Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.518.90.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В СЛУЧАЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С ДВУМЯ ФУНКЦИОНАЛАМИ

В.И.Болдырев

В данной заметке дается вывод уравнений типа Беллмана для дифференциальной игры с двумя функционалами при условии, что существует решение игры. При этом исследуется как непрерывный, так и дискретный варианты игры.

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть дана система n -го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v), \qquad /1/$$

где u, v - векторные параметры, t - время, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - фазовая точка с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ из n -мерного пространства R^n, причем система /1/ решается при начальных условиях:

$$x(t_0) = x_0 . \qquad /2/$$

Вектор-функция f является непрерывной по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по x. Задан отрезок времени $[t_0, T]$, в течение которого протекает процесс /1/, /2/.

В работе допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные на $[t_0, T]$ вектор-функции $u(t), v(t)$, удовлетворяющие при $t \in [t_0, T]$ условиям: $u(t) \in U$, $v(t) \in V$, где U и V - замкнутые, выпуклые множества. Классы допустимых управлений $\{u(t)\}$ и $\{v(t)\}$ обозначаются нами соответственно через D_1 и D_2. Критериями эффективности в рассматриваемой игре служат функционалы:

$$R_1(u,v) = \int_{t_0}^{T} f_{01}(x, u, v)\, dt + F_1(x(T)), \qquad /3/$$

$$R_2(u,v) = \int_{t_0}^{T} f_{02}(x, u, v)\, dt + F_2(x(T)). \qquad /4/$$

Функции f_{0k}, F_k $(k = 1, 2)$ непрерывны по совокупности аргументов, а f_{0k} $(k = 1, 2)$ непрерывно дифференцируемы по x. Требуется найти такие управления $u^*(t) \in D_1$, $v^*(t) \in D_2$, в случае которых выполняются следующие условия:

а/ при фиксированном $v^*(t)$ имеет место

$$R_1(u^*(t), v^*(t)) = \max_{u(t) \in D_1} R_1(u(t), v^*(t)); \qquad /5/$$

б/ при фиксированном $u^*(t)$ имеет место

$$R_2(u^*(t), v^*(t)) = \max_{v(t) \in D_2} R_2(u^*(t), v(t)). \qquad /6/$$

Пусть $u^*(t)$, $v^*(t)$, $x^*(t, t_0, x_0)$ - оптимальные управления и оптимальная траектория соответственно при $t_0 \le t \le T$ и при начальных услови-

ях /2/. Обозначим через $V_1(x_0, t_0)$ значения функционала /3/, а через $V_2(x_0, t_0)$ – значения функционала /4/, достигаемые в случае оптимальных управлений $u^*(t), v^*(t)$ при начальном состоянии системы (t_0, x_0). При движении по оптимальной траектории из точки (x, t) функционалы принимают значения $V_1(x, t)$, $V_2(x, t)$.

Теорема. Пусть функция $V_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов в области W_1, а функция $V_2(x, t)$ – в области W_2, причем оптимальная траектория не выходит на границы областей W_1 и W_2. Тогда, если существует решение дифференциальной игры, $V_1(x, t)$, $V_2(x, t)$ удовлетворяют в области $W = W_1 \cap W_2$ соответственно уравнениям:

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} = -\max_{u \in U}\left[f_{01}(x, u, v^*) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, v^*)\right] \qquad /7/$$

при фиксированном $v^*(t) \in V$:

$$\frac{\partial V_2(x, t)}{\partial t} = -\max_{v \in V}\left[f_{02}(x, u^*, v) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_2(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u^*, v)\right] \qquad /8/$$

при фиксированном $u^*(t) \in U$, причем уравнения /7/ и /8/ решаются при краевых условиях:

$$V_1(x, T) = F_1(x), \qquad V_2(x, T) = F_2(x). \qquad /9/$$

Доказательство. Вывод уравнений /7/, /8/ с краевыми условиями /9/ аналогичен выводу подобных уравнений в [I]. Пусть Δt – достаточно малый промежуток времени. Тогда [I] функции $V_1(x, t)$, $V_2(x, t)$ в силу гладкости удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$V_1(x_0, t_0) = \max_{u(t_0) \in U}\left[f_{01}(x_0, u(t_0), v^*(t_0))\Delta t + V_1(x_0, t_0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1(x_0, t_0)}{\partial x_{0i}} f_i(x_0, u(t_0), v^*(t_0))\Delta t + \frac{\partial V_1(x_0, t_0)}{\partial t_0}\Delta t\right] + o(\Delta t);$$

$$V_2(x_0, t_0) = \max_{v(t_0) \in V}\left[f_{02}(x_0, u^*(t_0), v(t_0))\Delta t + V_2(x_0, t_0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_2(x_0, t_0)}{\partial x_{0i}} f_i(x_0, u^*(t_0), v(t_0))\Delta t + \frac{\partial V_2(x_0, t_0)}{\partial t_0}\Delta t\right] + o(\Delta t).$$

Устремляя Δt к 0, получим нужные соотношения /7/, /8/.

Рассмотрим дискретный случай. Разобьем интервал $[t_0, T]$ на N интервалов длины Δ_n. Пусть $N = 2^n$, $t_j = t_0 + j\Delta_n$, $t_0 \le t_j < T$; $(j = 0, 1, \ldots, 2^n)$. Рассмотрим дискретные значения [2] $x_j = x(t_j)$, $u_j = u(t_j)$, $v_j = v(t_j)$, где $t_j = t_0 + j\Delta_n$. Обозначим выигрыши игроков I и 2 в этой многошаговой игре соответственно через $V_{1n}(x_j, t_j)$ и $V_{2n}(x_j, t_j)$. С помощью индукции по j на основании принципа оптимальности мы получим для $V_{1n}(x_j, t_j)$ и $V_{2n}(x_j, t_j)$ рекуррентные формулы:

$$V_{1n}(x_j, t_j) = \max_{u_j \in U}\left\{\Delta_n f_{01}(x_j, u_j, v_j^*) + V_{1n}\left[x_j + \Delta_n f(x_j, u_j, v_j^*), t_j + \Delta_n\right]\right\} \qquad /10/$$

$$V_{2n}(x_j,t_j)=\max_{v_j\in V}\left\{\Delta_n f_{02}(x_j,u_j^*,v_j)+V_{2n}\left[x_j+\Delta_n f(x_j,u_j^*,v_j),\, t_j+\Delta_n\right]\right\}, \qquad /11/$$

причем

$$V_{1n}(X_N,T)=F_1(X_N), \quad V_{2n}(X_N,T)=F_2(X_N).$$

Поступила в редакцию 10.2.1969.

Литература

1. Р.Айзекс. Дифференциальные игры. Изд. "Мир", М., 1967.

2. W.H. Feeming. The convergence problem for differential games, I. J. math. Anal. and Appl. Vol. 3 / 1961 /, p.p.112-116.