k=1,2,\ldots;\ \delta=0,\frac{1}{2})$.

Если $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, то из системы /8/,/10/ следует, что любой конус $K\in\Xi_{2n}$ операторы $\mathfrak{A}_i$, $\mathcal{L}_i$, $\mathfrak{A}_i^{-1}$ преобразуют опять в конус $K^1\in\Xi_{2n}$ что и доказывает теорему $(i=1,2)$.

З а м е ч а н и е. Из вышеизложенного следует, чтобы определить, входит ли состояние (x_1,x_2) во множество P_k или $P_{k+\frac{1}{2}}$, надо решить на совместность k, соответственно $(k+1)$, систему /8/, /10/. Как будет показано ниже, эти системы в простейших случаях сводятся к сис-

темам линейных неравенств. Из вида системы /8/ мы заключаем, что с ростом k размерность пространства, в котором решается система, увеличивается, ибо определяются стратегии $\{f_1(i)\}_{i=0}^{i=k}$ и $\{f_2(i)\}_{i=0}^{i=k}$

§ 3. О возможных стратегиях в игре $\mathcal{J}$

В этом параграфе мы исследуем игру для моделей леонтьевского типа /2/. Причем будем различать два вида таких моделей. Модель первого вида $(\mathfrak{M}_L)$ имеет технологический конус:

$$Z_L = \{(x,y)/(x,y)\in R^+_{2n},\ Ax-y\geq 0\}, \qquad /13/$$

где A - матрица $(n\times n)$ /технологическая матрица/. Игру $\mathcal{J}$ для моделей с технологическим конусом /13/ обозначим $\mathcal{J}_L$. Вообще говоря, произвольное технологическое отображение не обладает свойством монотонности /то есть из $x_2 > x_1$ не следует $a(x_2)\supset a(x_1)$ /. Это как, правило, происходит из-за того, что для перехода к следующему состоянию полностью используются продукты, имеющиеся к данному моменту в системе, а это, в свою очередь, может вызвать нарушения необходимой комплектности. В частности, модель с конусом Z_L, у которой в матрице A имеются и отрицательные элементы, не обладает свойством монотонности. Поэтому естественно рассмотреть модель $\tilde{\mathfrak{M}}_L$, которая может не полностью использовать имеющиеся в наличии продукты, а именно конус который имеет вид:

$$\tilde{Z}_L = \{(x,y)/(x,y)\in R^+_{2n}\ \exists(\Delta\in R^+_n)\ A(x-\Delta)-y\geq 0\}. \qquad /14/$$

Очевидно, модель с конусом $\tilde{Z}_L$ уже обладает монотонностью /такое же преобразование можно проделать над моделью с произвольным конусом Z /. Игру для моделей с технологическим конусом /14/ мы обозначим $\tilde{\mathcal{J}}_L$ и вообще все операторы для игры с такими моделями будем отмечать волнистой линией сверху.

В случае модели $\mathfrak{M}_L$ система /8/, служащая для определения оператора $\mathfrak{A}_1$, принимает вид:

$$\begin{cases} (x_1,x_2)\in\xi; \\ y_1+f_1\leq A_1x_1; \\ y_2=x_2-S_1f_1\geq\varepsilon_2; \\ y_1\geq\varepsilon_1;\ f_1\geq 0; \\ A_2y_2\geq\varepsilon_2. \end{cases} \qquad /15/$$

Если множество $\xi\in\Xi_{2n}$ многогранное, то есть описывается системой линейных неравенств, то мы видим, что для определения наличия включения $(y_1,y_2)\in\mathfrak{A}_1(\xi)$ надо определить совместность системы некоторого числа линейных неравенств.

В случае модели $\tilde{\mathfrak{M}}_L$, ввиду монотонности операторов $a_i\ (i=1,2)$, как уже отмечалось выше, в системе /15/ исчезает последнее неравенство. /Мы считаем, что имеют место соотношения /11/ /. Однако неравенство $y_1+f_1\leq A_1x_1$ принимает вид $y_1+f_1\leq A_1(x_1-\Delta)$, где $\Delta\geq 0$.

Что касается операторов $\mathcal{L}_i$ $(i=1,2)$, то на основе /9/, /10/ легко доказать лемму:

Л е м м а 2. Имеют место равенства:

$$\mathcal{L}_1(\xi)=\{(x_1,x_2)/(x_1,x_2)\in\xi,\ x_2\geq S_1(A_1x_1-\varepsilon_1)+\varepsilon_2,\quad /16/$$
$$A_2x_2\geq\langle A_2\rangle S_1(A_1x_1-\varepsilon_1)+\varepsilon_2\};$$
$$\mathcal{L}_1(\xi)=\{(x_1,x_2)/(x_1,x_2)\in\xi;\ x_2\geq\langle S_1A_1\rangle x_1-S_1\varepsilon_1+\varepsilon_2\},\quad /17/$$

где $\langle B\rangle$ матрица с элементами $\langle b_{ij}\rangle=\begin{cases} b_{ij}, & \text{если } b_{ij}\geq 0,\\ 0, & \text{если } b_{ij}\leq 0,\end{cases}$

/ b_{ij} - элементы матрицы B /.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из /9/ при фиксированном $(x_1,x_2)\in\xi$ имеем

$$0<f_1\leq A_1x_1-\varepsilon_1. \quad /18/$$

Неравенство /18/ и определяет условие допустимости нагрузки f_1, то есть условие того, что $f_1\in D(x_1)$. Ввиду неотрицательности матрицы S_1 неравенство /18/ дает

$$0\leq S_1f_1\leq S_1(A_1x_1-\varepsilon_1),$$

что вместе со вторым неравенством в /10/ приводит к неравенству

$$x_2\geq S_1(A_1x_1-\varepsilon_1)+\varepsilon_2.$$

С другой стороны, из /9/ имеем для любой $f_1\in D(x_1)$

$$A_2x_2\geq A_2S_1f_1+\varepsilon_2$$

или, проектируя на i -ю ось, получаем

$$[A_2x_2]_i=\max_{f_1\in D(x_1)}[A_2S_1f_1]_i+[\varepsilon_2]_i=$$
$$=\max_{0\leq\psi_1\leq S_1(A_1x_1-\varepsilon_1)}(a^2_{i1}\psi_1+\ldots+a^2_{in}\psi_n)+[\varepsilon_2]_i=a^2_{i1}\bar\psi_1+\ldots+a^2_{in}\bar\psi_n+[\varepsilon_2]_i,$$

где a^2_{ij} - элемент матрицы A_2, ψ_i - компонента вектора $\psi=S_1f_1$, $\bar\psi$ - вектор, на котором реализуется искомый максимум.

Ввиду линейности максимизируемой формы, имеем

$$\bar\psi_j=\begin{cases}[S_1(A_1x_1-\varepsilon_1)]_j, & \text{если } a_{ij}>0\\ 0, & \text{если } a_{ij}<0\end{cases}$$

что с помощью матрицы $\langle A_2\rangle$ можно переписать так:

$$\max_{f_1\in D(x_1)}[A_2S_1f_1]_i=[\langle A_2\rangle S_1(A_1x_1-\varepsilon_1)]_i.$$

Это доказывает формулу /16/.

Для игры $\mathcal{J}_L$ второе соотношение в /9/ /или третье неравенство в /10/ / есть следствие предыдущего ввиду монотонности технологического отображения. Множество допустимых нагрузок имеет вид

$$D(x_1)=\{f_1/0<f_1=A_1(x_1-\Delta_1)+\varepsilon_1,\ \Delta_1\geq 0\}. \quad /19/$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем /17/.

З а м е ч а н и е. Соотношение /17/ можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_1(\xi)=\{(x_1,x_2)/(x_1,x_2)\in\xi;\ x_2\geq S_1(A_1(x_1-\Delta_1)-\varepsilon_1)+\varepsilon_2 \quad /20/$$
$$A_1(x_1-\Delta_1)\geq\varepsilon_1;\ \Delta_1\geq 0\}.$$

Причем неравенство $A_1(x_1-\Delta_1)\geq\varepsilon_1$, входящее в формулу /20/, вообще

говоря, есть следствие аналога системы /15/ для оператора $\mathfrak{A}_1$, поэтому при определении множеств $P_{t+\delta}$ $(\delta = 0, \frac{1}{2})$ для игры $\tilde{\mathfrak{I}}_L$ количество неравенств в соответствующей линейной системе уменьшается.

Для характеристики стратегий приходися рассматривать множество $P_{1+\frac{1}{2}}$. Как следует из теоремы I, множество $P_{1+\frac{1}{2}}$ определяется с помощью множества $\xi(\frac{1}{2})$. Из /12/, с учетом леммы 2, имеем для игры $\mathfrak{I}_L$

$$\xi(\tfrac{1}{2}) = \{(y_1, y_2) / y_1 \geq S_2(A_2 y_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1;\ A_1 y_2 \geq \langle A_1 \rangle S_2(A_2 y_2 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1\},$$

где $y_1 = A_1 x_1 - f_1$; $y_2 = x_2 - S_1 f_1$; $0 \leq f_1 \leq A_1 x_1 - \varepsilon_1$; $(x_1, x_2) \in \xi(0)$.

Окончательно получаем: для того чтобы пара $(x_1, x_2) \in P_{1+\frac{1}{2}}$, необходимо и достаточно выполнение условия $(x_1, x_2) \in \xi(0)$ и существование такого $f_1 \in D(x_1)$ /то есть $0 \leq f_1 \leq A_1 x_1 - \varepsilon_1$/, что

$$S_2(A_2 x_2 - \varepsilon_2) - A_1 x_1 + \varepsilon_1 \leq (S_2 A_2 S_1 - E) f_1$$
$$A_1(A_1(x_1 - f_1) - \varepsilon_1 \geq \langle A_1 \rangle S_2 [A_2 x_2 - A_2 S_1 f_1 - \varepsilon_2]. \qquad /21/$$

Аналогичная система для игры $\tilde{\mathfrak{I}}_L$ имеет вид /для $\mathfrak{L}_2$ мы употребляем аналог формулы /20/, а не /17/ /:

$$S_2(A_2(x_2 - \Delta_2) - \varepsilon_2) - A_1(x_1 - \Delta_1) + \varepsilon_1 \leq (S_2 A_2 S_1 - E) f_1, \qquad /22/$$

причем, ввиду того, что $(x_1 - \Delta_1, x_2 - \Delta_2) \in \xi(0)$, выполняется

$$A_2(x_2 - \Delta_2) \geq A_2 S_1 f_1 + \varepsilon_2 \qquad /23/$$

для всех $f_1 \in D(x_1 - \Delta_1)$ /здесь $\Delta_1, \Delta_2 \in R_n^+$ /. В этом случае $y_1 = A_1(x_1 - \Delta_1) - f_1$, $y_2 = x_2 - \Delta_2 - S_1 f_1$, где (y_1, y_2) есть новое состояние игры.

При характеристике стратегий большую роль играет матрица $B_1 = S_2 A_2 S_1 - E$, а именно имеет место.

Т о е р е м а 2. Пусть $b_{ii}^1 \geq 0$, тогда $[y_1]_i = [\varepsilon_1]_i$. Здесь b_{ij}^1 $(i, j = 1, \ldots, n)$ – элементы матрицы B_1, $y_1 = A_1 x_1 - f$ в случае игры $\mathfrak{I}_L$, и $y_1 = A_1(x_1 - \Delta_1) - f_1$ в случае $\tilde{\mathfrak{I}}_L$.

Теорема 2 утверждает, что при условии $b_{ii}^1 \geq 0$ первая модель /не победившая на первом шаге/ должна максимально использовать i-ю компоненту для взаимодействия со второй моделью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы проведем доказательство для игры $\mathfrak{I}_L$, ибо для игры $\tilde{\mathfrak{I}}_L$ доказательство аналогично.

Множество нагрузок, допустимых в первой модели /см. /18/ /, можно описать в виде

$$D(x_1) = \{f_1 / f_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_j e_j;\ 0 \leq \alpha_j \leq 1\}, \qquad /24/$$

где e_j $(j = 1, \ldots, n)$ орт j-ой оси.

Пусть для некоторого $f_1^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_1^0 [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_i e_i \in D(x_1)$ выполняются неравенства /21/, беря проекцию на i-ю ось первого из них, имеем

$$[S_2(A_2 x_2 - \varepsilon_2)]_i - [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_i \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^0 [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_j b_{ji}^1 \leq$$
$$\leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j^0 [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_j b_{ji}^1 + [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_i b_{ii}^1 = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j^0 [A_1 x_1 -$$
$$- \varepsilon_1]_j b_{ji}^1 + [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_i [S_2 A_2 S_1 e_i]_i - [A_1 x_1 - \varepsilon_1]_i.$$

Так как при $i \neq j$ выполняется равенство $b_{ji} = [S_2 A_2 S_1 e_j]_i$, от окончательно имеем:

$$[S_2(A_2 x_2 - \mathcal{E}_2)]_i \leqslant [S_2 A_2 S_1 \bar{f}_1^o]_i, \qquad /25/$$

где $\bar{f}_1^o = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j^o [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_j e_j + [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_i e_i$.

С другой стороны, так как $(x_1, x_2) \in \xi(0)$, а $\bar{f}_1^o \in D(x_1)$,

$$A_2 x_2 - \mathcal{E}_2 \geqslant \langle A_2 \rangle S_1 (A_1 x_1 - \mathcal{E}_1) \geqslant A_2 S_1 \bar{f}_1^o. \qquad /26/$$

Умножая это неравенство на неотрицательную матрицу S_2 и беря проекцию на i-ю ось, имеем:

$$[S_2(A_2 x_2 - \mathcal{E}_2)]_i \leqslant [S_2 A_2 S_1 \bar{f}_1^o]_i.$$

что всовокупности с /25/ приводит к равенству

$$[S_2(A_2 x_2 - \mathcal{E}_2)]_i = [S_2 A_2 S_1 \bar{f}_1^o]_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j^o [S_2 A_2 S_1 e_j]_i [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_j + $$
$$+ [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_i [S_2 A_2 S_1 e_i]_i. \qquad /27/$$

Так как из $b_{ii}^1 \geqslant 0$ следует $[S_2 A_2 S_1 e_i]_i > 0$, а для любого $f_1^o \in D(x_1)$ имеет место неравенство

$$[S_2(A_2 x_2 - \mathcal{E}_2)]_i \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j^o [S_2 A_2 S_1 e_j]_i [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_j + \alpha_i^o [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_i [S_2 A_2 S_1 e_i]_i,$$

то равенство /27/ достигается только при $\alpha_i^o = 1$ или $[A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_i = [\mathcal{E}_1]_i$, что и требовалось доказать.

Что касается игры $\mathcal{J}_L$, то множество нагрузок, допустимых в первой модели, при условии, что ее новое состояние будет $(x_1 - \Delta_1)$, есть

$$D(x_1 - \Delta_1) = \{ f_1 / f_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [A_1 x_1 - \mathcal{E}_1]_j e_j,\ 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1 \}.$$

Тогда с учетом неравенств /22/, /23/, рассуждая аналогично, получаем доказательство теоремы.

С л е д с т в и е. Если существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $B_1 e_i \geqslant 0$, то $[y_1]_i = [\mathcal{E}_1]_i$. Действительно, в этом случае $b_{ii}^1 \geqslant 0$. Теорема 3 обобщает результаты работы [3], где в случае игры $\mathcal{J}_L$ предполагалось $B_1 e_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

З а м е ч а н и е I. Если вместо ограничений /II/, которые для рассматриваемых игр имеют вид $A_i \mathcal{E}_i \geqslant \mathcal{E}_i$, выполняются строгие неравенства

$$A_i \mathcal{E}_i > \mathcal{E}_i \quad (i = 1, 2), \qquad /28/$$

то при условии $b_{ii}^1 > 0$ игра заканчивается на первом шаге. Действительно, если первая модель не выигрывает игру на первом полутакте, то для непроигрыша на втором полутакте, согласно теореме, необходимо выполнение условия $[A_1 x_1 - f_1]_i = [\mathcal{E}_1]_i$. Тогда вторая модель может выделить в нагрузку вектор $f_2 \geqslant A_2 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 > 0$, а поэтому $S_2 f_2 > 0$ /мы предполагаем, что в каждой строке матрицы S_2 есть хотя бы один элемент, не равный нулю/. Т. е. i-й продукт у первой модели после второго полутакта может быть сделан менее $[\mathcal{E}_1]_i$.

З а м е ч а н и е 2. Если $b_{ii}^2 > 0$, где $B_2 = S_1 A_1 S_2 - E$, то аналог теоремы 3, говорит, что, начиная со второго шага вторая модель, для непроигрыша, должна использовать i-й продукт максимально. А при выполнении неравенств /28/ игра продолжится не далее, чем до второго

полутакта второго шага.

Для дальнейшего изучения возможных стратегий партнеров введем другое представление множества $D(x_1)$ /см./24/ /. Пусть $\bar{e}_i=[A_1x_1-\varepsilon_1]_i e_i$ тогда

$$D(x_1)=\{f_1/f_1=\sum\alpha_i\bar{e}_i;\quad 0\leqslant\alpha_i\leqslant 1\},\qquad /29/$$

где α_i будем называть коэффициентом использования i -го продукта первой моделью.

Будем в дальнейшем предполагать, что рассматриваемые модели удовлетворяют условию /28/. Тогда из замечания I к теореме 2 следует, что коэффициент использования любого продукта меньше единицы. Для игр $\mathcal{J}_L$ и $\tilde{\mathcal{J}}_L$ можно доказать и более сильную теорему, доказательство которой мы проведем только для игры $\mathcal{J}_L$, ибо для игры $\tilde{\mathcal{J}}_L$ рассуждения аналогичны.

Т е о р е м а 3. Пусть множество $\mathfrak{J}_i\subset\{1,\dots,n\}$ таково, что для всех $j\in\mathfrak{J}_i$ выполняется

$$[B_1\bar{e}_i]_i\geqslant[B_1\bar{e}_j]_i.\qquad /30/$$

Тогда для того чтобы игра $\mathcal{J}_L$ /или $\tilde{\mathcal{J}}_L$ / могла быть продолжена на один шаг, необходимо выполнение условия

$$\sum_{j\in\mathfrak{J}_i}\dot{\alpha}_j<1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим противное $\sum\limits_{j\in\mathfrak{J}_i}\alpha_j\geqslant 1$. Как уже отмечалось выше $\alpha_i<1$. Поэтому найдутся подмножества $\mathfrak{J}_i'\subset\mathfrak{J}_i$ и индекс $q\in\mathfrak{J}_i\setminus\mathfrak{J}_i'$ такие, что $\sum\limits_{j\in\mathfrak{J}_i'}\alpha_j<1$, но

$$\sum_{j\in\mathfrak{J}_i'}\alpha_j+\alpha_q\geqslant 1,\qquad /31/$$

причем подмножество $\mathfrak{J}_i'$ выберем так, чтобы $i\in\mathfrak{J}_i'$. Пусть $\sum\limits_{j\in\mathfrak{J}_i'}\alpha_j=\delta$. Исходя из условия /30/, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j[B_1\bar{e}_j]_i=\sum_{j\in\mathfrak{J}_i'}\alpha_j[B_1\bar{e}_j]_i+\alpha_q[B_1\bar{e}_q]_i+\sum_{j\notin\mathfrak{J}_i'\cup\{q\}}\alpha_j[B_1e_j]_i\leqslant[B_1\bar{e}_i]_i+$$

$$+(\alpha_q-(1-\delta))[B_1\bar{e}_q]_i+\sum_{j\notin\mathfrak{J}_i'\cup\{q\}}\alpha_j[B_1e_j]_i=[B_1\bar{e}_i]_i+\sum_{j\notin\mathfrak{J}_i'}\tilde{\alpha}_j[B_1\bar{e}_j]_i,$$

где $\tilde{\alpha}_j=\alpha_j$ для $j\neq q$ и $\tilde{\alpha}_q=(\alpha_q-(1-\delta))$, причем согласно /31/ $1\geqslant\tilde{\alpha}_q\geqslant 0$, т.е. вектор

$$\tilde{f}_1=\bar{e}_i+\sum_{j\notin\mathfrak{J}_i'}\tilde{\alpha}_j\bar{e}_j\in D(x_1).$$

Кроме того, с одной стороны, из вышеизложенного следует

$$[S_2(A_2x_2-\varepsilon_2)]_i-[A_1x_1-\varepsilon_1]_i<[B_1\tilde{f}_1]_i=[B_1\bar{e}_i]_i+\sum_{j\notin\mathfrak{J}_i'}\tilde{\alpha}_j[B_1\bar{e}_j]_i.$$

С другой стороны, так как $(x_1,x_2)\in\xi(0)$, то

$$[A_2x_2-\varepsilon_2]_i\geqslant[A_2S_1\tilde{f}]_i$$

Эти два неравенства, как показано в теореме 2, приводят к утверждению, которое/см.замечание I к теореме 2/ противоречит условию теоремы.

С л е д с т в и е. Пусть множество $\mathfrak{J}_i^2\subset\{1,\dots,n\}$ таково, что для

всех $j \in \mathfrak{J}_i^2$ выполняется $B_1\bar{e}_i \geq B_1\bar{e}_j$, тогда $\sum_{j\in\mathfrak{J}_i^2} \alpha_j < 1$. Действительно, в этом случае $[B_1\bar{e}_i]_i \geq [B_1 e_j]_i$, т.е. $\mathfrak{J}_i^2 \subset \mathfrak{J}_i$.

В случае игры $\tilde{\mathfrak{J}}_L$ имеет место и более сильное утверждение. Множество векторов $f \in D(x_1 - \Delta_1)$, удовлетворяющих при некотором $\Delta_2 \in R_n^+$ неравенству /21/, обозначим через $\bar{D}(x_1 - \Delta_1)$. Для векторов $f \in \bar{D}(x_1 - \Delta_1)$ коэффициент использования /см. /29/ / будем обозначать $\alpha_i(f)(i=1,\dots,n)$.

Т е о р е м а 4. Если игра $\tilde{\mathfrak{J}}_L$ может быть продолжена на второй шаг, то существует вектор $f_1 \in \bar{D}(x_1 - \Delta_1)$ такой, что для $j \in \mathfrak{J}_i \setminus \{i\}$ выполняется $\alpha_j(f_1) = 0$. /Здесь $\mathfrak{J}_i$ множество индексов таких, что $b_{ii}^1 \geq b_{ji}^1$ /.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \bar{D}(x_1 - \Delta_1)$, причем $\alpha_j(f) > 0$, где $j \in \mathfrak{J}_i \setminus \{i\}$. Рассмотрим число

$$\delta_{ij}(\gamma) = \gamma \frac{[A_1x_1 - \varepsilon_1]_j}{[A_1x_1 - \varepsilon_1]_i},$$

где $0 \leq \gamma \leq \alpha_i(f)$ /так как по предположению $A_1\varepsilon_1 - \varepsilon_1 > 0$, то $[A_1x_1 - \varepsilon_1]_i \neq 0$.

Имеем

$$(\alpha_i(f) + \delta_{ij}(\gamma))[A_1x_1 - \varepsilon_1]_i\, b_{ii}^1 + (\alpha_j(f) - \gamma)[A_1x_1 - \varepsilon_1]_j\, [B_1e_j]_i =$$
$$= \alpha_i(f)[A_1x_1 - \varepsilon_1]_i\,[B_1e_i]_i + \gamma[A_1x_1 - \varepsilon_1]_j[B_1e_i]_i + (\alpha_j(f) - \gamma)[A_1x_1 -$$
$$- \varepsilon_1]_j\,[B_1e_j]_i \geq \alpha_i(f)[A_1x_1 - \varepsilon_1]\,b_{ii}^1 + \alpha_j(f)[A_1x_1 - \varepsilon_1]_j\, b_{ji}^1,$$

так как по предположению $b_{ii}^1 \geq b_{ji}^1$. Введем величину $\bar{\gamma}$ формулой

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} \alpha_j(f), & \text{если } \alpha_i(f) + \delta_{ij}[\alpha_j(f)] < 1, \\ \gamma_0, & \text{если } \alpha_i(f) + \delta_{ij}[\alpha_j(f)] \geq 1, \end{cases}$$

где $\gamma_0 = (1 - \alpha_i(f))\dfrac{[A_1x_1 - \varepsilon_1]_i}{[A_1x_1 - \varepsilon_1]_j}$.

Нетрудно видеть, что в случае $\alpha_i(f) + \delta_{ij}[\alpha_j(f)] \geq 1$ выполняется $\alpha_i(f) + \delta_{ij}(\bar{\gamma}) = 1$, где $0 \leq \bar{\gamma} \leq \alpha_j(f)$.

Теперь определим вектор $f_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f_1)\bar{e}_k$, где $\alpha_i(f_1) = \alpha_i(f) + \delta_{ij}(\bar{\gamma})$; $\alpha_j(f_1) = \alpha_j(f) - \bar{\gamma}$; $\alpha_k(f_1) = \alpha_k(f)$ для $k \neq i, k \neq j$. Тогда из вышесказанного следует, что

$$[B_1 f_1]_i \geq [B_1 f_1]_i,$$

т.е. $f_1 \in \bar{D}(x_1 - \Delta_1)$. Обращаясь к доказательству теоремы 4, мы немедленно получаем, что неравенство $\alpha_i(f) + \delta_{ij}[\alpha_j(f)] \geq 1$ не может иметь места, ибо в противном случае $\alpha_i(\bar{f}_1) = 1$. Но тогда $\bar{\gamma} = \alpha_j(f)$, и, следовательно, $\alpha_j(f_1) = 0$. Повторяя это рассуждение не более l_i раз /где l_i -число элементов во множестве $\mathfrak{J}_i$ /; получаем доказательство теоремы

З а м е ч а н и е. Рассуждения, приведенные здесь, показывают, что и для игры $\mathfrak{J}_L$, которая может быть продолжена на второй шаг, выполняется неравенство

$$\alpha_i(f) + \delta_{ij}[\alpha_i(f)] < 1$$

или

$$\alpha_i(f) + \alpha_j(f)\frac{[A_1x_1 - \varepsilon_1]_j}{[A_1x_1 - \varepsilon_1]_i} < 1$$

для $i \in \mathfrak{I}_i$

Эта теорема показывает, что матрица B_1 в некотором смысле упорядочивает продукты по ценности /в смысле взаимодействия/, если $B_1 e_l > B_1 e_k$ /а тогда и $b^1_{il} > b^1_{kl}$ /, то на первом шаге первая система может вообще не употреблять в нагрузке k -й продукт.

Аналогичные теоремы можно сформулировать и для матрицы B_2 .

Поступила в редакцию I3.I.1969.

Литература

I. В.Л.Марков "Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики" Сиб.мат. журнал № 4, I966.

2. А.М.Рубинов "Бесконечные модели производства" Сиб.мат. журнал № II, I968.

3. Л.Ф.Гринько, И.А.Красс "Об одной игре двух моделей" /в печати/.