Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.519.1.

ОПТИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО РЕБЕР В ГРАФЕ С ТРИВИАЛЬНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

Л.С.Мельников

В работе рассматриваются обыкновенные конечные графы, т.е. неориентированные графы без петель и параллельных ребер. Решается вопрос о нахождении максимального и минимального числа ребер в графе с n вершинами и с тривиальной группой автоморфизмов, поставленный в [1] стр.122.

Пусть G есть граф с вершинами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Автоморфизмом графа G называется такое взаимно однозначное отображение множества вершин графа G на себя, которое сохраняет отношение смежности. Множество автоморфизмов графа G образует группу $\Gamma(G)$. Все основные понятия, здесь использованные, читатель может найти в [3]. Группа называется тривиальной, если она содержит лишь единицу. Тривиальная группа автоморфизмов графа G состоит только из тождественного автоморфизма $e: x_i \to x_i$ $(i = 1,\dots,n)$.

Отметим, что граф G и его дополнение $\bar{G}$ имеют одну и ту же группу автоморфизмов, $\Gamma(G) = \Gamma(\bar{G})$ /см., например, [3] /. Поэтому, если $f^*(n)$ - максимальное, а $f_*(n)$ - минимальное количества ребер n-вершинного графа G с тривиальной группой автоморфизмов $\Gamma(G) = \{e\}$, то

$$f_*(n) + f^*(n) = C_n^2 = \binom{n}{2}. \qquad /1/$$

Ввиду того, что за массой ребер мы иногда не видим структуры графа, остановим все наше внимание на функции $f_*(n)$. Функция же $f^*(n)$, определением которой и интересуются в [1], легко вычисляется с помощью /1/.

К сожалению, функция $f_*(n)$ не представляется здесь в виде явного алгебраического выражения с переменной n, а сводится к вычислению другой функции, подсчет которой проводится с помощью производящих функций, введенных Риорданом в [2].

Но это сведение показывает действительное строение графа с оптимальным количеством ребер, группа автоморфизмов которого тривиальна. $f_*(1) = f^*(1) = 0$ и для n = 2,3,4,5 функция $f_*(n)$ не определена, ввиду того, что графов с тривиальной группой автоморфизмов для заданных n не существует. Этот факт констатируется в [3] и легко проверяется непосредственно. Граф с 6 вершинами и 6 ребрами, изображенный на рис.1, имеет единичную группу и минимальное количество ребер. Следовательно, $f_*(6) = 6$. Рассмотрим теперь случай $n \geq 7$.

Предложение 1. Для любого $n \geq 7$ существует n-вершинное дерево с тривиальной единичной группой автоморфизмов.

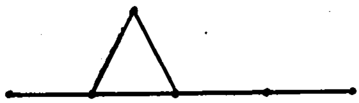

Рис. I.

Для $n=7$ дерево T_0 с единичной группой автоморфизмов изображено на рис. 2. Дерево T_1 с 8 вершинами получается из дерева T_0 добавлением вершины a_1 и соединением ее с вершиной a_0. Добавляя вершину b_1 и соединяя ее с вершиной b_0, получим дерево T_2 с 9 вершинами. I0-вершинное дерево T_3 мы получим, добавляя вершину c_1 и соединяя ее с c_0. Допустим построено дерево T_{3k} с $3k+7$ вершинами. Для того чтобы получить дерево T_{3k+1}, добавим вершину a_{k+1} и соединим ее с a_k.

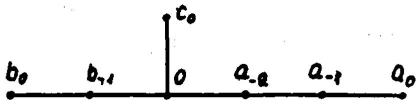

Рис. 2.

T_{3k+2} получаем, добавляя b_{k+1} и соединяя b_{k+1} с b_k. $T_{3(k+1)}$ получается, если мы добавим вершину c_{k+1} и соединим ее с c_k. Предложение доказано.

С л е д с т в и е. $f_*(n)\leqslant n-1$ для $n\geqslant 7$.

Пусть G_0 – n -вершинный граф с травиальной группой автоморфизмов и количеством ребер, не превосходящим $n-1$. Тогда необходимо, чтобы хотя бы одна из компонент связности графа G_0 была деревом, ибо в противном случае число ребер в G_0 не меньше n.

П р е д л о ж е н и е 2. Существует n - вершинный граф $\widetilde{G}_0$ с числом ребер, не превосходящим числа ребер G_0, и тривиальной группой автоморфизмов, каждая компонента связности которого является деревом.

Пусть t - количество компонент связности, не являющихся деревьями. Если $t=0$, то $\widetilde{G}_0=G_0$. Пусть для $t=k$ предложение 2 доказано. Покажем его для $t=k+1$.

Пусть G_0^i - компонента связности графа G_0, не являющаяся деревом. Выберем дерево-компоненту G_0^t в G_0, которое существует благодаря сделанному выше замечанию, с максимальным количеством вершин. На вершинах компонент G_0^t и G_0^i строим дерево с тривиальной группой автоморфизмов, что возможно благодаря предложению I. В результате мы получим граф с тривиальной группой автоморфизмов и числом ребер, не превосходящим количества ребер в G_0, причем для него $t=k$. Следовательно, по индукционному предположению требуемый граф $\widetilde{G}_0$ существует.

Граф $\widetilde{G}_0$ представляет собой лес из неизоморфных деревьев, причем группа автоморфизмов каждого дерева тривиальна. Чем больше в графе $\widetilde{G}_0$ деревьев, тем меньше количество ребер он содержит. И поэтому граф $\widetilde{G}_0$ с максимальным числом компонент связности содержит минимальное количество ребер. Граф $\widetilde{G}_0$ с максимумом компонент связности может быть построен, очевидно, следующим образом. Пусть класс графов $T_0(n)$ - множество неизоморфных n -вершинных деревьев с тривиальной группой автоморфизмов и $g(n)$ - мощность этого множест-

ва. Рассмотрим последовательность деревьев $\{T_0^j(i)\}(j=1,\dots,q(i);\ i=1,2,\dots)$, взятых в порядке возрастания i, где $T_0^j(i)$ - j - е дерево из класса $T_0(i)$. /Нумерация деревьев в классе $T_0(n)$ проводится произвольно/. Для построения $\widetilde{G}_0$ с максимумом компонент связности /обозначим его через $\widetilde{G}_0^m$ / необходимо взять максимальное подмножество деревьев от $T_0^1(1)$ до $T_0^j(i)$ /включительно/, сумарное количество вершин в котором не превосходит n. Разность между n и этим количеством обозначим r.

Если $r=0$, то $\widetilde{G}_0^m$ состоит из этого множества деревьев. Пусть $r>0$. На множестве вершин дерева $T_0^j(i)$ и r оставшихся вершинах построим новое дерево $T_0^l(i+r)$ с тривиальной группой автоморфизмов. И тогда $\widetilde{G}_0^m$ состоит из семейства деревьев от $T_0^1(1)$ до $T_0^j(i)$ /исключая его/ и дерева $T_0^l(i+r)$, где $l\in\{1,\dots,q(i+r)\}$. Предполагая функцию $q(n)$ известной, введем в рассмотрение следующие параметры:

$$k=\max\left\{q\Big/n-\sum_{i=1}^{q} iq(i)\geq 0\right\},$$

$$s=\left[\frac{n-\sum\limits_{i=1}^{k} iq(i)}{k+1}\right]$$

/скобки $[\,x\,]$ обозначают целую часть числа x /. Используя эти параметры, запишем выражение функции $f_*(n)$ через $q(i)$

$$f_*(n)=n-\sum_{i=1}^{k} q(i)-s. \qquad /2/$$

Применяя аналогичную конструкцию, можно построить n -вершинный граф с тривиальной группой автоморфизмов и числом ребер $m\in(f_*(n),n-1]$.

Перейдем к подсчету функции $q(n)$. Эту вторую часть статьи можно было бы назвать-число n -вершинных деревьев с тривиальной группой автоморфизмов. Причем подсчет производится как деревьев, так и деревьев с корнем, которые будут использованы при подсчете деревьев. Пусть t_n - число n -вершинных неизоморфных корневых деревьев с тривиальной группой автоморфизмов, а $t_n(m)$ - число различных n--вершинных корневых деревьев с тривиальной группой автоморфизмов и степенью корня m.

Тогда

$$t_n=\sum_{m=1}^{n-1} t_n(m).$$

Очевидно, $t_n(1)=t_{n-1}$, так как все эти корневые деревья могут быть получены добавлением новой вершины - корня и соединением ее с корнем $(n-1)$ -вершинных корневых деревьев с тривиальной группой автоморфизмов.

Аналогично, для четного n

$$t_{2q}(2)=t_1\cdot t_{2q-2}+t_2\cdot t_{2q-3}+\ \dots\ +t_{q-1}\cdot t_q,$$

а для нечетного n

$$t_{2q+1}(2)=t_1\cdot t_{2q-1}+t_2\cdot t_{2q-2}+\ldots+t_{q-1}\cdot t_q+\binom{t_q}{2}.$$

Последняя формула получается такой ввиду того, что в случае присоединения корневых деревьев с одним и тем же числом вершин к двум ребрам у корня число возможностей /вследствие симметрии этих ребер у корня/ равно числу сочетаний по два из t_q элементов. Только тогда мы получаем дерево с единичной группой автоморфизмов. Пусть теперь степень корня равна m. Предположим, что присоединяемые деревья с корнем классифицируются по числу точек с помощью разбиения $/n-1/$ на m частей. Имеем произвольное разбиение

$$(1^{k_1}2^{k_2}\ldots(n-1)^{k_{n-1}});$$

где $k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=m$ и $k_1+2k_2+\ldots+(n-1)k_{n-1}=n-1$.

Тогда число различных возможностей, соответствующих этому разбиению, оказывается равным

$$\binom{t_1}{k_1}\binom{t_2}{k_2}\ldots\binom{t_{n-1}}{k_{n-1}}$$

И, наконец, t_n есть сумма всех таких произведений по всем разбиениям числа $n-1$:

$$t_n=\sum_{\sum_{i=1}^{n-1}k_i\cdot i=n-1}\binom{t_1}{k_1}\binom{t_2}{k_2}\ldots\binom{t_{n-1}}{k_{n-1}},\qquad /3/$$

т.е. сумма берется по всевозможным решениям уравнения $k_1+2k_2+\ldots+(n-1)k_{n-1}=n-1$. Запишем этот результат в виде производящей функции

$$t(x)=t_1x+t_2x^2+\ldots=x(1+x)^{t_1}(1+x^2)^{t_2}\ldots(1+x^i)^{t_i}\ldots\qquad /4/$$

Вычислим логарифм последней формулы.

$$\log t(x)=\log x+\sum_{i=1}^{\infty}t_i\log(1+x^i)=$$
$$=\log x+\sum_{i=1}^{\infty}t_i\left(x^i-\frac{x^{2i}}{2!}+\frac{x^{3i}}{3!}-\frac{x^{4i}}{4!}+\ldots\right)$$
$$=\log x+t(x)-\frac{t(x^2)}{2!}+\frac{t(x^3)}{3!}-\frac{t(x^4)}{4!}+\ldots,$$

или $$t(x)=x\exp\left(t(x)-\frac{t(x^2)}{2!}+\frac{t(x^3)}{3!}-\frac{t(x^4)}{4!}+\ldots\right).\qquad /5/$$

Формула /5/ дает возможность вычислять рекуррентно t_n через значения t_k - x , где $k<n$.

Теперь, когда производящая функция $t(x)$ нам известна, поставим себе целью установление связи между производящей функцией числа деревьев с тривиальной группой автоморфизмов и функцией $t(x)$. При установлении этой связи мы будем следовать методам Риордана [2] и Polya [4] в их подсчете числа n -вершинных деревьев и терминологии Оре [3]. Для того чтобы эту связь установить, следует найти способ сопоставления каждому дереву некоторого дерева с корнем. Напомним понятие центра масс дерева и некоторые связные с ним свойства /см. [3] /.

Определим вес любой ветви дерева в произвольной вершине, как число ребер содержащихся в этой ветви. Назовем весом заданной вер-

шины наибольший вес ее ветвей. Тогда вершину с наименьшим весом назовем центром масс дерева, а вес этой вершины - весом дерева.

Каждое дерево имеет либо один, либо два центра масс. Дерево с двумя центрами масс состоит из двух вершин одного веса, соединенных ребром, и, более того, оно должно состоять из двух деревьев с одинаковым числом вершин /причем в каждое из них следует включить центр масс /по обе стороны от ребра, соединяющего два центра масс. Случай деревьев с двумя центрами масс может встретиться лишь для деревьев с четным числом вершин.

Пусть $h(x)=h_1x+h_2x^2+\dots$ - производящая функция числа деревьев с тривиальной группой автоморфизмов /где $h_i=g(i)$ /. $h(x)=h'(x)+h''(x)$, где $h'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}h'_k x^k$ и $h''(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}h''_k x^k$ есть производящие функции деревьев, обладающих тривиальной группой автоморфизмов с одним и двумя центрами масс, соответственно.

Используя сделанные выше замечания относительно деревьев с двумя центрами масс, получим

$$h''_{2q+1}=0 \quad \text{и} \quad h''_{2q}=\binom{t_q}{2}.$$

Заметим, что максимальный вес n -вершинного дерева с одним центром масс равен $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. И всякое n -вершинное дерево с корнем, вес которого /корня/ не превосходит $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, будучи рассмотренным как дерево без корня, является деревом с одним центром масс - корнем.

Рассмотрим множество n -вершинных корневых деревьев с тривиальной группой автоморфизмов и расположим их в порядке убывания веса корня. Тогда, пользуясь методом исключения, легко находим:

$$h'_{2q+1}=t_{2q+1}-t_{2q+1}(1)-t_{2q}(1)\cdot t_2-t_{2q-1}(1)t_3-\dots-t_{q+2}(1)t_q,$$
$$h'_{2q}=t_{2q}-t_{2q}(1)-t_{2q-1}(1)t_2-t_{2q-2}(1)\cdot t_3-\dots-t_{q+2}(1)t_q-t_{q-1}(1)t_q.$$

А так как $t_n(1)=t_{n-1}$ и $t_1=1$ имеем

$$h'_{2q+1}=t_{2q+1}-t_{2q}\cdot t_1-t_{2q-1}\cdot t_2-\dots-t_{q+1}\cdot t_q,$$
$$h'_{2q}=t_{2q}-t_{2q-1}\cdot t_1-t_{2q-2}\cdot t_2-\dots-t_{q+1}\cdot t_{q-1}-t_q^2$$

Суммируя по k члены вида $x^k\cdot h'_k$ и $x^k h''_k$, получаем

$$h(x)=t(x)-\frac{1}{2}t^2(x)-\frac{1}{2}t(x^2). \qquad /6/$$

Член $t^2(x)/2$ получается из произведений $t_{k-i}\cdot t_i$, а член $t(x^2)/2$ - из разности $\frac{t_q^2}{2}-\binom{t_q}{2}$. Полученный результат дает нам возможность вычислять производящую функцию $h(x)$ через уже известную производящую функцию $t(x)$. А так как коэффициенты $h_k=g(k)$, то это позволяет нам вычислить $f_*(n)$ по формуле /2/.

Поступила в редакцию 10.1.1969 г.

Литература

1. В.Г.Визинг. Некоторые нерешенные задачи в теории графов. УМН 23, вып. 6 /1968/, 117-134.

2. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. ИЛ,М., 1963.

3. О. Оре. Теория графов. "Наука",М., 1968.

4. G. Polya Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Mathem., 68 / 1937 /, 145 - 253.