Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.512.25/26+519.3:330.115.

К ЗАДАЧЕ О НАЗНАЧЕНИИ

В.А.Перепелица

Пусть дана матрица $A=\|a_{ij}\|$ размерности $n\times n$, у которой элементы a_{ij} -целые числа из отрезка $[1,r]$, $r\geq 2$. Задача о назначении[ж/] состоит в том, чтобы указать подстановку $\binom{i}{j_i}$; $i=1,2,..,n$ для которой сумма $S=\sum_{i=1}^{n} a_{ij_i}$ была бы наименьшей /или наибольшей/ [2]. Известно [1], что для решения такой задачи требуется затратить порядка n^3 операций[жж/]. В настоящей заметке устанавливаются некоторые свойства решения задачи о назначении. На основании этих свойств находятся ограничения на величину r, при выполнении которых почти всегда при решении задачи о назначении порядок числа используемых операций такой же, как и порядок числа элементов матрицы A, т.е. $\sim n^2$.

§ 1

Множество $\{A\}$ всевозможных матриц A указанного вида обозначим через $\mathfrak{A}$. Мощность любого множества E условимся обозначать через $|E|$; $|\mathfrak{A}|=r^{n^2}$. Обозначим через $\mathfrak{A}^1$ множество матриц $A\in\mathfrak{A}$, у каждой из которых $\min_{i,j} a_{ij}=1$ и решение задачи о назначении состоит только из единичных элементов.

Для доказательства теоремы I нам понадобится теорема Ф.Холла о различных представителях /см. [3], гл.3/. В качестве множества M_i примем множество номеров j таких, что $a_{ij}=1$. Тогда из теоремы о различных представителях непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. Для того, чтобы матрица A принадлежала множеству $(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}^1)$, необходимо и достаточно, чтобы она содержала такие k, $1\leq k\leq n$, строк /столбцов/, у которых элементы, равные I, расположены не более чем в $(k-1)$ столбцах /строках/. Другими словами, если $A\in(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}^1)$, то A содержит такую подматрицу B размерности $k\times(n-k+1)$, у которой ни один элемент не равен I, и наоборот.

Утверждение, что некоторое свойство ω выполняется для почти всех матриц $A\in\mathfrak{A}$ обозначает следующее: пусть $|E_\omega|$ -число матриц A, обладающих свойством ω, тогда $\frac{|E_\omega|}{r^{n^2}}\to 1$ при $n\to\infty$, т. е. доля матриц $A\in E_\omega$ в совокупности всех матриц множества $\mathfrak{A}$ стремится к I с ростом n.

ж/ Иногда эту задачу называют проблемой выбора /см. [1]/.

жж/ Арифметических операций или им эквивалентных.

Т е о р е м а I. Если $r \leq \frac{n}{c\ln n}$, где константа $c > 2$, то для почти всех матриц $A \in \mathfrak{A}$ решение задачи о назначении состоит только из минимальных элементов матрицы A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы I достаточно показать, что при $r \leq \frac{n}{c\ln n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'|}{|\mathfrak{A}|} = 0. \qquad /1/$$

Для этого, воспользовавшись следствием, оценим сверху величину $|\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'|$. Пусть зафиксированы k строк и $(n-k+1)$ столбцов, образующих указанную подматрицу $B \subset A$, $A \in (\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}')$. Элементы для подматрицы B можем выбрать $(r-1)^{k(n-k+1)}$ способами; элементы, не принадлежащие B, можем выбрать не более чем $r^{n^2-k(n-k+1)}$ способами. В свою очередь строки /столбцы/, образующие B, можно фиксировать C_n^k (C_n^{k-1}) способами. Отсюда

$$\frac{|\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'|}{|\mathfrak{A}|} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} C_n^k C_n^{k-1} (r-1)^{k(n-k+1)} r^{n^2-k(n-k+1)}}{r^{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(n,k),$$

где

$$\varphi(n,k) = C_n^k C_n^{k-1} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{k(n-k+1)}.$$

Докажем, что для $k \geq n/2$ и достаточно больших n

$$\frac{\varphi(n,k+1)}{\varphi(n,k)} \geq 1. \qquad /2/$$

Для этого нам будет удобно представить число k, $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$, в виде произведения xn, где x пробегает значения в отрезке $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$. Рассмотрим отношение

$$\frac{\varphi(n,xn+1)}{\varphi(n,xn)} = \frac{n-xn+1}{xn+1} \cdot \frac{n-xn}{xn} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-2xn} \geq f^2(x,r),$$

где $f(x,r) = \frac{(1-x)}{x}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{\frac{n}{2}-xn}$. По условию $r \leq \frac{n}{c\ln n}$, откуда $f(x,r) \geq f(x)$, где $f(x) = \frac{1-x}{x}\left(1 - \frac{c\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{2}-xn}$. Нетрудно убедится, что $\ln f(x) = n\left(\frac{1}{2} - x\right) \times \ln\left(1 - \frac{c\ln n}{n}\right) + \ln\frac{1-x}{x}$ есть вогнутая функция при $x \geq \frac{1}{2}$. Следовательно, минимальное значение $f(x)$ в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ принимает на конце промежутка. Воспользовавшись соотношением

$$\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = \exp(-\alpha - \varepsilon_n), \qquad /3/$$

где $\alpha < n$ и

$$\frac{\alpha^2}{2(n-\frac{2}{3}\alpha)} < \varepsilon_n < \frac{\alpha^2}{2(n-\alpha)},$$

и положив $c = 2 + d$, $d > 0$, для достаточно больших n имеем

$$f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n-1}\left\{\left(1-\frac{c\ln n}{n}\right)^{n}\right\}^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{n-1}\exp\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)\left(-c\ln n-\varepsilon_n\right)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n-1}\exp\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(c\ln n+\frac{c^2\ln^2 n}{2\left(n-\frac{2}{3}c\ln n\right)}\right)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n-1}\exp\left(\frac{c}{2}\ln n\right)=\frac{n}{n-1}n^{\frac{d}{2}}\geqslant 1.$$

Так как $f(1/2)=1$, то неравенство /2/ доказано.

Учитывая тождество $\varphi(n,k)\equiv\varphi(n,n-k+1)$ и соотношение /2/, можно записать

$$\frac{|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}^1|}{|\mathfrak{A}|}\leqslant 2\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}\varphi(n,k)\leqslant(n+1)\varphi(n,n)\leqslant n(n+1)\left(1-\frac{c\ln n}{n}\right)^{n}\leqslant$$

$$\leqslant n(n+1)\exp(-c\ln n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)n^{-d}\to 0$$

при $n\to\infty$. Равенство /I/, а вместе с ним и теорема I доказаны.

§ 2.

Опишем алгоритм A^*, который для матрицы $A\in\mathfrak{A}$ находит некоторое, вообще говоря, приближенное решение задачи о назначении; покажем, что это решение почти всегда является точным. Алгоритм A^* состоит из двух частей: A_1^* и A_2^*.

Первая часть A_1^* состоит из m шагов, которые перенумерованы числами $\lambda=1,2,\ldots,m$, где $m=[n-n^{2/3}+1]$. На шаге λ среди $n-\lambda+1$ не отмеченных значком $\circ$ элементов $a_{\lambda j}$ строки λ матрицы A выбирается /первый по порядку/ минимальный /пусть это будет $a_{\lambda j_\lambda}$ / и отмечается звездочкой $*$. После чего в строке λ и столбце j_λ неотмеченные элементы отмечаются значком $\circ$; полученную матрицу обозначим через A_λ; следует переход к $(\lambda+1)$-му шагу. Неотмеченные элементы матрицы A_λ образуют некоторую подматрицу размерности $(n-\lambda)\times(n-\lambda)$, которую обозначим через B_λ.

Вторая часть A_2^* есть венгерский алгоритм [I], который решает задачу о назначении для матрицы $B_m\subset A_m$. Результатом алгоритма A^* является матрица A_m, в которой n отмеченных звездочкой $*$ элементов $a^*_{ij_i}$ задают некоторое решение $S^*_m=\sum_{i=1}^{n}a^*_{ij_i}$ задачи о назначении.

Оценим снизу долю матриц $A\in\mathfrak{A}$, для которых S^*_m является точным решением задачи о назначении. Матрицу A будем называть λ-допустимой, если на каждом из первых λ шагов алгоритм A_1^* отмечает в ней звездочкой $*$ только элементы, равные I. Через $\mathfrak{A}_\lambda$ обозначим множество всех λ-допустимых матриц $A\in\mathfrak{A}$. Доля λ-допустимых матриц в множестве $\mathfrak{A}_{\lambda-1}$ составит

$$\frac{|\alpha_\lambda|}{|\alpha_{\lambda-1}|}=\frac{r^{n-\lambda+1}-(r-1)^{n-\lambda+1}}{r^{n-\lambda+1}}=1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-\lambda+1}.$$

Положив $\alpha_0=\alpha$, получим

$$\frac{|\alpha_m|}{|\alpha|}=\prod_{\lambda=1}^{m}\frac{|\alpha_\lambda|}{|\alpha_{\lambda-1}|}=\prod_{\lambda=1}^{m}\left(1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-\lambda+1}\right)\geqslant 1-\sum_{\lambda=1}^{m}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-\lambda+1}\geqslant$$

$$\geqslant 1-(r-1)\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-m}=1-r\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-m+1}.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением /3/, для $r<\dfrac{n^{2/3}}{\ln n^{2/3}}$ можем записать

$$\frac{|\alpha_m|}{|\alpha|}\geqslant 1-\frac{n^{2/3}}{\ln n^{2/3}}\left(1-\frac{\ln n^{2/3}}{n^{2/3}}\right)^{n^{2/3}}\geqslant 1-\exp\left\{\ln n^{2/3}-\ln\ln n^{2/3}+\ln n^{2/3}\right\}\to 1 \qquad /4/$$

при $n\to\infty$.

Алгоритм A_2^* решает задачу о назначении для такой матрицы B_m, элементы которой алгоритмом A_1^* не просматривались. Поэтому на основании теоремы I можно утверждать, что при $r<\dfrac{n^{2/3}}{c\ln n^{2/3}}$ доля всевозможных подматриц $B_m\subset A$, для каждой из которых алгоритм A_2^* находит решение задачи о назначении, состоящее только из единиц, стремится к I при $n\to\infty$. При этом алгоритмом A_2^* будет использовано $\sim(n-m)^3\leqslant(n^{2/3})^3=n^2$ операций [I]. Пусть C_0 означает некоторую константу. На основании последних замечаний и соотношения /4/ может быть сформулирована

Т е о р е м а 2. Если $r\leqslant\dfrac{n^{2/3}}{c\ln n^{2/3}}$, $c>2$, то доля матриц $A\in\alpha$, для каждой из которых при решении задачи о назначении используется не более чем $C_0 n^2$ операций, стремится к I при $n\to\infty$.

В заключение автор выражает благодарность Н.И.Глебову за ценные советы и внимание к работе.

Поступила в редакцию 4.2.1969.

Л и т е р а т у р а

I. Д.В.Юдин, Е.Г.Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. Изд-во "Советское радио", М., 1961

2. У.Черчмен, А.Акоф, Л.Арноф. Введение в исследование операций. Изд-во "Наука", М., 1968

3. М.Холл. Комбинаторный анализ. ИЛ, М., 1963