Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.519.95.

ПРЯМОЙ МЕТОД В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.С.Никольский /Москва/*/

1. В работах [1-6] были рассмотрены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями и были даны различные достаточные условия, при выполнении которых преследование из данной точки z_0 может быть закончено за время первого поглощения. В настоящей заметке мы рассматриваем новый способ преследования, который в качестве гарантийного времени использует некоторый момент поглощения /не всегда наименьший/. Этот способ является в некотором смысле аналогом того способа, который применил Л.С.Понтрягин в работе [7] для игр с интегральными ограничениями. Так как наш способ непосредственно использует преимущества догоняющего над убегающим, то естественно его назвать прямым методом.

2. Рассматривается задача преследования:

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u - C(t)v, \qquad /1/$$

где z - n -мерный вектор евклидова пространства R^n, $A(t)$ - квадратная матрица порядка $n \times n$, u и v - управляющие векторы, принадлежащие евклидовым пространствам U^p, V^q; $B(t)$ - прямоугольная матрица порядка $p \times n$; $C(t)$ -прямоугольная матрица порядка $q \times n$. Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ являются непрерывными функциями от t на $(-\infty, +\infty)$.

Управляющий вектор u находится в руках догоняющего, управляющий вектор v находится в руках убегающего. В R^n задано некоторое линейное подпространство M. Преследование начинается в момент t_0 из положения $z_0 \bar{\in} M$ и считается законченным в тот момент $t_1 > t_0$, когда впервые выполнено включение $z(t_1) \in M$.

Предполагается, что догоняющий в каждый момент t знает фазовое положение $z(t)$ и управление убегающего $v(t)$, т.е. рассматривается преследование с дискриминацией убегающего. Управления $u(t)$, $v(t)$ выбираются в классе измеримых векторных функций, удовлетворяющих ограничениям:

$$\int_t^{+\infty} (u(s), u(s))ds \leq \mu^2, \qquad /2/$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} (v(s), v(s))ds \leq \nu^2, \qquad /3/$$

где под (a, a) понимается скалярное произведение вектора a на себя,

---

*/ Город указывается для авторов, не проживающих в Новосибирске.

а $\mu > 0$ и $\nu \geq 0$. Обозначим буквой L подпространство R^n, ортогональное M, и буквой π – оператор ортогонального проектирования из R^n в L. Тогда целью преследования является $\pi z(t_1) = 0$, где 0 – нуль-вектор. Следующий пункт будет посвящен некоторым предварительным построениям.

3. Обозначим через $\mathfrak{A}(t,s)$ матрицант однородной линейной системы $\dot{y} = A(t)y$ /см.[8] // $t \geq s$ $\mathfrak{A}(t,t) = E_n$ – единичной матрице порядка $n \times n$ /.

Предположение А. Рассмотрим линейный оператор $\pi\mathfrak{A}(t,s)B(s)$. Будем считать, что при всех $t > s$ этот оператор осуществляет взаимно однозначное отображение пространства U^p на подпространство L /следовательно, $\dim L = p$ /.

Нам будет удобно считать, что подпространство M записывается уравнениями $z_i = 0$, $i = 1,\dots,p$. Это предположение не ограничивает общности, так как вектор z в уравнении /I/ можно подвергнуть такому ортогональному преобразованию, что в новых переменных подпространство M будет записываться уравнениями указанного вида. В качестве базиса пространства R^n мы возьмем векторы $e_1 = (1,0,\dots,0),\dots,$ $e_n = (0,0,\dots,1)$, где выписанные векторы имеют n компонент. Заметим, что векторы $e_1,\dots,e_p$ составляют базис подпространства L. В дальнейшем векторы πz будут рассматриваться именно в этом базисе.

Обозначим через Π матрицу оператора π. Она имеет простой блочный вид: $\Pi = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_p означает единичную матрицу порядка $p \times p$, а 0 символически обозначает матрицу, состоящую из нулей.

Рассмотрим теперь матрицу $\Pi\mathfrak{A}(t,s)B(s)$. Используя только что сказанное и предположение А, нетрудно показать, что

$$\Pi\mathfrak{A}(t,s)B(s) = \begin{pmatrix} F_1(t,s) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad /4/$$

где справа стоит блочная матрица, причем $F_1(t,s)$ является квадратной матрицей порядка $p \times p$ с ненулевым определителем при $t > s$. Аналогично, рассматривая матрицу $\Pi\mathfrak{A}(t,s)C(s)$, мы получим

$$\Pi\mathfrak{A}(t,s)C(s) = \begin{pmatrix} F_2(t,s) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

где справа стоит блочная матрица, причем матрица $F_2(t,s)$ имеет q столбцов и p строк. Используя формулы /4/, /5/, можно записать векторы $\pi\mathfrak{A}(t,s)B(s)u$, $\pi\mathfrak{A}(t,s)C(s)v$ в базисе $e_1,\dots,e_p$ в виде $F_1(t,s)u$, $F_2(t,s)v$ соответственно.

Выше было указано, что $F_1(t,s)$ является невырожденной матрицей при $t > s$. Поэтому можно построить матрицу $F(t,s) = F_1^{-1}(t,s)F_2(t,s)$.

Предположение В. Будем предполагать непрерывность матрицы $F(t,s)$ по s при $s = t$.

Возьмем некоторую измеримую функцию $v(s)$ на отрезке $[t_0, t]$.

$(t > t_0)$; удовлетворяющую ограничению /3/ и рассмотрим $\int_{t_0}^{t} F(t,s)v(s)ds$. Из непрерывности матрицы $F(t,s)$ по s и неравенства /3/ легко следует, что при любой функции $v(\cdot)$, удовлетворяющей ограничению /3/, имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t}(F(t,s)v(s), F(t,s)v(s))ds < K_1,$$

где K_1 - константа, вообще говоря, зависящая от t, t_0.

Условимся и впредь буквой K с индексом обозначать константы.

Введем функции

$$\gamma(t) = \chi^2(t) = \sup_{\int_{t_0}^{t}(v,v)ds \le \nu^2} \int_{t_0}^{t}(F(t,s)v(s), F(t,s)v(s))ds. \qquad /6/$$

П р е д п о л о ж е н и е В. Будем предполагать, что для всех $t > t_0$ выполняется неравенство $\mu > \chi(t)$, где $\chi(t)$ - арифметическое значение корня из $\chi^2(t)$.

Рассмотрим на отрезке $[t_0, t]$ /где $t > t_0$/ всевозможные векторные функции $w(\cdot)$, принадлежащие при каждом s пространству U^p и удовлетворяющие неравенству

$$\int_{t_0}^{t}(w(s),w(s))ds \le (\mu - \chi(t))^2. \qquad /7/$$

Эти функции при подстановке в векторный интеграл $\int_{t_0}^{t} F_1(t,s)w(s)ds$ дают векторы $\xi_{w(\cdot)}$. Обозначим совокупность всех векторов $\xi_{w(\cdot)}$ через $G(t,t_0)$. Легко убедиться в том, что $G(t,t_0)$ -выпуклое множество. Используя слабую компактность сферы в гильбертовом пространстве $L_2(t_0,t)$, можно показать, что $G(t,t_0)$ является замкнутым множеством. Можно показать, что $G(t,t_0)$ является эллипсоидом размерности p, но в дальнейшем этот факт нам не потребуется.

В следующем пункте мы будем использовать множество $G(t,t_0)$ применительно к дифференциальной игре /I/.

4. Пусть игра /I/ начинается в момент t_0 из положения $z_0 \bar{\in} M$. Мы хотим дать некоторые достаточные условия, при которых можно завершить преследование из точки z_0 по текущей информации за конечное время при выполнении ранее сделанных предположений А, Б, В.

Рассмотрим при $t > t_0$ вектор $-\pi\mathfrak{A}(t,t_0)z_0$ и выпуклое замкнутое множество $G(t,t_0)$. Возможны два случая.

1. При всех $t \ge t_0$ $-\pi\mathfrak{A}(t,t_0)z_0 \bar{\in} G(t,t_0)$.

2. Существует хотя бы одно $t = t_1$, такое что

$$-\pi\mathfrak{A}(t_1,t_0)z_0 \in G(t_1,t_0). \qquad /8/$$

В первом случае мы ничего не можем сказать о возможности завершения преследования из положения z_0. Во втором случае справедлива

Т е о р е м а. Из положения z_0 преследование можно завершить по крайней мере за время $t_1 - t_0$.

Доказательство. Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ фиксированы некоторые управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, удовлетворяющие ограничениям /2/, /3/, соответственно. Тогда, используя формулу Коши, имеем

$$\pi z(t_1)=\pi \mathfrak{A}(t_1,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t_1}(\pi \mathfrak{A}(t_1,s)B(s)u(s)-\pi \mathfrak{A}(t_1,s)C(s)v(s))ds. \qquad /9/$$

Из включения /8/ следует, что существует хотя бы одна векторная функция $\tilde{w}(\cdot)$, определенная на отрезке $[t_0, t_1]$, такая, что она удовлетворяет ограничению /7/ при $t=t_1$ и

$$-\pi \mathfrak{A}(t_1,t_0)z_0=\int_{t_0}^{t_1}\pi \mathfrak{A}(t_1,s)B(s)\tilde{w}(s)ds. \qquad /10/$$

Используя свою информацию об убегающем, догоняющий может строить управление $u(s)=F(t_1,s)v(s)+\tilde{w}(s)$. Из определения числа $\chi(t_1)$ и неравенства Коши-Буняковского легко следует, что управление $u(s)$ удовлетворяет ограничению /2/, т.е. является допустимым. Подставляя это управление в формулу /9/, используя определение матрицы $F(t,s)$ и равенство /10/, мы получим, что $\pi z(t_1)=0$, т.е. преследование кончается по выбранному способу в точности в момент t_1, а этого нам достаточно для доказательства справедливости теоремы.

Вообще говоря, моментов t_1, удовлетворяющих включению /8/, может быть несколько. Если их конечное число, то мы возьмем из них наименьшее Если их бесконечно много, то можно вычислить их нижнюю грань. Обозначим ее через t_0+T.

Следующий пункт будет посвящен вопросу: можно ли утверждать, что

$$-\pi \mathfrak{A}(t_0+T,t_0)z_0\in G(t_0+T,t_0). \qquad /11/$$

5. Исследуем функцию $\gamma(t)$ /см.формулу /6/ /. Покажем, что она полунепрерывна снизу по t $(t\geq t_0)$ справа по крайней мере при дополнительном требовании: матричная функция $F(t,s)$ непрерывна по совокупности переменных.

Фиксируем некоторое $t^*\geq t_0$. Очевидно, что при $t>t^*$

$$\gamma(t)=\sup_{\int_{t_0}^{t}(v,v)ds\leq\nu^2}\int_{t_0}^{t}(F(t,s)v(s),F(t,s)v(s))ds\geq\sup_{\int_{t_0}^{t}(v,v)ds\leq\nu^2}\int_{t_0}^{t^*}(F(t,s)v(s),F(t,s)v(s))ds. \qquad /12/$$

На множестве $0\leq t\leq t_1, 0\leq s\leq t$ $(t_1\geq t^*)$ матричная функция $F(t,s)$ равномерно непрерывна. Используя это обстоятельство, неравенство /3/ и неравенство Коши-Буняковского, получим для $t>t^*$

$$\int_{t_0}^{t^*}(F(t,s)v(s),F(t,s)v(s))ds=\int_{t_0}^{t^*}(F(t^*,s)v(s),F(t^*,s)v(s))ds+f(t,t^*), \qquad /13/$$

где $f(t, t^*)$ стремится к 0 при $t-t^*\to 0$ равномерно по функциям $v(\cdot)$ удовлетворяющим неравенству /3/. Из этого равенства следует, что по заданному $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при $t-t^*<\delta(\varepsilon)$

$$\int_{t_0}^{t^*}(F(t,s)v(s), F(t,s)v(s))ds \geq \int_{t_0}^{t^*}(F(t^*,s)v(s), F(t^*,s)v(s))ds-\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства /12/ получим при $t-t^*<\delta(\varepsilon)$, что $\gamma(t)>\gamma(t^*)-\varepsilon$, а это и означает полунепрерывность снизу справа функции $\gamma(t)$ в точке t^*. Из определения функции $\chi(t)$ как арифметического корня из $\gamma(t)$ следует, что и $\chi(t)$ полунепрерывна снизу справа.

Докажем теперь, что выпуклое замкнутое множество $G(t,t_0)$ зависит полунепрерывно сверху относительно включения по параметру t справа $(t\geq t_0)$.

По определению $G(t,t_0)$ является совокупностью p -мерных векторов $\int_{t_0}^{t}F_1(t,s)w(s)ds$, где функции $w(\cdot)$ удовлетворяют ограничению

$$\int_{t_0}^{t}(w(s),w(s))ds\leq(\mu-\chi(t))^2. \qquad /14/$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Возьмем p -мерный шар S_ε с центром в начале координат и радиусом ε. Полунепрерывность сверху относительно включения справа по t в точке t^* множества $G(t,t_0)$ означает, что по заданному $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только $t-t^*<\delta(\varepsilon)(t>t^*)$ выполняется включение

$$G(t,t_0)\subset G(t^*,t_0)+S_\varepsilon, \qquad /15/$$

где знак + означает алгебраическое сложение двух выпуклых множеств.

Заметим, что матричная функция $F_1(t,s)$ /см. /4/ / непрерывна по совокупности обоих переменных. Возьмем некоторое $t^*\geq t_0$. Рассмотрим $t^*\leq t\leq t_1$, и $0\leq s\leq t$, где t_1 - любая фиксированная константа, большая t^*. На этом множестве $F_1(t,s)$ равномерно непрерывна. Используя это обстоятельство, можно написать для точек $G(t,t_0)$ $(t^*\leq t\leq t_1)$ представление

$$\int_{t_0}^{t}F_1(t,s)w(s)ds = \int_{t_0}^{t^*}F_1(t,s)w(s)ds + \int_{t^*}^{t}F_1(t,s)w(s)ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t^*}F_1(t^*,s)w(s)ds + \int_{t^*}^{t}F_1(t,s)w(s)ds + q_1(t,t^*), \qquad /16/$$

где вектор $q_1(t,t^*)$ при $t\to t^*$ стремится по модулю к нулю равномерно по функциям $w(\cdot)$, удовлетворяющим неравенству /14/. Используя неравенство Коши-Буняковского, нетрудно показать, что

$$\left|\int_{t^*}^{t}F_1(t,s)w(s)ds\right|\leq K_2\sqrt{t-t^*}.$$

Итак, из равенства /16/ следует, что

$$\int_{t_0}^{t} F_1(t,s)w(s)ds = \int_{t_0}^{t^*} F_1(t^*,s)w(s)ds + q_2(t,t^*), \qquad /17/$$

где вектор $q_2(t,t^*)$ при $t \to t^*$ стремится по модулю к нулю равномерно по функциям $w(\cdot)$, удовлетворяющим неравенству /14/.

Используя полунепрерывность снизу функции $\chi(t)$ справа, можно утверждать, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что при $t - t^* < \delta_1(\varepsilon_1)(t > t^*)$ выполняется неравенство $\mu - \chi(t) < \mu - \chi(t^*) + \varepsilon_1$. Рассмотрим на отрезке $[t_0, t^*]$ функцию

$$w^*(s) = \frac{\mu - \chi(t^*)}{\mu - \chi(t^*) + \varepsilon_1} w(s). \qquad /18/$$

Если функция $w(s)$ в этом равенстве удовлетворяет неравенству /14/, то функция $w^*(s)$, как это нетрудно видеть, будет удовлетворять условию $\int_{t_0}^{t} (w^*(s), w^*(s))ds \le (\mu - \chi(t^*))^2$.

Используя равенство /18/, можно утверждать, что при достаточно малом ε_1

$$\int_{t_0}^{t^*} F_1(t^*,s)w(s)ds = \int_{t_0}^{t^*} F_1(t^*,s)w^*(s)ds + q_3(t,t^*), \qquad /19/$$

где для модуля вектора $q_3(t,t^*)$ равномерно по всем функциям $w(\cdot)$, удовлетворяющим неравенству /14/, выполняется оценка $|q_3(t,t^*)| < \varepsilon/2$.

Сопоставление равенств /17/, /19/ дает возможность утверждать, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только $t - t^* < \delta(\varepsilon)(t > t^*)$ выполняется включение /15/, что и требовалось доказать.

Из полунепрерывности сверху относительно включения по t справа выпуклого замкнутого множества $G(t, t_0)$ легко следует, что включение /11/ справедливо.

В следующем пункте мы разберем некоторые примеры применения построенной теории.

6. Рассмотрим сначала задачу преследования однотипных объектов:

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)(u - v),$$

где управляющие векторы u и v имеют одинаковую размерность: $p = q < n$. Пусть терминальное подпространство записывается уравнениями: $z_i = 0$, $i = 1,\dots,p$.

Для этого случая матрица $F(t,s)$ имеет простой вид: $F(t,s) = E_p$, где E_p - единичная матрица размерности $p \times p$. Функция $\gamma(t) = \chi^2(t)$ имеет вид

$$\gamma(t) = \sup_{\int_{t_0}^{t}(v,v)ds \le \nu^2} \int_{t_0}^{t} (E_p v(s), E_p v(s))ds = \nu^2.$$

Будем предполагать, что $\mu > \nu$, тогда $\mu - \chi(t) = \mu - \nu > 0$. Множество $G(t, t_0)$ состоит из точек $\int_{t_0}^{t} \pi \Phi(t,s) B(s) w(s) ds$, где

$$\int_{t_0}^{t} (w(s), w(s)) ds \leq (\mu - \nu)^2.$$

В качестве примера задачи преследования однотипных объектов рассмотрим

Пример I. Задача "два крокодила".

$$\dot{z}_1 = z_2, \qquad \dot{z}_2 = u - v, \tag{20}$$

где z_1, z_2, u, v - p -мерные векторы $(p > 1)$,

$$\int_{t_0}^{+\infty} (u(s), u(s)) ds \leq \rho^2, \qquad \int_{t_0}^{+\infty} (v(s), v(s)) ds \leq \sigma^2,$$

$$\rho > 0, \ \sigma > 0, \quad \rho - \sigma > 0.$$

Целью преследования является приход точки z на подпространство $M = \{z : z_1 = 0\}$. Уравнение /20/ при данных управлениях $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ можно проинтегрировать. Имеем

$$z_1(t) = z_1^0 + (t - t_0) z_2^0 + \int_{t_0}^{t} (t - s) E_p (u(s) - v(s)) ds. \tag{21}$$

Множество $G(t, t_0)$ состоит из векторов вида

$$\int_{t_0}^{t} (t - s) w(s) ds, \tag{22}$$

где p -мерная вектор-функция $w(\cdot)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{t_0}^{t} (w(s), w(s)) ds \leq (\rho - \sigma)^2.$$

Возьмем единичный p -мерный единичный вектор ψ и рассмотрим

$$\max_{\int_{t_0}^{t} (w,w) ds \leq (\rho - \sigma)^2} \int_{t_0}^{t} ((t - s) w(s), \psi) ds.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_{t_0}^{t} ((t-s) w(s), \psi) ds \leq \sqrt{\int_{t_0}^{t} (w(s), w(s)) ds} \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t} (t-s)^2 ds} \leq (\rho - \sigma) \sqrt{\int_{t_0}^{t} (t-s)^2 ds}$$

Из этого неравенства следует, что рассматриваемый максимум достигается на

$$w(s) = \frac{(\rho - \sigma)(t - s)}{\sqrt{\int_{t_0}^{t} (t-s)^2 ds}} \psi.$$

Подставляя эту функцию в формулу /22/, мы получим вектор

$$(\rho-\sigma)-\frac{\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^2ds}{\sqrt{\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^2ds}}\psi=(\rho-\sigma)\frac{(t-t_0)^{3/2}}{\sqrt{3}}\psi .$$

Из проведенных вычислений без труда следует, что выпуклое множество $G(t,t_0)$ в этом примере является p -мерным шаром с центром в начале координат с радиусом $R(t,t_0)$, равным $R(t,t_0)=(\rho-\sigma)\frac{(t-t_0)^{3/2}}{\sqrt{3}}$. Из формулы /21/ следует, что в базисе $e_1,\dots,e_p$

$$-\pi\mathfrak{A}(t,t_0)z_0=-(z_1^0+(t-t_0)z_2^0).$$

Из сказанного следует, что наименьший момент t, при котором выполняется включение $-\pi\mathfrak{A}(t,t_0)z_0\subset G(t,t_0)$, является первым корнем уравнения $(t>t_0)$

$$\left|z_1^0+(t-t_0)z_2^0\right|^2=(\rho-\sigma)^2\frac{(t-t_0)^3}{3}.$$

Из вида этого уравнения нетрудно вывести, что нашим способом можно закончить преследование из любого начального состояния $z_0=(z_1^0,z_2^0)$.

Теперь мы рассмотрим контрольный пример Л.С.Понтрягина [9] при интегральных ограничениях.

Пример 2.

$$\begin{aligned}\dot z_1&=z_2,\\ \dot z_2&=-\alpha z_2+\rho u,\\ \dot z_3&=z_4,\\ \dot z_4&=-\beta z_4+\sigma v,\end{aligned}\qquad /23/$$

где z_1, z_2, z_3, z_4, u, v - p -мерные векторы ($p\geq 1$), $\rho>0$, $\alpha>0$, $\sigma>0$, $\beta>0$ и на управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ наложены ограничения:

$$\int\limits_0^{+\infty}(u(s),u(s))ds\leq 1,\qquad /24/$$

$$\int\limits_0^{+\infty}(v(s),v(s))ds\leq 1.$$

Заметим, что система /23/ стационарна. Так что всегда можно считать, что игра начинается в момент $t=0$, поэтому нижние пределы в интегралах /24/ положены равными 0.

Целью преследования в задаче /23/ является выполнение равенства: $z_1=z_3$. Заметим, что задача /23/ уже не является задачей преследования однотипных объектов.

Чтобы воспользоваться развитой теорией, надо было бы перейти к новым переменным, в которых первые p базисных векторов лежат в подпространстве L, ортогональном подпространству $M=\{z: z_1=z_3\}$. Но переход к новым координатам может сильно усложнить систему /23/. Мы поступим по-другому: будем рассматривать задачу в старых координа-

тах, а для ее решения применим основные идеи нашего метода.

Рассмотрим p -мерные векторы a_i $(i=1,\dots,p)$, у которых все компоненты нули, за исключением i -й, которая равна I. Образуем из них новые $4p$ -мерные векторы: $i=1,\dots,p$, $e_i=\frac{1}{2}(a_i,0,-a_i,0)$, где 0 означает p -мерный вектор, целиком состоящий из нулей. Нетрудно видеть, что векторы e_i образуют базис подпространства L и обладают тем свойством, что вектор πZ, где $Z=(Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)$, записывается в этом базисе весьма просто: его координаты образуют вектор (Z_1-Z_3). В дальнейшем все векторы из L будут рассматриваться только в базисе $e_1,\dots,e_p$.

Если управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ заданы на отрезке $[0,t]$, то нетрудно выписать $\pi Z(t)$:

$$\pi z(t)=z_1^0-z_3^0+\int\limits_0^t e^{-\alpha s}ds\,z_2^0-\int\limits_0^t e^{-\beta s}ds\,z_4^0+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}E_p\rho u(s)-\frac{1-e^{-\beta(t-s)}}{\beta}E_p\sigma v(s)ds.$$

Цель преследования состоит в том, чтобы $\pi Z(t)$ поскорее сделалось равным нулевому вектору.

В соответствии с нашим методом мы рассмотрим матрицу

$$F(t,s)=\frac{\sigma\alpha}{\rho\beta}\cdot\frac{1-e^{-\beta(t-s)}}{1-e^{-\alpha(t-s)}}E_p.$$

Заметим, что скалярная функция

$$f(t,s)=\frac{\sigma\alpha}{\rho\beta}\cdot\frac{1-e^{-\beta(t-s)}}{1-e^{-\alpha(t-s)}}$$

при $s\to t$ имеет предел, равный $\frac{\sigma}{\rho}$, и непрерывна по совокупности переменных t, s $(0\leqslant s\leqslant t)$.

Рассмотрим функцию

$$\gamma(t)=\chi^2(t)=\sup_{\int\limits_0^t (v,v)ds\leqslant 1}\int\limits_0^t (f(t,s)v(s),f(t,s)v(s))ds. \qquad /25/$$

Относительно констант ρ, α, σ, β будем предполагать выполненными неравенства

$$\rho\geqslant\sigma,\qquad \frac{\rho}{\alpha}\geqslant\frac{\sigma}{\beta}. \qquad /26/$$

Однако одновременные превращения обоих этих неравенств в точные равенства исключается. Из вычислений Л.С.Понтрягина /см. [9] / следует, что при выполнении неравенств /26/ $0\leqslant f(t,s)<1$. Из формулы /25/ следует, что $1-\chi(t)>0$, таким образом, предположение В оказывается выполненным. Теперь мы рассмотрим множество $G(t,0)$,

состоящее из векторов, даваемых интегралами $\int\limits_0^t \rho \frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} w(s)ds$, где $\int\limits_0^t (w(s), w(s))ds \leq (1-\chi(t))^2$.

Поступая так же, как в примере I, нетрудно доказать, что $G(t,0)$ - шар размерности p с центром в начале координат и радиусом

$$R(t) = (1-\chi(t))\sqrt{\int\limits_0^t \left(\rho\,\frac{1-e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha}\right)^2 ds}. \qquad /27/$$

Если считать выполненными вместо неравенств /26/ более сильные неравенства: $\rho > \sigma$, $\frac{\rho}{\alpha} > \frac{\sigma}{\beta}$, то $0 \leq f(t,s) \leq \max\left(\frac{\sigma}{\rho}, \frac{\sigma\alpha}{\beta\rho}\right) < 1$ и $1-\chi(t) \geq k_3 > 0$. Тогда $R(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В этом примере $\pi\Omega(t,0)z_0 = z_1^0 - z_3^0 + \int\limits_0^t e^{-\alpha s} ds\, z_2^0 - \int\limits_0^t e^{-\beta s} ds\, z_4^0$.

Из того, что $R(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и из вида $\pi\Omega(t,0)z_0$ легко следует, что для любого начального состояния z_0 существует такой момент $T(z_0) \geq 0$, что $-\pi\Omega(T(z_0),0)z_0 \in G(T(z_0),0)$.

Нетрудно доказать, опираясь на вышеприведенную теорию, что за время $T(z_0)$ можно завершить преследования из точки z_0.

Поступила в редакцию 21.2.1969 г.

Литература

1. Н.Н.Красовский, Ю.М.Репин, В.Е.Третьяков. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем, Известия АН СССР, Тех. кибернетика, № 4, 1965.

2. В.Е.Третьяков. Регуляризация одной задачи о преследовании, ДУ, № 12, 1967.

3. Н.Н.Красовский. К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов ПММ, т. 30, вып. 2, 1966.

4. Н.Н.Красовский, В.Е.Третьяков. К задаче о встрече движений, ДАН СССР, т. 173, вып. 2, 1967.

5. Б.Н.Пшеничный, Ю.Н.Онопчук. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями, Известия АН СССР, Тех. кибернетика, № 1, 1968.

6. Ю.Н.Онопчук. О дифференциальных играх с интегральными ограничениями, сб. "Теория оптимальных решений", Ин-т кибернетики АН УССР, № 2, 1967.

7. Л.С.Понтрягин. О линейных дифференциальных играх, I, ДАН СССР, т. 174, № 6, 1967.

8. Б.П.Демидович. Лекции по математической теории устойчивости, "Наука", 1967.

9. Л.С.Понтрягин, К теории дифференциальных игр, УМН, т.21,вып. 4 /130/, 1966.