Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.519.95.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ НА ОПТИМУМ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Е.А.Ковалев

В статье рассматриваются управляемые процессы, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m,t) \qquad (i=\overline{1,n}), \qquad /0.1/$$

где $\bar{u}(t)$ является вектор-функцией допустимого управления и удовлетворяет следующим условиям:

1/ $\bar{u}(t)\in\Omega$ при $t\in[0,T]$ /Ω - замкнутое, выпуклое множество/;

2/ $\bar{u}(t)$ - измеримая на любом отрезке $[0,T]$ вектор-функция.

Считаем, что /0.1/ решается при начальных условиях

$$\bar{x}(0)=\bar{x}_0 . \qquad /0.2/$$

Обозначим

$$Z(T^*) = \max_{\bar{u}(t)\in\Omega} \bar{C}\cdot\bar{x}(T^*), \qquad /0.3/$$

где $\bar{C}$ - некоторый n - мерный постоянный вектор.

В работе рассматривается задача A ; требуется найти такое $T=T^*\in[0,\infty]$ и допустимое управление $u^*(t)$, в случае которых достигается конечный максимум

$$\frac{Z(T^*)}{T^*+\tau_0} = \max_{T\geq 0}\frac{Z(T)}{T+\tau_0}, \quad \tau_0>0. \qquad /0.4/$$

Смысл функционала /0.4/ содержится в статьях [8, 9]. Однако в этих работах предполагалось, что значение $Z(T)$ для любого $T\geq 0$ нам заранее известно. В данной работе найдены условия существования решения задачи /A/ для различных классов процессов. В начале заметки рассматривается общий случай, в дальнейшем детально изучаются частные случаи управляемых процессов.

§ I. Общий случай

Пусть правые части системы /0.1/ таковы, что удовлетворяют условиям теоремы Каратеодори и, кроме того,

$$|f(\bar{x}_1,\bar{u},t) - f(\bar{x}_2,\bar{u},t)| \leq M(t)\,|\bar{x}_2-\bar{x}_1|,$$

где $M(t)$ - измеримая функция.

Предположим далее, что для каждого $a\geq 0$ существует положительно-определенная функция Ляпунова $V(t,\bar{x})$, определенная в $S=S_{r(a)}$, где $S_{r(a)}=\{\bar{x}:\bar{x}\in R^n, |\bar{x}|\geq r(a)\}$, и удовлетворяющая условию

$$b(|x|)\leq V(t,\bar{x})\leq a(|\bar{x}|),$$

где $a(|x|)$ - положительная монотонно возрастающая функция

$b(|x|)$ - неотрицательная монотонно возрастающая функция.

Допустим, что $V'_u(t,\bar{x}) \leq 0$ для всех $(t,x)\in S$ и для каждой измеримой $u(t)\subset \|u\|\leq a$, то задача А разрешима. Это утверждение непосредственно следует из результатов работы [10].

Предположим теперь, что система /0.1/ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{si}\, x_i + \sum\limits_{j=1}^{m} q_{sj}\, u_j + R_s(t, x_1,\ldots,x_n, u_1,\ldots,u_m) (s=\overline{1,n}) \\ \dot{x}_{n+1} = -\sum\limits_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j - \sum\limits_{i,j}^{m} b_{ij}\, u_i u_j, \end{cases} \qquad /1.1/$$

где $R_s(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)$ и $u_j(t)$ удовлетворяют всем условиям, которые обеспечивают существование и единственность решения $x_s(t)$ при любых начальных условиях $x_s(t_0) = x_{s0}$. Считаем, что

$$|R_s(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)| \leq A\Big\{\sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{j=1}^{m}|u_j|\Big\},$$

где $A = const$, $\sum a_{ij}x_i x_j$; $\sum b_{ij} u_i u_j$ - некоторые положительно определенные квадратичные формы; множество $\Omega = E_m$, а функционал

$$\bar{c}\cdot\bar{\varphi}(x_0,T,u_T) = c_{n+1}\,\varphi_{n+1}(\bar{x}_0, T, u_T).$$

Обозначим через B и Q соответственно матрицы $\{p_{si}\}$ $\{q_{sj}\}$. При данных предположениях о системе /1.1/ справедливо утверждение: если ранг матрицы $S = \{Q, B'Q,\ldots,B^{n-1}Q\}$ равен n, то задача А имеет решение при достаточно малом $A > 0$.

§ 2. Системы вида $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(x) + B\bar{u}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_s = f_s(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} b_j^s u_j \quad (s = \overline{1,n}), \qquad /2.1/$$

где f_s - однородные функции порядка μ заданы в E_n и непрерывно дифференцируемы до порядка $\nu \geq 1$; $\bar{u}(t)$ - m -мерный вектор управления; $\bar{u}(t)\in\Omega$, где Ω - m -мерный куб: $|u_i(t)| \leq 1$.

Далее пусть решение однородной системы

$$\dot{x}_s = f_s(\bar{x}) \qquad /2.2/$$

удовлетворяют неравенству

$$|\bar{x}(t,\bar{x}_0)| \leq A t^{-\alpha} \quad (t \geq T), \qquad /2.3/$$

где А - достаточно большая величина, $\alpha > 0$. Тогда справедливо утверждение: если решение однородной системы /2.2/ удовлетворяет неравенству /2.3/ и $\sum\limits_{j=1}^{m}|b_j^s| \leq c\|x_0\|^{\lambda} (\lambda \geq \mu)$, $\mu \neq 2k$, то задача А разрешима.

Пусть движение $\{x_i(t)\}$ управляемого объекта определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_s &= \sum_{i=1}^{n} f_{si}(t,\bar{u})\,x_i \quad (s=\overline{1,n}), \\ \dot{x}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} a_k\,|x_k|^{\alpha}, \end{aligned}\right\}$$

где $\bar{u}(t)$ $-m$ - мерный вектор управления, принадлежащий при $t\in[0,T]$ замкнутой, выпуклой области Ω ;

$f_{si}(t,\bar{u})$ - непрерывные функции от своих аргументов в области $T\geq t_0>0$, $\bar{u}\in\Omega$.

При сделанных предположениях справедливо утверждение: если интеграл $\int\limits_0^\infty e^{\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^t \lambda^*(\tau)d\tau}dt$ сходится,

где $\lambda^*(t)=\max\limits_{\substack{u\in R\\ 1\leq s\leq n}}\lambda_s(t,\bar{u})$, а $\lambda_s(t,\bar{u})$ - собственные числа матрицы $[F(t,\bar{u})+F'(t,\bar{u})]$, $F=\{f_{s,i}\}$, то решение задачи А существует.

§ 3. Условия существования решения задачи для линейных управляемых систем

Пусть движение объекта описывается системой вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= b_{11}x+b_{12}y+\alpha_1 u_1\\ \dot{y} &= b_{21}x+b_{22}y+\alpha_2 u_2\end{aligned}\right\}\qquad /3.1/$$

с нулевыми начальными данными, причем $\Omega=\{\bar{u}:|u_i|\leq 1\}$.

Рассмотрим случай, когда собственные числа λ_i матрицы $B= \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{Vmatrix}$ действительны и различны т.е. $\lambda_1<\lambda_2$. Если $\lambda_i<0$ / i = 1,2/, то задача А имеет решение. Конечный максимум /0.4/ существует и в том случае, если $\lambda_i>0$, $\lambda_2<0$, но $\frac{c_1\alpha_1}{\lambda_1}<0$. Пусть $\lambda_1=\lambda_2$. В этом случае задача А имеет решение, если $\lambda<0$ и

$$-\frac{c_1\alpha_2+c_1\alpha_1\lambda}{\lambda}+\frac{2c_1\alpha_2}{\lambda^2}e^{\lambda\frac{c_2}{c_1}}-\frac{c_1\alpha_2}{\lambda^2}e^{2\lambda\frac{c_2}{c_1}}+\frac{c_1\alpha_1}{\lambda}+\frac{c_2\alpha_2}{\lambda^2}-e^{\lambda\frac{c_2}{c_1}}>0.$$

Если $\lambda>0$, но $c_1<0,\alpha_1>0,c_2>0,\alpha_2>0$, то решение задачи А существует.

Остается рассмотреть случай, когда собственные значения матрицы β имеют вид

$$\lambda_1=\lambda+i\omega,\ \lambda_2=\lambda-i\omega \quad \text{, причем } \omega\neq 0 .$$

Обозначим:

$$a=\frac{\lambda}{\omega};\ p=\frac{2\omega}{e^{\frac{\pi\lambda}{2\omega}}-1}-c_1(\lambda+\omega)+c_2(\omega-\lambda);$$

$$q=y_0-\frac{\omega+\lambda}{\omega^2+\lambda^2}-\frac{2\omega}{(\lambda^2+\omega^2)(e^{\frac{\pi\lambda}{2\omega}}-1)};\ R=\frac{2(c_1^2-c_2^2)}{\omega};\ r-\frac{\pi}{2\omega};$$

$$Q_0=\tau_0-\frac{\varphi}{\omega};\ p_1=\frac{1}{\omega}(c_2-c_1)+(c_1^2-c_2^2)(y_0-\frac{1}{\omega}).$$

Если $\mathrm{sign}(q\cdot a)=-1$ и $-p-q+aqQ_0>0$, то задача А имеет решение.

Пусть $\lambda\equiv 0$. В этом случае при $\frac{p_1}{Q_0}>0$ и $\frac{p_1}{Q_0}>\frac{R}{r}$ задача А также имеет решение.

Поступила в редакцию 3.2.1969г.

Литература

1. Л.С.Понтрягин, В.П.Болтянский, Г.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.

2. Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.

3. В.И.Зубов. Методы А.М.Ляпунова и их применение. Изд. ЛГУ, 1957.

4. М.Г.Малкин. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.

5. В.П.Болтянский. Математические методы оптимального управления. М., Наука, 1960.

6. А.М.Летов. Аналогическое конструктирование регуляторов, М., Наука, 1961.

7. Н.Н.Красовский, Ю.С.Осипов. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1963.

8. В.В.Леонов. Асимптотическое программирование I. Дискретный анализ, вып. 4, Новосибирск 1965.

9. А.Ф.Федотов, В.В.Леонов, Ю.И.Кузнецов. Определение оптимальной длительности циклов контактных аппаратов периодического действия с переменной активностью катализатора, Сб. "Всесоюзная конференция по химическим реакторам" том П, АН СССР, Новосибирск, 1965.

10. P.P. Varaiya, R. Liu. Bounded - input bounded - output stability of nonlinear time - varying differentional systems. Siam J. Control 1966.